

Data una matrice S_{mN} di rango $r > 0$ esiste un numero infinito di coppie di matrici X_{SN} e Y_{SN} tali che XSX' è non singolare (cioè $|XSX'| \neq 0$). Infatti ogni matrice (non singolare) di ordine $S \times S$ è esprimibile nella forma XSX'

Teorema 1 Data una matrice S_{mN} di rango $r > 0$ e $X_{SN} S_{mN} Y'_{SN}$ non singolare per $S \leq r$;

$$S_1 = S - SY'(XSX')^{-1}XS \quad \text{è di rango } r-S. \quad (1)$$

ma rinvia il Teorema 3 al § 8

Teorema di Laprange

$$S_1 = S - \frac{Sy'xS}{xSy'}$$

è di rango $r-1$
(x e y vettori rigo di n elementi)

4. Se $S_{mN} = F_{m2} P'_{2N}$ (rango r) si dice che S (rango r) è fattorizzata dalle matr. F e P e così $F \in P$

(Se esiste una coppia di F e P , ~~esiste~~ ne esiste un numero infinito. infatti, se Z è una matrice arbitraria non singolare di ordine $r \times r$)

$$F_0 = F_{m2} Z^{-1} \quad P_0 = Z(P'_{2N})' \quad S_{mN} = F_0 P_0 = F Z^{-1} Z P$$

Per uso del teorema 1 si possono costruire F e P per successivi passi, servendosi di matrici F_1 e P_1 , F_2 e P_2 ecc, la cui dimensione comune è $S < r$

(3) $F_1 = SY'(XSX')^{-1}Z_1^{-1}$ in cui Z è una matrice arbitraria non singolare di ordine S

(4) $P_1 = Z_1 XS$ è con?

Allora l'equazione (1) si può scrivere $S_1 = S - F_1 P_1$

quindi operando sulla matrice residua

$$S_2 = S_1 - F_2 P_2 \quad \text{fin a}$$

$$0 = S_{m-1} - F_m P_m$$

Si ha dunque,

$$S = F_1 P_1 + F_2 P_2 + \dots + F_m P_m$$

e formando le supermatrici

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_m \end{bmatrix}$$

$$P_N = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix}$$

si hanno le matrici F e P che fanno passare S in quanto $S_N = F P_N$

5 Il probl. della metrica

Usualmente unita standard in S_N cioè medie 0 e varianza 1

(o se sono sottratte le misure nel fattore specifico + errore, S sono misure nette, con media 0 e la comune come varianza)

Quando le medie delle misure nette sono 0, anche le medie delle misure fattoriali sono 0. Infatti

$$\begin{matrix} n \\ \boxed{S} \\ N \end{matrix} \cdot \begin{matrix} N \\ \boxed{N} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$SN = 0$$

(le somme delle righe, come le medie, sono zero)

e allora, postmoltiplicando per il vettore N i due membri dell'equazione (4)

$$P_1 N = \sum_i X_i S N$$

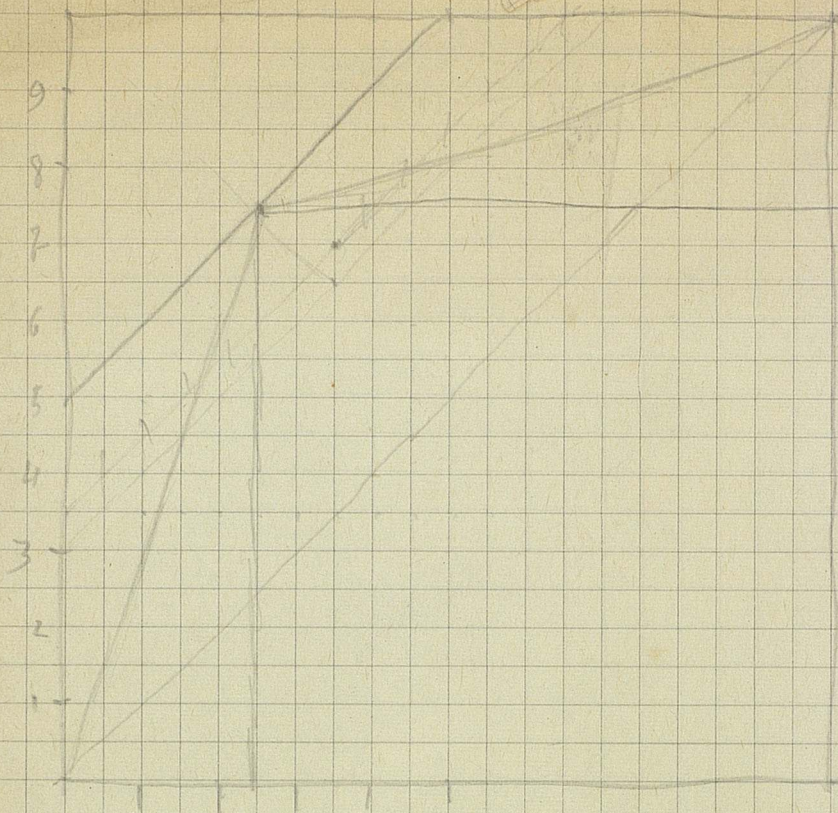
$$\text{da cui } P_1 N = 0$$

$$\text{poiché } SN = 0$$

e (v. art.) si dimostra che anche le medie delle righe di $P_2, P_3, \dots$ sono zero.

Nei riguardi della varianza la cosa non è diversa. Per ottenere tale risultato la matrice Z deve essere scelta in modo particolare.

(v. p. 8)



$$t=1 \text{ u } r=1 \\ q=1$$

$$t=0 \text{ u } r=0 \\ q=0$$

$$\text{e } p=1 \\ q=2b$$

$$t = \frac{a \cdot 2b - b}{a + b - 1} \quad \alpha = \frac{p - q}{e - b}$$

la forma utile nella tr.
e tutti i maggiori q. e
maggiore $(a-b)$

$$p = a - b \\ a = 0$$

$$t = \frac{a q - b p}{(a + q) - (b + p)}$$

$$\frac{b(a-b)}{(a-b) - (b-b)} = \frac{a + q - b + p}{(a + b) + (q - b)}$$

$$\frac{b(a-b)}{(a-b) - (b-b)}$$

~~2/1~~ ~~K~~

$$\frac{a + q - b + p}{(a + q) - (b + p)} =$$

$$= \frac{K(aq - bp)}{(a-b) - K(p-q)}$$

Lemma 2. Se G_m è gramiana (ordine $n \times n$ e rango $r > 0$), per ogni intero S (tale che $0 < S \leq r$) esiste un infinito numero di matrici $X_{S \times n}$ (ordine $S \times n$) tali che $X G_m X'$ è non singolare. Infatti tutte le matrici non singolari gramiane d'ordine $S \times S$ si possono esprimere nella forma $X_{S \times n} G_m (X')'_{n \times S}$

Ritornando al Lemma (1) invece di considerare una Y arbitraria si assume (10) $Y_{S \times n} = X_{S \times n} S_{n \times n}$ (in cui X è sempre arbitraria, ~~tranne~~ con la sola condizione che $X S Y' = X S S' X'$ sia non singolare) (11) $S S'$ è gramiana e di rango r

Considerando $F_1 = S Y' (X S Y')^{-1} Z_1^{-1}$ e $P_1 = Z_1 X S$ e sostituendo usando la (10) e la (11) e assumendo $Z_1 = \sqrt{N} (X S S' X')^{-\frac{1}{2}}$ si ha

$$F_1 = S S' X' (X S S' X')^{-1} [\sqrt{N} (X S S' X')^{-\frac{1}{2}}]^{-1}$$

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} S S' X' (X S S' X')^{-1} (X S S' X')^{\frac{1}{2}}$$

$$(12) \quad F_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} S S' X' (X S S' X')^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(\text{perché } a^{-1} a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} \sqrt{a} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} = a^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$(13) \quad P_1 = \sqrt{N} (X S S' X')^{-\frac{1}{2}} X S$$

(essendo simmetrica la trasposta è uguale)

$$\text{Si ha allora } \frac{1}{N} P_1 P_1' = (X S S' X')^{-\frac{1}{2}} X S S' X' (X S S' X')^{-\frac{1}{2}} = I$$

(12) e (13) sono dunque formule che permettono di calcolare fattori ortogonali, che si possono esprimere con

$$F_1 = R X' (X R X')^{-1} \quad P_1 = (X R X')^{-1} X R \quad \text{essendo } \frac{S S'}{N} = R$$

(essendo $\frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{N}}{N}$)

Alcuni fatti in più

Postmoltiplicando per $\frac{1}{N} S'$ la (85), cioè $P_1 = (X R X')^{-\frac{1}{2}} X S$

$$\text{si ha } \frac{1}{N} P_1 S' = (X R X')^{-\frac{1}{2}} X R$$

$$\text{cioè } \frac{1}{N} P_1 S' = F_1'$$

cioè le saturazioni fattoriali sono le covarianze fra test e fattori

Prendendo la (14) per X

$$X F_1 = (X R X')^{-\frac{1}{2}} = F_1' X$$

$$(\text{perché } a a^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a} =$$

Formule simili alla (12) e (13) valgono per $F_2, P_2, \dots, F_m, P_m$ e i vari fattori di sono ortogonali entre ogni insieme, ma ~~non~~ non ortogonali reciproci, in generale non ortogonali fra gli insiemi

$$\text{cioè se } j \neq k \quad P_j P_k' \neq 0$$

$$\text{mentre se } j = k$$

$$\frac{1}{N} P_j P_j' = I$$

7. Giustificazione dei calcoli basati sulla matrice delle correlazioni

Teorema 2

$$\text{Se } R = \frac{1}{N} S S' = F F'$$

in cui ~~se~~ S è di ordine $n \times N$ e di rango r e F è di ordine $n \times r$ (e di rango r), allora è possibile determinare una P tale che

$$S = F P$$

inoltre questa P è unicamente determinata e soddisfa a

$$(20) \quad \frac{1}{N} P P' = I$$

per l'esistenza di P v. il testo, e così ~~per dimostrare l'unicità~~
per dimostrare l'unicità basta premoltiplicare da ambo i lati

$$S = F P \quad \text{per } (F' F)^{-1} F'$$

$$(21) \quad (F' F)^{-1} F' S = (F' F)^{-1} F' F P = P \quad (F' F)^{-1} F' S \text{ è chiaramente}$$

$$P = (F' F)^{-1} F' S \quad \text{unica per un dato } F$$

Premoltiplicando ogni membro della (21) per la sua trasposta e dividendo per N si ha

$$\frac{1}{N} P P' = \frac{1}{N} (F' F)^{-1} F' S S' F (F' F)^{-1} = (F' F)^{-1} F' F F' F (F' F)^{-1} = I$$

(essendo $\frac{1}{N} S S' = F F'$)

cioè se $R = F F'$, comunque siano costituiti gli F , le matrici fattoriali sono automaticamente ortogonali.

8. Fattorizzazione della matrice delle correlazioni (metodo generale per fattorizzare qualsiasi matrice gramiana).

Il teorema 1 consente di estrarre contemporaneamente quanti fattori si vuole. Il teorema fondamentale per il metodo ^(perché è applicabile alla matrice R) è

Teorema 3. Sia G una matrice gramiana d'ordine $n \times n$ e di rango $r > 0$. Sia X una matrice di ordine $s \times n$ e tale che $X G X'$ sia non-singolare. Allora la matrice renduta

$$(22) \quad G_1 = G - G X' (X G X')^{-1} X G$$

è di rango $r-s$ ed è gramiana.

La prova che G_1 è di rango $r-S$ è data dal teorema 1 sostituendo G a S e ponendo $Y = X$. Il lemma 2 assicura l'esistenza di un numero infinito di matrici X soddisfacenti.

Per provare che G_1 è gramiana, poniamo $G = F_0 F_0'$, in cui F_0 è di ordine $n \times r$, corrispondentemente al teorema 6.

Allora la (22) si può riscrivere

$$G_1 = \underbrace{F_0 F_0' - F_0 F_0' X' (X F_0 F_0' X')^{-1} X F_0 F_0'}_{\neq} \\ = F_0 [I - F_0' X (X F_0 F_0' X')^{-1} X F_0] F_0'$$

Chiamando H la matrice simmetrica in parentesi quadra si ha

$$(23) \quad G_1 = F_0' H F_0'$$

Siccome si può verificare che $H^2 = H$, cioè

$$(23) \quad H = H H'$$

per cui dal teorema (a) risulta che H è gramiana, ed essendo $G_1 = F_0' H F_0'$ dal teorema (d) risulta che anche G_1 deve essere gramiana.

Per ottenere S colonne di una matrice fattoriale F possiamo porre

$$F_1 = G X' (X G X')^{-\frac{1}{2}}$$

che è di ordine $n \times S$ e in cui viene usata la radice quadrata gramiana di $X G X'$. Si può allora scrivere la (22)

$$G_1 = G - F_1 F_1'$$

Income G_1 è gramiana il processo di fattorizzazione si può riapplicare a G_1 , ecc. finché non siano state stabilite le rimanenti $r-S$ colonne di F . Va notato come caso speciale della (2) che

$$(24) \quad X G_1 = 0$$

e quindi bisogna ogni volta usare un'altra X_j .

La matrice gramiana G è in un caso particolare la R con unità o commutatore al posto della diagonale.

9. Il caso speciale del metodo centrato.

Il calcolo $(XGX')^{-\frac{1}{2}}$ può costituire l'ostacolo per noi
poiché ad una visita dell'applicazione se $S > 3$. Non potrebbe esser
difficile elaborare procedimenti relativamente semplici per $S \leq 3$.

Quando $S=1$ X diventa semplicemente un vettore riga, x e
 XGX' è semplicemente uno scalare positivo.

quindi $(XGX')^{-\frac{1}{2}}$ si può calcolare facilmente con l'aritmetica.
In effetti si può scrivere f_1 come un vettore colonna, cioè

$$f_1 = \frac{Gx'}{\sqrt{XGX'}}$$

Nel caso speciale in cui gli elementi di x sono tutti in modo da
essere tutti unitari, cioè $\exists x$ è il vettore unitario 1 , si ha il metodo
centrato, in cui

$$f_1 = \frac{G1'}{\sqrt{1G1'}}$$

Come caso speciale di (24) abbiamo $1G_1 = 0$ sicché 1 non può
essere usato per le successive fattorizzazioni.

Nel metodo di Thorstone si fa la riflessione degli a_i per estrarre
i successivi fattori, cioè per fattorizzare le matrici residue si
usano vettori del tipo $x' = \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \dots \pm 1$ con i segni scelti in
qualsiasi modo, pur di evitare che XGX' sia $= 0$. (In questo caso $XGX' > 0$
perché G è

L'analisi presentata dimostra che non è necessario limitarsi
a $x = \pm 1$. Si possono usare valori talora condensa più rapidamente
e (o) avvicinarsi al massimo alla struttura semplice, se c'è.