PROPAGANDA D'ISTRUZIONE

BIBLIOTECA DEL POPOLO

CENTESIMI 80 IL VOLUME

Prof. LUIGI PEDROTTI

Importanti Applicazioni dei LOGARITMI

Funzioni esponenziali e calcolo degli interessi composti ed annualità.

Ogni volumetto consta di 64 pagine di fitta composizione e contiene un completo trattatello elementare di scienza pratica, di cognizioni utili ed indispensabili, dettato in forma popolare, succinta, chiara, alla portata di ogni intelligenza.

OGNI VOLUME 80 CENTESIMI

CASA EDITRICE SONZOGNO
della Società Anonima ALBERTO MATARELLI
Via Pasquirolo, 14 - MILANO

BATTAGLINI

VOLUME 441

INDICE

Edizione precedente 1933-XI

Ristampa stereotipa finita il 30 ottobre 1939-XVIII

Stab. Grafico Matarelli della Soc. Anon. Alberto Matarelli
Milano - Via Passarella 15. - *Imprimé en Italie.* co-39-a

PREFAZIONE

L'importanza dei logaritmi nella pratica applicazione mi ha suggerito di raccogliere in un manualetto le loro proprietà fondamentali, facendole precedere da alcune nozioni sulla funzione esponenziale a^x, *da cui si può far dipendere lo studio dei logaritmi.*

Al capitolo III ho esposte la definizione e alcune proprietà dei logaritmi togliendole dalle progressioni, completando così il loro studio.

Nel capitolo IV ho risolte, coll'aiuto dei logaritmi, le equazioni esponenziali.

Nel capitolo V ho dati alcuni esempi di problemi d'interessi composto e di annualità, i quali altro non sono se non applicazioni del calcolo logaritmico.

Segue il calcolo del numero e che è la base dei logaritmi neperiani.

Chiude il manualetto il calcolo dei logaritmi neperiani, quello dei logaritmi volgari ed alcuni cenni sulle tavole delle funzioni circolari.

L'opera modesta non può essere certo priva di interesse e pertanto la raccomando alla osservazione degli studiosi delle matematiche discipline.

LUIGI PEDROTTI.

Importanti applicazioni dei logaritmi - Funzioni esponenziali e calcolo degli interessi composti ed annualità.

LOGARITMI

CAPITOLO I.

Studio della funzione esponenziale.

1. — Si chiama *funzione esponenziale* una potenza di base *costante* e di esponente *variabile*.

Studiamo il modo con cui varia questa potenza col variare del suo esponente.

Questo modo ci viene dato dai seguenti teoremi:

2. — *Le potenze intere successive d'un numero maggiore dell'unità vanno aumentando e diventano maggiori di qualsiasi quantità data.*

Sia a un numero positivo maggiore dell'unità. Si vede intanto che le potenze successive vanno aumentando poichè si ottiene a^{m+1} moltiplicando a^m per a; il moltiplicatore a essendo maggiore dell'unità, il prodotto a^{m+1} è maggiore del moltiplicando a^m. Dimostriamo ora che le potenze di a aumentano al di là di ogni limite. Poniamo $a = 1 + \alpha$; sviluppando $(1 + \alpha)^m$ secondo la legge del binomio, avremo:

$$a^m = (1 + \alpha)^m = 1 + \frac{m}{1}\alpha + \frac{m\,(m-1)}{1.2}\alpha^2 + \ldots..$$

Tutti i termini dello sviluppo sono positivi; se dunque si trascura il terzo termine e quelli successivi, si diminuisce il secondo membro, e si ha:

$$a^m > 1 + m\,\alpha.$$

Per rendere la grandezza a^m maggiore di una quantità data A, basta evidentemente di rendere la quantità $1 + m\,\alpha$ maggiore di questa quantità; si determinerà dunque l'esponente m di guisa da soddisfare all'inequazione $1 + m\,\alpha > A$ da cui $m > \dfrac{A-1}{\alpha}$.

Così, allorquando l'esponente m sorpasserà $\dfrac{A-1}{\alpha}$ la quantità a^m sarà certamente maggiore della quantità A, grande quanto si vuole. Dunque le succesive potenze del numero a maggiore dell'unità aumentano all'infinito.

3. — *Le potenze intere successive d'un numero minore dell'unità vanno diminuendo e tendono verso zero.*

Un numero a minore dell'unità può essere rappresentato da $\dfrac{1}{a'\,a^1}$, ove a' è un numero maggiore di 1, quindi si ha $a^m = \dfrac{1}{a'^m}$.

Quando l'esponente m cresce indefinitamente, il denominatore crescendo all'infinito, la frazione diminuisce e tende verso zero.

4. — *Le radici d'un numero maggiore dell'unità*

sono maggiori dell'unità; esse diminuiscono coll'aumentare dell'indice del radicale e tendono verso l'unità.

Osserviamo innanzitutto che, allorquando un numero positivo a è maggiore dell'unità, la sua radice $b = \sqrt[n]{a}$ è pure maggiore dell'unità; poichè se il numero b fosse minore di 1, la sua potenza b^n sarebbe minore di 1 e conseguentemente non sarebbe uguale ad a.

Consideriamo ora due radici consecutive:

$$b = \sqrt[n]{a}\,,\; b' = \sqrt[n+1]{a}\;;$$

dico che la radice b' è minore di b. Si ha infatti $b^n = b'^{n+1} = a$ e per conseguenza $\left(\frac{b}{b'}\right) = b'$. Siccome poi la radice b' è maggiore di 1, il rapporto $\frac{b}{b'}$ è pure maggiore di 1 e quindi b' è minore di b.

Dimostriamo ora che si può rendere l'indice del radicale grande, così che il valore della radice oltrepassi l'unità d'una grandezza minore d'una quantità data α, piccola quanto si vuole.

Basta determinare n in modo che si abbia:

$$\sqrt[n]{a} < 1 + \alpha \text{ ossia } (1 + \alpha)^n > a.$$

Ora, in virtù del primo teorema, si può determinare l'esponente n in modo che la potenza $(1 + \alpha)^n$ superi il numero dato a. Così, ad esempio, se si vuole che $\sqrt[n]{2}$ differisca dall'unità di meno di 0,001, basterà rendere n maggiore di $\frac{2 - 1}{0{,}001}$, maggiore cioè di 1000. Così quando n aumenta all'infinito, $\sqrt[n]{a}$ tende verso l'unità.

5 — *Le radici d'un numero minore dell'unità sono minori dell'unità; esse aumentano coll'indice del radicale e tendono verso l'unità.*

Se si pone $a = \frac{1}{a'}$, essendo a' un numero maggiore

dell'unità, si ha $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt{a'}}$; quando n aumenta

indefinitamente, il denominatore diminuisce e di conseguenza la frazione aumenta e tende verso l'unità.

COROLLARIO. — *Qualsiasi potenza frazionaria di un numero maggiore di 1 è maggiore di 1; qualsiasi potenza frazionaria di un numero minore di 1 è minore di 1.*

Infatti $a^{\frac{m}{n}}$ significa $\sqrt{a^m}$; se a è maggiore di 1, a^n è maggiore di 1 e quindi anche $\sqrt[n]{a^m}$, se poi a è minore di 1, a^m è pure minore di 1, e così pure $\sqrt[n]{a^m}$.

6. — *La funzione a^x varia d'un modo continuo quando x cresce d'un modo continuo.*

Consideriamo per primo il caso in cui il numero positivo a è maggiore dell'unità. Dimostreremo che in questo caso la funzione a^x cresce colla variabile x, e che essa cresce in modo continuo. Se si dà alla variabile x un aumento positivo h, la funzione a^x diventa a^{x+h}, e subisce una variazione data da

$$a^{x+h} - a^x = a^x (a^h - 1).$$

Ma la quantità a^{ah} è maggiore di 1, poichè ogni potenza frazionaria positiva d'un numero a maggiore di *1* è a sua volta maggiore di 1; dunque la differenza $a^{x+h} - a^x$ è positiva, e quindi la quantità a^{x+h} è maggiore di a^x.

Così la funzione a^x cresce contemporaneamente alla variabile x.

Ora dico che si può assegnare una frazione $\frac{1}{n}$ tale che, per qualsiasi valore di h minore di $\frac{1}{n}$, la differenza $a^{x+h} - a^x$ sia minore di una quantità data α, piccola quanto si vuole. In virtù del teorema del N. 4 si può determinare un numero intero n abbastanza grande perchè la quantità $a^{\frac{1}{n}}$, cioè la radice $\sqrt[n]{a}$, oltrepassi l'unità d'una grandezza minore della quantità data $\frac{\alpha}{a^x}$; ma, da quanto precede, se l'esponente h è minore di $\frac{1}{n}$, la potenza a^h è minore di $a^{\frac{1}{n}}$, e perciò la differenza $a^h - 1$ è minore di $a^{\frac{1}{n}} - 1$ e per conseguenza minore di $\frac{\alpha}{a^x}$; si ha dunque $a^x(a^h - 1) < \alpha$ ossia $a^{x+h} - a^x < \alpha$.

Così, per qualsiasi valore di h minore di $\frac{1}{n}$, la variazione della funzione è minore della quantità data α; è precisamente in questo che consiste la *continuità*.

Consideriamo in secondo luogo il caso in cui il numero positivo dato a è minore dell'unità; se si pone $a = \frac{1}{a'}$, essendo a' un numero maggiore di 1, si ha

$$a^x_n = \frac{1}{a'^{x}}.$$

Allorchè x cresce in modo continuo, a'^x cresce, e conseguentemente a^x diminuisce d'un modo continuo

7. — Corollario. — Esaminiamo ora i valori per i quali passa la funzione esponenziale a^x, quando si fa aumentare x in modo continuo da $-\infty$ a $+\infty$. Supponiamo dapprima che il numero dato a sia maggiore di 1. Facciamo crescere x da 0 a $+\infty$; per $x=0$, si ha $a^0=1$; secondo il teorema del N. 2, le potenze intere di a diventano maggiori di qualsiasi quantità data; così quando x cresce da 0 a $+\infty$, la funzione a^x cresce da 1 a $+\infty$ Facciamo ora diminuire x da 0 a $-\infty$, e perciò poniamo $x=-x'$, essendo la nuova variabile x' positiva; si ha $a^x=\frac{1}{a'^x}$; quando x' aumenta da 0 a $+\infty$, a'^x aumenta da 1 a $+\infty$ e per conseguenza a^x diminuisce da 1 a 0. Riassumendo, allorchè la variabile x aumenta in modo continuo da $-\infty$ a $+\infty$, la funzione a^x aumenta in modo continuo da 0 a $+\infty$. Bisogna osservare che la funzione passa per tutti i valori positivi e che non passa da essi che una sola volta, in quanto va costantemente aumentando.

Supponiamo ora che il numero dato a sia minore di 1, e poniamo, come precedentemente, $a=\frac{1}{a'}$, essendo a' un numero maggiore di 1, da cui $a^x=\frac{1}{a'^x}$.

Se x cresce da 0 a $+\infty$, a'^x cresce da 1 a $+\infty$ e quindi a^x diminuisce da 1 a 0; se x diminuisce da 0 a $-\infty$, a'^x diminuisce da 1 a 0 e quindi a^x cresce cresce da 1 a $+\infty$. Così quando x aumenta in modo continuo da $-\infty$ a $+\infty$ la funzione a^x diminuisce in modo continuo da $+\infty$ a 0.

La funzione passa ancora da tutti i valori positivi e non passa che una sola volta per ciascuno di essi.

8. — *Osservazione.* — Ora possiamo dare con precisione il significato di esponente incommensurabile. Sia

$a^{\sqrt{2}}$ e, per precisare le idee, sopponiamo che il numero a sia maggiore di 1: il numero incommensurabile $\sqrt{2}$ è il limite comune dei due numeri frazionari $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$, che differiscono fra loro di una quantità tanto piccola quanto si vuole e i cui quadrati comprendono il numero 2; sostituendo a $\sqrt{2}$ questi numeri approssimati, si otterranno due serie di potenze frazionarie a ed $a^{\frac{m+1}{n}}$, le prime minori delle seconde e tali che la loro differenza può essere resa minore di una quantità data; esiste dunque fra queste due serie di grandezze una grandezza determinata che ne è il limite comune; è appunto questo limite che esprime $a^{\sqrt{2}}$

CAPITOLO II.

Definizione di logaritmo per mezzo della funzione esponenziale.

— Si chiama *logaritmo* d'un numero l'esponente della potenza alla quale bisogna inalzare un numero positivo dato a per riprodurre il numero dato. Questo numero costante a si chiama *base* del sistema dei logaritmi.

Abbiamo visto che, allorquando x aumenta in modo continuo da $-\infty$ a $+\infty$, la fuzione a^x passa per tutti i valori positivi e non passa che una volta per ciascuno di essi; ne consegue che tutti i numeri positivi hanno dei logaritmi, e ciascuno di essi non ha che un logaritmo.

Se il numero dato a è maggiore di 1, i numeri maggiori dell'unità hanno logaritmi positivi, e i numeri minori dell'unità logaritmi negativi.

Se poi il numero a fosse minore di 1, i numeri maggiori dell'unità avrebbero per l'opposto logaritmi negativi, i numeri minori dell'unità logaritmi positivi. I numeri negativi non hanno logaritmi reali.

Si indica il logaritmo d'un numero col simbolo *log*. Sia dunque $y = a^x$, diremo che l'esponente x è il logaritmo del numero y nella base a e scriveremo $x = \log y$. Poichè y varia in modo continuo con x, reciprocamente x varia in modo continuo con y; così il logaritmo x è una funzione continua del numero y. Se la base a è maggiore dell'unità, quando il numero y cresce da 0 ad 1, poi da 1 a $+\infty$, il logaritmo x cresce da $-\infty$ a 0, poi da 0 a $+\infty$.

Proprietà dei logaritmi.

I logaritmi godono di certe proprietà importanti che ora dimostreremo.

10. — *Il logaritmo del prodotto di più fattori è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori.*

Si abbiano due numeri y ed y' i cui logaritmi indicheremo con x ed x'; per definizione di logaritmo abbiamo $a^x = y$; $a^{x'} = y'$.

Moltiplicando queste due uguaglianze membro a membro si ottiene $a^{x+x'} = y\,y'$.

L'esponente $x+x'$ è il logaritmo del prodotto $y\,y'$; si ha dunque:

$$\log(y\,y') = \log y + \log y'.$$

La medesima dimostrazione si estende ad un numero qualunque di fattori. Sieno tre numeri y, y', y'' aventi per logaritmi x, x', x''; per definizione si ha:

$$a^x = y;\ a^{x'} = y';\ a^{x''} = y''$$

e moltiplicando

$$a^{x+x'+x''} = y\,y'\,y''$$

da cui

$$\log (y\,y'\,y'') = \log y + \log y' + \log y''.$$

11. — *Il logaritmo di un quoziente è uguale al logaritmo del dividendo, meno il logaritmo del divisore.* Dividendo membro a membro le due eguaglianze

$$a^x = y; \quad a^{x'} = y' \quad \text{si ha} \quad a^{x-x'} = \frac{y}{y'}.$$

L'esponente $x - x'$ è il logaritmo del quoziente $\frac{y}{y'}$.

Dunque $$\log \frac{y}{y'} = \log y - \log y'.$$

Corollario. — Una frazione non essendo altro che il quoziente del suo numeratore per il denominatore si ha che *il logaritmo di una frazione è uguale al logaritmo del numeratore meno il logaritmo del denominatore.*

12. — *Il logaritmo della potenza di un numero è uguale al logaritmo di questo numero moltiplicato per l'esponente della potenza.*

Se si inalza all'$m.^{ma}$ potenza (m essendo un numero qualunque intero o frazionario, positivo o negativo) i due membri dell'uguaglianza $a^x = y$ si ha $a^{mx} = y^m$ dunque $\log (y^m) = m \log y$.

13. — *Il logaritmo di una radice di un numero è*

uguale al logaritmo di questo numero diviso per l'indice della radice.

Questo teorema non è che un caso particolare del teorema precedente; difatti $\sqrt[n]{y}$ si scrive $y^{\frac{1}{n}}$ e si ha

$$log \sqrt[n]{y} = \frac{log\ y}{n}.$$

14. — *Osservazione.* — In aritmetica si impara ad eseguire sei operazioni sui numeri: tre operazioni dirette e tre operazioni inverse. Le tre operazioni dirette sono: l'addizione, la moltiplicazione e l'inalzamento a potenza. Le tre operazioni inverse sono: la sottrazione, la divisione e l'estrazione di radice. La sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione; la divisione, l'operazione inversa della moltiplicazione; l'estrazione di radice, l'operazione inversa dell'inalzamento da potenza.

Vi sono così tre ordini di operazioni, comprendenti ciascuno un'operazione diretta e una operazione inversa. Le operazioni del primo ordine, addizione e sottrazione, si eseguiscono facilmente e con rapidità; quelle del secondo ordine sono già più lunghe e più difficili; infine quelle del terzo ordine, potenza e radice, sono lunghissime e complicate. Le proprietà dei logaritmi più sopra dimostrate permettono di sostituire alle operazioni del secondo e del terzo ordine quelle d'un ordine meno elevato. Così la moltiplicazione e la divisione dei numeri sono ricondotte all'addizione ed alla sottrazione dei loro logaritmi, la potenza si riduce ad una moltiplicazione, la radice ad una divisione.

Da ciò si comprende l'immensa utilità dell'impiego dei logaritmi nel calcolo numerico.

Cambiamento della base.

15. — La base d'un sistema di logaritmi è un numero positivo costante, che si può scegliere ad arbitrio. Supponiamo che si sieno calcolati i logaritmi dei numeri nel sistema avente per base a, e che si voglia calcolarli in un altro sistema a'. Indichiamo con x il logaritmo di un numero qualunque y nel primo sistema, con x' il logaritmo del medesimo numero nel secondo sistema, si avrà $a^x = y$, $a'^{x'} = y$ da cui $a^x = a'^{x'}$.

Prendiamo i logaritmi dei due membri di questa uguaglianza nel primo sistema, osservando che il logaritmo di a è l'unità, risulta :

$$x = x' \log a' \text{ da cui } x' \frac{1}{\log a'} x.$$

Da questa formola si scorge che i logaritmi degli stessi numeri nei due sistemi sono proporzionali e si ha la seguente regola: *per passare da un sistema di logaritmi ad un altro, basta moltiplicare i logaritmi del primo sistema per il reciproco del logaritmo della nuova base preso nel primo sistema.*

Logaritmi neperiani.

16. — I logaritmi sono stati inventati sul principio del XVII secolo dallo scozzese barone *Neper*, che prese per base il numero incommensurabile $e = 2{,}7182818......$; i logaritmi di questo sistema vennero chiamati logaritmi *iperbolici*, o, dal nome dell'inventore, logaritmi *neperiani*. Sono questi i logaritmi che si presentano naturalmente nell'analisi matematica; si contraddistinguono solitamente colla lettera L.

I logaritmi neperiani, però, non sono comodi nei calcoli numerici, poichè non sono in armonia col nostro sistema decadico di numerazione.

Ecco perchè *Briggs*, contemporaneo di Neper, propose di sostituire alla base e la base 10 del nostro sistema di numerazione. Sono appunto i logaritmi di Briggs di cui si fa uso in via ordinaria nei calcoli numerici; per questa ragione vennero chiamati logaritmi *volgari* od anche decadici, e si contraddistinguono col segno *log*.

Si chiama *modulo* di un sistema di logaritmi il numero costante per il quale bisogna moltiplicare i logaritmi neperiani per avere i logaritmi del sistema considerato. Sia a la base d'un sistema di logaritmi; da quanto è stato esposto precedentemente, il suo modulo M sarà $M = \frac{1}{L\,a}$ e cioè il reciproco del logaritmo neperiano della base.

Il modulo dei logaritmi volgari è

$$M = 0{,}434294{,}4819......$$

Allorchè si passa da un sistema di base a ad un sistema di base a', il moltiplicatore costante $\frac{1}{log\;a'}$ si chiama *modulo relativo* del primo sistema rispetto al secondo.

Logaritmi volgari.

17. — L'esponente che bisogna dare alla base 10 per avere i numeri 1, 10, 100, 1000,...... sono rispettivamente, 0, 1, 2, 3,......; perciò i logaritmi dei numeri 1, 10, 100, 1000... sono rispettivamente 0, 1, 2, 3...; in generale 10^n ha per logaritmo il numero intero n.

I logaritmi sono stati calcolati in decimali: la parte intera d'un logaritmo si chiama *caratteristica*, e la parte decimale *mantissa*.

È facile riconoscere che *la caratteristica del logaritmo d'un numero contiene tante unità quante sono le cifre, meno una, della parte intera del numero.* Infatti, ogni numero compreso fra 0 ed 1 non ha che una cifra nella sua parte intera; il suo logaritmo, essendo compreso fra 0 ed 1, avrà *0* per parte intera o per caratteristica. Ogni numero compreso fra 10 e 100 ha due cifre nella sua parte intera; il suo logaritmo, essendo compreso fra 1 e 2, avrà 1 per caratteristica. Analogamente, ogni numero compreso fra 100 e 1000 ha tre cifre nella sua parte intera; il suo logaritmo essendo compreso fra 2 e 3, avrà 2 per caratteristica. In generale, ogni numero compreso fra 10^n e 10^{n+1} ha $n+1$ cifre nella sua parte intera; il suo logaritmo, essendo compreso fra n ed $n+1$, avrà n per caratteristica.

18. — Il logaritmo di 10^n è n. Se si moltiplica un numero a per 10^n, si ha:

$$log\,(a \times 10^n) = log\,a + log\,10^n = log\,a + n.$$

La parte decimale o mantissa del logaritmo non cambia; la caratteristica, invece, viene aumentata di n unità.

Se si divide un numero a per 10^n, si ha:

$$log\,\frac{a}{10^n} = log\,a - log\,10^n = log\,a - n.$$

La mantissa del logaritmo non cambia; la caratteristica, invece, viene diminuita di n unità.

Così, *quando si moltiplica o quando si divide un numero per 10, 100, 1000... basta aumentare o diminuir* *la caratteristica del logaritmo di una, due, tre.... unità*. Consegue da ciò, che se due numeri decimali non differiscono che nel posto occupato dalla virgola, i loro logaritmi hanno la stessa mantissa e non differiscono che nella caratteristica.

Questa osservazione è importantissima per facilitare i calcoli, in quanto è spesso necessario trasportare la virgola nei numeri decimali.

19. — Le tavole logaritmiche in uso sono moltissime; se ne annoverano di piccole e di grandi; queste ultime sono le preferibili perchè hanno confini più larghi. Si annoverano le tavole di Lalande, di Callet, di Schrön ed altre minori. Le prime hanno 7 cifre nella mantissa, altre si limitano a 5.

Callet ha spinto le sue tavole fino al numero 108000, poichè esso è il numero dei secondi contenuti nell'angolo di 30 gradi o il terzo dell'angolo retto.

Per eseguire i calcoli coi logaritmi bisogna sapere risolvere questi due problemi: 1.° trovare il logaritmo di un numero dato; 2.° trovare il numero che corrisponde ad un logaritmo dato.

Trovare il logaritmo di un numero dato.

20. - *Trovare il logaritmo di un numero intero.* — Se il numero è nei limiti delle tavole, si trova immediatamente in esse il logaritmo domandato. Se poi il numero oltrepassa il limite delle tavole, lo si vi ricondurrà, dividendolo per una conveniente potenza di 10. Si domanda, per esempio, il logaritmo del numero 356478. Nell'intento di rendere questo numero minore di 100 000 (ammesso che 100 000 sia il limite massimo

delle tavole adoperate), lo si divide per 10, ciò che dà il numero decimale 35647,8.

La questione si riduce a cercare il logaritmo di questo numero decimale; poichè, una volta trovato questo logaritmo, aggiungendo 1 alla sua caratteristica, si avrà il logaritmo domandato

Le tavole danno il logaritmo della parte intera 35647. La differenza fra questo logaritmo e quella del numero seguente 35648, differenza che si chiama *differenza tavolare*, è 122 unità del settimo ordine decimale. Si ammette che gli aumenti del logaritmo sono sensibilmente proporzionali agli aumenti del numero, quando però si tratta di aumenti inferiori all'unità. Si dirà dunque: poichè per un aumento di una unità nel numero 35647 bisogna aggiungere 122 al logaritmo, per un aumento di 0,8 nel numero bisognerà aggiungere al logaritmo gli $\frac{8}{10}$ di 122, cioè $\frac{122 \times 8}{10}$ ossia novantotto unità di settimo ordine decimale, trascurando le unità minori.

Ma per solito nelle tavole grandi questo aumento è già calcolato; nell'ultima colonna verticale a destra si vede, sotto la differenza 122, un piccolo specchietto indicante gli aumenti del logaritmo che corrispondono a 1, 2, 3. . . . . , 9 decimi.

Così:

$$\begin{array}{ll} \mathit{log} & 35647 = 4{,}5520230 \\ \text{per} & \quad 0{,}8 \ldots\ldots\ 88 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathit{log}\ 35647{,}8 = 4{,}5520328.$$

Aggiungendo un'unità alla caratteristica si ha.

$$\mathit{log}\ 356478 = 5{,}5520328.$$

Abbiamo supposto che gli aumenti del logaritmo siano sensibilmente proporzionali agli aumenti del numero; questa proporzione non è rigorosamente esatta e ne risulta un certo errore nel calcolo dei logaritmi dei numeri decimali. Ma si dimostra che quando il numero è maggiore di 10000, l'errore, commesso non influisce sulle sette prime cifre decimali del logaritmo; si può dunque, nella pratica, considerare la proporzione come esatta.

Sia ancora da calcolare il logaritmo del numero 2543247. Dividendo per 100, si ricondurrà il numero proposto al numero decimale 25432,47. Le tavole danno il logaritmo della parte intera.

Lo specchietto delle parti proporzionali mostra che ad un aumento di 0,4 nel numero corrisponde l'aumento 68 nel logaritmo. Resta da trovare quanto bisogna aggiungere per 0,07. Si vede nello specchietto che a 0,7 corrisponde l'aumento 120; a 0,07 corrisponderà dunque un aumento 10 volte minore, cioè 12. Bisogna dunque aggiungere al logaritmo di 25,432 la somma $68 + 12 = 80$. Si ha così: $log\ 25432,47 = 4,4053885$.

Aggiungendo 2 unità alla caratteristica, si deduce:

$$log\ 2543247 = 6,4053885.$$

21. — *Trovare il logaritmo di un numero decimale* — Si chiede il logaritmo del numero decimale 35,6478. Lo si moltiplicherà per una potenza di 10, in modo che si avvicini il più possibile al limite delle tavole. Moltiplicando per 1000 si cercherà il logaritmo del numero 35647,8; poi si sottrarranno tre unità dalla caratteristica:

$$log\ 35647,8 = 4,5520328$$
$$log\ 35,6478 = 1,5520328.$$

22. — *Trovare il logaritmo d'un numero frazionario.* — Vi sono due procedimenti: il primo consiste

nel convertire il numero frazionario in numero decimale ed applicare su di esso la regola precedente; il secondo consiste nel porre il numero frazionario sotto forma di frazione ordinaria e sottrarre dal logaritmo del numeratore il logaritmo del denominatore.

Caratteristiche negative.

23. — I numeri minori dell'unità hanno logaritmi negativi; i logaritmi negativi essendo incomodi nella pratica, si è pensato di sostituire loro dei logaritmi che hanno la mantissa positiva e la loro caratteristica solamente negativa. Si chiede, per esempio, il logaritmo del numero 0,035261.

Si troverà nelle tavole il logaritmo del numero intero 35261 che è 4,5472946. Il logaritmo del numero decimale 3,5261, che non ha che una sola cifra nella sua parte intera, è 0,5472946.

Per passare da quest'ultimo numero alla frazione decimale proposta, bisogna dividere per 10^2 e quindi sottrarre due unità dal logaritmo; il logaritmo del numero decimale 0,035261 è dunque 0,5472946 — 2 che si scrive più semplicemente $\overline{2},5472946$. Sotto questa forma il logaritmo ha la sua mantissa positiva; il segno — collocato sulla caratteristica, indica che la sola caratteristica è negativa.

La caratteristica negativa del logaritmo d'un numero decimale minore dell'unità è uguale al rango della prima cifra significativa a partire dalla virgola. Infatti sia m il rango della prima cifra significativa a partire dalla virgola nel numero proposto y; il prodotto $y \times 10^m$ essendo compreso fra 1 e 10, il suo logaritmo avrà 0 per caratteristica, con una mantissa positiva; per ritornare al numero y bisogna dividere per 10^m, sottrarre cioè m dal logaritmo; il logaritmo di y avrà dunque una caratteristica negativa $\overline{m}$, seguìta da una mantissa positiva.

É assai comodo lasciare positiva la mantissa del logaritmo di un numero minore dell'unità. Infatti quando si ha da calcolare il prodotto di più fattori, gli uni maggiori, gli altri minori dell'unità, si addizioneranno le mantisse di tutti i logaritmi e si sottrarranno solamente le caratteristiche negative, la qual cosa è semplicissima.

E d'altronde è sotto questa forma che si ottengono, coll'aiuto delle tavole, i logaritmi minori dell'unità.

Abbiamo scritto il logaritmo del numero 0,035261 sotto la forma $\overline{2},5472946$ lasciando positiva la mantissa; eseguendo la sottrazioue si ha il logaritmo negativo $-1,4527054$. Se si adoperassero i logaritmi interamente negativi, bisognerebbe addizionare gli uni, sottrarre gli altri, ciò che sarebbe molto più complicato.

Trovare il numero che ammette un logaritmo dato.

24. — Trovare il numero che ha per logaritmo 4,5520332. Si cerca nelle tavole il più gran logaritmo contenuto nel logaritmo dato; esso è 4,5520230 che corrisponde al numero 35647; il numero cercato è dunque compreso fra 35647 e 35648. Il logaritmo dato supera il logaritmo di 35647 di 102 unità di settimo ordine; la differenza tavolare è 122, il che significa che se si aumentasse il logaritmo di 35647 di 122 unità dell'ultimo ordine bisognerebbe aumentare di una unità il numero 35647; ora se ammettiamo che gli aumenti del numero sieno proporzionali a quelli del logaritmo, ad un aumento di 102 del logaritmo corrisponderà un aumento del numero di $\frac{102}{122} = 0{,}83$.

Ma è più comodo servirsi dello specchietto delle parti proporzionali: questo specchietto mostra che ad un aumento di 98 nel logaritmo corrisponde l'aumento 0,8 nel numero. Resta ancora 4; all'aum nto 40 del logaritmo corrisponde l'aumento 0,3 nel numero; all'au mento 10 volte minore 4 corrisponderà dunque un aumento 0,03. Così all'aumento 102 del logaritmo corrisponde l'aumento 0,83 nel numero. Il numero cercato è dunque 35647,83 a meno di un centesimo.

25. — Servendosi di tavole grandi si porterà sempre la caratteristica del logaritmo ad essere uguale a 4, riservandosi poi di moltiplicare o di dividere il numero trovato per una potenza di 10.

Esempi:

1.° Trovare il numero che ha per logaritmo 5,5520332. Sottraggo 1 dalla caratteristica per portare il numero nei limiti delle tavole e cerco il numero che ha per logaritmo 4,5520332; esso è 35647,83. Per ritornare al numero dato, bisogna aggiungere 1 alla caratteristica e quindi moltiplicare per 10: il numero cercato è dun que 356478,3 a meno di un decimo.

2.° Trovare il numero che ha per logaritmo 1,5520332. Si aggiungeranno 3 unità alla caratteristica e si cercherà il numero che ha per logaritmo 4,5520332; è 35647,83. Per tornare al logaritmo proposto, bisogna sottrarre 3 dalla caratteristica e perciò dividere per 1000; il numero cercato è dunque 35,64783 con 5 decimali esatti.

Si riconosce che vi è un gran vantaggio ad aumentare la caratteristica in modo da operare nella parte più elevata delle tavole; se si fosse conservata la caratteristica 1, si sarebbe trovato il numero 35,65 con due decimali solamente, mentre procedendo nel modo indicato si sono ottenuti 5 decimali.

3.° Trovare il numero che ha per logaritmo $\bar{2},5520332$; cerco il numero che ha per logaritmo 0,5520332; esso è 3,564783. La caratteristica negativa $\bar{2}$ indica che bisogna dividere questo numero per 100; il numero domandato è dunque 0,03564783.

26. — *Osservazione.* — È sempre vantaggioso operare, più che si può, nella parte più elevata delle tavole, sia per avere un maggior numero di cifre, sia per ottenere una maggior approssimazione. Molte tavole non danno neanche la caratteristica del logaritmo; basta la sola mantissa. La caratteristica positiva ci avverte che nella parte intera del numero si avranno tante cifre quante sono le unità della caratteristica, più una; la caratteristica negativa, che bisogna mettere zero a sinistra della virgola, e la prima cifra significativa dovrà occupare a destra della virgola un posto uguale al valore assoluto della caratteristica stessa.

Osservazioni sull'impiego dei logaritmi.

MOLTIPLICAZIONE.

27. — Allorchè i fattori sono maggiori dell'unità, si aggiungono i loro logaritmi: in ciò nessuna difficoltà. Se taluni fattori sono minori dell'unità, i loro logaritmi

hanno le caratteristiche negative; si avrà cura di sottrarre queste caratteristiche negative.

1. Calcolare il prodotto

$$x = 875{,}6348 \times 62{,}82407.$$

Si cercheranno i logaritmi dei due fattori e si aggiungeranno, ottenendo così il logaritmo del prodotto: poi si cercherà nelle tavole il numero corrispondente;

$$\begin{aligned} log\ 875{,}6348 &= 2{,}9423230 \\ log\ 62{,}82407 &= \underline{1{,}7981261} \\ log\ x &= 4{,}7404491 \\ x &= 55010{,}95. \end{aligned}$$

2. Calcolare il prodotto

$$\begin{aligned} x &= 87{,}56348 \times 0{,}06282407 \\ log\ 87{,}56348 &= 1{,}9423230 \\ log\ 0{,}06282407 &= \underline{\bar{2}{,}7981261} \\ log\ x &= 0{,}7404491 \\ x &= 5{,}501095. \end{aligned}$$

Aggiungendo i logaritmi si trova 2 per parte intera; ma, come bisogna sottrarre 2, così resta 0.

3.° Calcolare il prodotto

$$\begin{aligned} x &= 87{,}56348 \times 0{,}006282407 \\ log\ 87{,}56348 &= 1{,}9423230 \\ log\ 0{,}006282407 &= \underline{\bar{3}{,}7981261} \\ log\ x &= \bar{1}{,}7404491 \\ x &= 0{,}5501095. \end{aligned}$$

L'addizione dei logaritmi dà 2 per parte intera; ma come bisogna sottrarre 3, si ottiene la caratteristica negativa $\bar{1}$

4. Calcolare il prodotto

$$x = 0{,}08756348 \times 0{,}006282407$$

$$\log\ 0{,}08756348 = \bar{2}{,}9423230$$

$$\log\ 0{,}006282407 - \bar{3}{,}7981261$$

$$\log\ x = \bar{4}{,}7404491$$

$$x = 0{,}0005501095.$$

L'addizione dei logaritmi dà 1 per parte intera; ma come bisogna sottrarre $\bar{2}$ e $\bar{3}$, cioè 5, si ha così la caratteristica negativa 4.

Divisione.

28. — Si sa che per eseguire una divisione bisogna sottrarre dal logaritmo del dividendo quello del divi sore. Allorquando non si ha che una semplice divisione da fare, si può procedere nel modo accennato; ma quando si ha da eseguire una serie di moltiplicazioni e di divisioni, è più comodo di avere solamente logaritmi da addizionare. A tale scopo si trasformano i logaritmi da sottrarre, in modo che le loro mantisse diventino positive.

1.° — Sia per esempio da calcolare:

$$x = \frac{236{,}39 \times 127{,}46}{564{,}87}.$$

Bisogna sottrarre il logaritmo del numero 564,87, che è 2,7519485. Si scriverà:

$$- 2{,}7519485 = - 2 - 0{,}7519485 =$$

$$= - 3 + (1 - 0{,}7519485) = - 3 + 0{,}2480515 =$$

$$= \bar{3}{,}2480515$$

Si avrà dunque:

$$\begin{aligned} \log\ 236,39 &= 2,3736291 \\ \log\ 127,46 &= 2,1053739 \\ -\log\ 564,87 &= \overline{3},2480515 \\ \hline \log\ x &= 1,7270545 \\ x &= 53,34018. \end{aligned}$$

Quando si è in tal modo resa positiva la mantissa di $-\log 564,87$ si addizionano le mantisse dei tre logaritmi; la sottrazione non ha più influenza che sulla sola caratteristica, ciò che importa una grande semplificazione.

2.° — Sia ancora da calcolare:

$$x = \frac{0,23639 \times 1,2746}{0,0056487}.$$

Bisogna dividere per il numero 0,0056487 che ha per logaritmo $\overline{3},7519485$. Si scriverà:

$$\begin{aligned} -\overline{3},7519485 &= 3 + 0,7519485 = 2 + (1 - 0,7519485) = \\ &= 2,8480515. \end{aligned}$$

Si scriverà dunque:

$$\begin{aligned} \log\ 0,23639 &= \overline{1},3736291 \\ \log\ 1,2746 &= 0,1053739 \\ -\log\ 0,0056487 &= 2,2480515 \\ \hline \log\ x &= 1,7270545 \\ x &= 53,34018. \end{aligned}$$

Poniamo attenzione a questo procedimento: *Per sottrarre un logaritmo, si aggiunge un'unità alla caratteristica, alla quale si cambia poscia il segno, e si scrive di seguito il complemento aritmetico della mantissa.*

Così, nel primo esempio, in luogo di sottrarre 2,7519485, si è aggiunto $\overline{3}$,2480515. La caratteristica 2 aumentata di una unità, poi cambiata di segno, dà $\overline{3}$; prendendo l'eccesso sulla parte decimale 7519485, si ottiene 2480515.

Nel secondo esempio, in luogo di sottrarre $\overline{3}$,7519485 si è aggiunto 2,2480515. La caratteristica $\overline{3}$, aumentata di una unità, poi cambiata di segno, dà 2.

Quanto all'eccesso dell'unità sulla mantissa del logaritmo, eccesso che si chiama il complemento aritmetico, lo si ottiene facilmente. Da 1 bisogna sottrarre 0,7519485. Ora un'unità equivale a 9 decimi e dieci centesimi; 10 centesimi equivalgono a 9 centesimi e 10 millesimi, ecc. L'unità equivale dunque a 0,999999 più 10 unità del settimo ordine. Eseguendo la sottrazione da sinistra a destra, si ha il complemento domandato:

$$\begin{array}{r} 0{,}999999^{10} \\ 0{,}7519485 \\ \hline 0{,}2480515. \end{array}$$

Così, *per avere il complemento della mantissa di un logaritmo, si sottraggono tutte le sue cifre da 9, andando da sinistra a destra, eccettuata l'ultima che si sottrae da 10.*

Con un po' d'abitudine, si legge immediatamente il complemento nella tavola, guardando il logaritmo.

POTENZE.

29. — Si sa che per inalzare un numero ad una potenza si moltiplica il suo logaritmo per l'esponente della potenza.

1.° Calcolare $x = 5^{10}$. Si cercherà innanzitutto il logaritmo di 5, e poscia si moltiplicherà questo logaritmo per 10:

$$\log 5 = 0{,}69897000$$
$$\log x = 6{,}9897000$$
$$x = 9765625.$$

2.° Calcolare $x = 0{,}4326^3$

$$\log 0{,}4326 = \overline{1}{,}6360865$$
$$\log x = \overline{2}{,}9082595$$
$$x = 0{,}08095794.$$

Moltiplicando per 3 la mantissa 0,6360865 del logaritmo, si trova 1,9082595; moltiplicando per 3 la caratteristica negativa — 1, si ha — 3; bisogna dunque sottrarre 3 dalla caratteristica del logaritmo, ciò che dà $\overline{2}{,}9082595$.

3.° Calcolare $x = \left(\frac{2}{37}\right)^5$

$$\log 2 = 0{,}30103000$$
$$\log 37 = \overline{2}{,}43179828$$
$$\log \frac{2}{37} = \overline{2}{,}73282828$$
$$\log x = \overline{7}{,}6641414$$
$$x = 0{,}0000004614678.$$

Moltiplicando per 5 la mantissa del logaritmo, si trova 3 per parte intera; la caratteristica negativa — 2, moltiplicata per 5, dà — 10; sottrando 10 della parte intera, si ottiene la caratteristica negativa $\overline{7}$.

Radici.

30. — Si ottiene la radice da un numero dividendo il suo logaritmo per l'indice della radice

1.° Calcolare $x = \sqrt[3]{478928}$

$$\begin{aligned} log\ 478928 &= 5{,}6802702 \\ log\ x &= 1{,}8934234 \\ x &= 78{,}23902. \end{aligned}$$

2.° Calcolare $x = \sqrt[3]{0{,}054327}$

$$\begin{aligned} log\ 0{,}054327 &= \overline{2}{,}7350157 \\ log\ x &= \overline{1}{,}5783386 \\ x &= 0{,}37873777. \end{aligned}$$

Nell'intento di rendere la caratteristica negativa divisibile per 3, ho sottratta ed aggiunta un'unità, e ho supposto il logaritmo scritto sotto la forma:

$$-3 + 1{,}7350157.$$

Dividendo per 3 la caratteristica e la mantissa si ha

$$-1 + 0{,}5783386 = \overline{1}{,}5783386.$$

3.° Calcolare $x = \sqrt[5]{0{,}000098763}$

$$\begin{aligned} log\ 0{,}0000098763 &= \overline{6}{,}9945943 \\ log\ x &= \overline{2}{,}9989189 \\ x &= 0{,}09975137. \end{aligned}$$

Ho supposto il logaritmo scritto sotto la forma.

$$-10 + 4{,}9945943$$

nell'intento di rendere la parte negativa divisibile per 5. Dividendo per 5 le due parti, si ha:

$$-2 + 0{,}9989189 = \overline{2}{,}9989189.$$

31. — *Osservazione.* — L'importanza dell'impiego dei logaritmi è più che mai manifesta nell'estrazione delle radici. E infatti senza i logaritmi bisognerebbe ricorrere a mezzi complicatissimi e spesso penosi per estrarre radici di indice elevato.

Osservazioni sugli aumenti dei logaritmi.

32. — Esaminando nelle tavole la colonna delle differenze, si scorge che queste differenze sono in continua diminuzione. Così, per esempio, i logaritmi dei numeri 486 e 487 differiscono fra essi di 8927 unità di settimo ordine, mentre quelli dei numeri 48624 e 48625 non differiscono più che di 89 unità dello stesso ordine. È facile spiegare la ragione di questa diminuzione. Sieno a ed $a + 1$ due numeri interi consecutivi, la differenza dei loro logaritmi è:

$$log\,(a+1) - log\,a = log\left(\frac{a+1}{a}\right) = log\left(1 + \frac{1}{a}\right);$$

ora, mano mano a aumenta, $1 + \frac{1}{a}$ diminuisce e tende verso l'unità: la differenza tavolare diminuisce quindi e tende verso zero. Se si prolungassero indefinitamente le tavole, questa differenza diventerebbe infinitamente piccola.

Diamo al numero a un aumento costante qualunque h, l'aumento del logaritmo

$$\log(a+h) - \log a = \log\left(\frac{a+h}{a}\right) = \log\left(1+\frac{h}{a}\right)$$

sarà tanto più piccolo quanto più grande sarà a.

Così, per un aumento *assoluto* dato al numero, l'aumento del logaritmo diminuisce coll'aumentare del numero. Ma se si desse al numero uno stesso aumento *relativo* (intendendo per aumento relativo il rapporto fra l'aumento assoluto e il numero stesso; un numero, per esempio, subisce un aumento relativo di $\frac{2}{1000}$, se lo si aumenta della $\frac{1}{1000}$ parte del suo valore), l'aumento del logaritmo sarebbe costante. Indicando con k l'aumento relativo, $k = \frac{h}{a}$, l'aumento del logaritmo diventa $\log(1+k)$ che è una quantità costante, se l'aumento relativo resta lo stesso.

33. — Nella ricerca dei logaritmi dei numeri si è supposto gli aumenti del logaritmo proporzionali a quelli dei numeri; questa proporzione non è esatta. Infatti, se si dà al numero a l'aumento h, il logaritmo subisce un certo aumento; se poi si dà al numero $a + h$ il medesimo aumento h, il logaritmo subisce un nuovo aumento minore del primo; così, quando l'aumento del numero diventa doppio, l'aumento del logaritmo è un poco minore del doppio; e reciprocamente, quando l'aumento del numero diventa metà, l'aumento del logaritmo è un po' più grande della metà. L'impiego della proporzione dà dunque, nel passaggio dei numeri ai logaritmi, risultati un po' troppo deboli, e nel passaggio dei logaritmi ai numeri, risultati un po' troppo forti.

Ma se si ha cura d'impiegare sempre la parte più elevata delle tavole, l'errore commesso sui logaritmi non importerà sulle unità decimali del settimo ordine; ed infatti nelle tavole grandi si vede che la stessa differenza tavolare esiste fra parecchie coppie di logaritmi consecutivi. Per esempio, dal numero 68595 al numero 69744 la differenza tavolare è la stessa. In questo intervallo, per una unità d'aumento nel numero, il logaritmo subisce l'aumento costante di 63; per due, tre, ecc. unità d'aumento nel numero, il logaritmo subisce dunque un aumento due, tre, ecc. volte più grande, e, per conseguenza, gli aumenti del numero sono proporzionali a quelli del logaritmo, almeno per il grado d'approssimazione acconsentito dalle tavole.

CAPITOLO III.

Definizione dei logaritmi per mezzo delle progressioni.

34. — Essendo date due progressioni, l'una geometrica, che comincia coll'unità, l'altra aritmetica, che comincia con zero

$$\div\!\!\div\ 1 : a : a^2 : a^3 : a^4 : \ldots\ldots,$$

$$\div\ 0 . b . 2b . 3b . 4b \ldots\ldots,$$

i termini della progressione aritmetica si chiamano i *logaritmi* dei termini corrispondenti della progressione geometrica. L'insieme di queste due progressioni costituisce ciò che si chiama un *sistema* di logaritmi.

Si ammette, in generale, che la ragione a della progressione geometrica sia maggiore dell'unità e la ragione b della progressione aritmetica positiva; in questa supposizione i termini della progressione geometrica come quelli della progressione aritmetica aumentano all'infinito.

35. — Noi abbiamo in tal modo definiti i logaritmi dei numeri che fanno parte della progressione geometrica; è facile estendere questa definizione a tutti i numeri. Imaginiamo che si inserisca un numero grandissimo di medi geometrici fra due termini consecutivi della progressione geometrica; si formerà così una nuova progressione geometrica procedente per intervalli molto più ristretti.

Se, per esempio, si inseriscono mille medi geometrici fra due termini consecutivi, la nuova progressione conterrà mille numeri fra 1 ed a, mille fra a ed a^2, ecc. Inserendo il medesimo numero di medi aritmetici fra due termini consecutivi della progressione aritmetica, si formerà una nuova progressione aritmetica, che darà esattamente i logaritmi di tutti i numeri inscritti nella nuova progressione geometrica, ed approssimativamente i logaritmi di tutti gli altri numeri.

Sia $n-1$ il numero dei medi inseriti. Indichiamo con q la ragione della nuova progressione geometrica, con r quella della nuova progressione aritmetica; si ha:

$$q = \sqrt[n]{a}\ , r = \frac{b}{n}$$

e le due nuove progressioni sono

$$\div\!\div\ 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots\ldots,$$
$$\div\ 0 . r . 2r . 3r \ldots\ldots,$$

Si vede che la ragione r della nuova progressione aritmetica è piccola quanto si vuole.

Dimostriamo che l'eccesso della ragione q della nuova progressione geometrica sull'unità può essere pure reso minore di una quantità data α, piccola quanto si vuole. Diffatti l'ineguaglianza

$$\sqrt[n]{a} < 1 + \alpha$$

sarà soddisfatta, se si ha

$$a < (1 + \alpha)^n \text{ oppure } (1 + \alpha)^n > a.$$

Ora, per quanto piccola sia α, si sa che n può essere presa abbastanza grande perchè $(1 + \alpha)^n$ superi la quantità data α. Per questo valore di n e per tutti i valori maggiori, la ragione q sarà dunque minore di $1 + \alpha$.

Sia A un numero positivo qualunque maggiore dell'unità; se questo numero appartiene alla nuova progressione geometrica, il termine corrispondente della progressione aritmetica darà esattamente il suo logaritmo. Se questo numero poi non appartiene alla progressione geometrica, sarà compreso fra due termini consecutivi q^m e q^{m+1}; ora la differenza

$$q^{m+1} - q^m = q^m (q - 1)$$

di questi due termini essendo minore di $A\,\alpha$, poichè q^m è minore di A, e $q-1$ minore di α, può essere resa tanto piccola quanto si vuole; il numero A differirà dunque da ciascuno dei due termini che lo comprendono tanto poco quanto si vorrà. Si potrà prendere approssimativamente per il logaritmo di A quello di uno di essi, cioè $m\,r$ oppure $(m+1)r$; l'errore commesso sopra questo logaritmo, essendo minore della ragione r o $\frac{b}{n}$, sarà piccolo quanto si vuole

36. — È facile riconoscere che la definizione dei logaritmi per mezzo delle progressioni coincide con quella data per mezzo della funzione esponenziale. Consideriamo le due progressioni:

$$\div\div 1 : a : a^2 : a^3 : \ldots\ldots$$

$$\div\; 0 . 1 . 2 . 3 \ldots\ldots$$

Se si inseriscono n-1 medi fra due termini consecutivi delle due progressioni, la ragione della progressione geometrica diventa $\sqrt[n]{a}$ ossia $a^{\frac{1}{n}}$, quella della progressione aritmetica $\frac{1}{n}$, in modo che le due progressioni così sviluppate diventano:

$$\div\div 1 : a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{2}{n}} : a^{\frac{3}{n}} : \ldots\ldots a^{\frac{m}{n}} : \ldots\ldots$$

$$\div\; 0 . \frac{1}{n} . \frac{2}{n} . \frac{3}{n} \ldots\ldots \frac{m}{n} \ldots\ldots$$

Sotto questa forma si riconosce che un numero qualunque $a^{\frac{m}{n}}$ della progressione geometrica ha per logaritmo l'esponente $a^{\frac{m}{n}}$ della potenza alla quale bisogna inalzare il numero costante a per avere il numero proposto:

37. — È opportuno mostrare perchè Neper ha scelto il numero incommensurabile e per base del suo sistema di logaritmi. Consideriamo le due progressioni:

$$\div\div 1 : (1 + \alpha) : (1 + \alpha)^2 : (1 + \alpha)^3 : \ldots\ldots$$

$$\div\; 0 . \quad \beta \quad . \quad 2\beta \quad . \quad 3\beta \quad \ldots\ldots$$

nelle quali α e β sono quantità piccolissime, allo scopo che i termini delle due progressioni crescano per gradi tenuissimi, e che si abbiano così i logaritmi di tutti i numeri con una grande approssimazione. Neper chiamava modulo dei logaritmi definiti con queste due progressioni il rappporto $\frac{\alpha}{\beta}$, o piuttosto il limite di questo rapporto, quando α e β tendono simultaneamente verso zero, e distingueva ciascun sistema di logaritmi col suo modulo. Gli sorse allora l'idea di adottare il sistema il cui modulo è 1, siccome quello che considerava il più semplice. Se si fa $\alpha = \beta$, le due progressioni diventano:

$$\div\div\ 1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : \ldots\ldots$$

$$\div\ 0\ .\ \alpha\ .\ 2\alpha\ .\ 3\alpha\ \ldots\ldots$$

Tali sono le due progressioni con le quali Neper definiva il suo sistema di logaritmi. Calcoliamo la base di questo sistema, cioè quel numero che ha per logaritmo l'unità; supponiamo che il termine $m\,\alpha$ della progressione aritmetica sia uguale all'unità; il termine corrispondente della progressione aritmetica è:

$$(1+\alpha)^m;\ \text{poichè}\ m\,\alpha = 1,\ \text{si ha}\ \alpha = \frac{1}{m}$$

$$\text{e}\ (1+\alpha)^m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m;$$

allorquando α tende verso zero, m aumenta indefinitamente e il numero $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ tende verso il limite e, che è la base dei logaritmi neperiani.

Logaritmi volgari.

38. — Le due progressioni con le quali si definiscono i logaritmi volgari, sono le seguenti:

$$\div\div 1 : 10 : 100 : 1000 : \ldots\ldots$$

$$\div 0 . 1 . 2 . 3 \ldots\ldots.$$

In questo sistema il logaritmo di 10 è 1, quello di 100 è 2, quello di 1000 è 3; in generale 10^n ha per logaritmo il numero intero n.

39. — Le proprietà fondamentali dei logaritmi, già dimostrate coi numeri 10, 11, 12, 13, basandosi sulle proprietà delle potenze, si dimostrano pure prendendo per definizione di logaritmi le due progressioni.

Dimostriamo ad esempio il teorema:

Il logaritmo del prodotto di più fattori è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori.

Consideriamo le due progressioni

$$\div\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots\ldots$$

$$\div 0 . r . 2r . 3r . 4r \ldots\ldots.$$

col mezzo delle quali si definiscono i logaritmi.

Osserviamo che i termini della progressione aritmetica sono i multipli successivi della ragione, e che i termini della progressione geometrica sono le potenze successive della ragione. Queste due progressioni sono disposte in modo che i termini che occupano il medesimo rango sono collocati l'uno al di sotto dell'altro si vede che nei due termini corrispondenti q^m ed $m r$

il medesimo numero m serve contemporaneamente di esponente e di moltiplicatore.

Se si moltiplicano due termini qualunque q^m e q^n della progressione geometrica, il prodotto q^{m+n} è pure un termine della progressione geometrica. Se si addizionano i loro logaritmi, cioè i due termini corrispondenti mr ed nr della progressione aritmetica, la somma $(m+n)r$ che si ottiene è pure un termine della progressione aritmetica. Ora il prodotto q^{m+n} e la somma $(m+n)r$ si corrispondono nelle due progressioni. Dunque il logaritmo del prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori.

Questo teorema si estende evidentemente ad un numero qualunque di fattori.

CAPITOLO IV.

Risoluzione delle equazioni esponenziali.

40. — Si chiama equazione esponenziale un'equazione della forma $a^x = b$ nella quale a e b sono due quantità positive note e l'esponente x l'incognita che deve soddisfare all'equazione. È facile risolvere una tale equazione coll'aiuto dei logaritmi. Prendendo i logaritmi dei due membri si ha $x \log a = \log b$ da cui

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Si ottiene così il valore dell'incognita

ESEMPI.

1.° $$7^x = 1254$$

$$x = \frac{log\ 1254}{log\ 7} = \frac{3,0982975}{0,84509804} = 3,666197.$$

2.° $$3^x = 0,462$$

$$x = \frac{log\ 0,462}{log\ 3} = -0,702878.$$

41. — Si possono risolvere anche delle equazioni esponenziali più complicate della precedente. Sia l'equazione $a^{b^x} = c$ nella quale il primo membro esprime che il numero a è stato inalzato ad una potenza indicata da b^x. Le tre lettere a, b, c esprimono numeri positivi dati. Prendendo i logaritmi dei due membri, si ha:

$$b^x\ log\ a = log\ c \text{ da cui } b^x = \frac{log\ c}{log\ a}.$$

Si è così ricondotti all'equazione esponenziale ordinaria. Perchè la questione sia possibile è necessario che i numeri a e c siano entrambi maggiori od entrambi minori di uno, affinchè il secondo membro abbia un valore positivo. Se si prendono una seconda volta i logaritmi, si ha:

$$x\ log\ b = log\ log\ c - log\ log\ a$$

da cui

$$x = \frac{log\ log\ c - log\ log\ a}{log\ b}.$$

CAPITOLO V.

Interessi composti.

42. — Solitamente gli interessi di un capitale prestato si pagano ogni anno e costituiscono una rendita; ma in certi casi si lasciano accumulare gli interessi col capitale, in modo che il capitale cresce di anno in anno. Questo si chiama *capitalizzare* gli interessi, od impiegare il capitale ad *interesse composto*, od a *moltiplico*, o col *frutto dei frutti*.

Si chiama *tassa* o *tasso* o *saggio* dell'interesse quanto rendono 100 lire in un anno; nel calcolo degli interessi composti, però, è più comodo prendere per tasso l'interesse di *una* lira per anno, interesse che, per abbreviazione, indicheremo colla lettera r. Così collocare al 5 per 100 è lo stesso che collocare a 0,05 per 1; in questo caso $r = 0{,}05$; collocare al 4,50 per 100 è la stessa cosa che collocare a 0,045 per 1; in questo caso $r = 0{,}045$.

43. — Il capitale di una lira, aumentato del suo interesse, vale, dopo un anno $1 + r$; un capitale di lire 2460 varrà 2460 volte di più, cioè $(1 + r) \times 2460$, ossia $2460\,(1 + r)$. In generale, se si rappresenta con a un capitale qualunque, il suo valore alla fine di un anno, coll'aggiunta degli interessi, sarà $a\,(1 + r)$. Così *si ottiene il valore d'un capitale dopo un anno moltiplicando questo capitale per l'unità aumentata dell'interesse di una lira.*

Così, ad esempio, il capitale di 2460 lire collocato al 5 per 100 vale alla fine di un anno

$$2460\,(1 + 0{,}05) = 2460 \times 1{,}05 = 2583.$$

Supponiamo che il capitale a sia impiegato per n anni. Dopo un anno questo capitale diventa $a\,(1 + r)$ Questo è il capitale dovuto alla fine del primo anno e che produce interesse durante il secondo anno. Per trovare quanto diventa questo capitale $a\,(1 + r)$ per l'aggiunta degli interessi del secondo anno, bisogna moltiplicarlo per $(1 + r)$, ciò che dà $a\,(1 + r)\,(1 + r) = a\,(1 + r)^2$; tale è il capitale dovuto alla fine del secondo anno e che produce interesse durante il terzo. Per trovare quanto diventa questo capitale $a\,(1 + r)^2$ per l'aggiunta degli interessi del terzo anno, bisogna moltiplicarlo per $1 + r$, ciò che dà $a\,(1 + r)^2\,(1 + r) = a\,(1 + r)^3$; tale è il capitale dovuto alla fine del terzo anno e che produce interesse durante il quarto. Lo stesso ragionamento può essere continuato all'infinito, e siccome per ogni anno che trascorre s'introduce il nuovo fattore $+ r$, il valore del capitale, dopo n anni, sarà $a\,(1 + r)^n$. Così *si ottiene il valore di un capitale, impiegato all'interesse composto per un determinato numero di anni, moltiplicando questo capitale per il valore di una lira dopo un anno, inalzato ad una potenza avente per esponente il numero degli anni.*

Se dunque si indica con A il valore del capitale dopo n anni (valore che si chiama *ammontare* o *montante*), si ha la formola generale:

$$(1) \quad A = a\,(1 + r)^n.$$

Questa formola stabilisce una relazione fra le quattro quantità rappresentate da a, A, n, r, relazione che permette di determinare il valore di una qualunque di esse, quando si conoscono le altre tre.

Si può dunque, coll'aiuto di questa relazione, risolvere le quattro seguenti questioni:

44. — *Problema 1.°* — Qual'è il montante di un capitale impiegato ad interesse composto ed al tasso r, dopo n anni?

È la questione trattata precedentemente: si calcolerà A coi logaritmi.

Esempio. — Tròvare il montante del capitale di 12540 lire impiegato all'interesse composto al 5 per 100, dopo 7 anni. Coi logaritmi abbiamo:

$$\begin{array}{rl} \log 12540 \ldots\ldots\ldots & = 4{,}0982975 \\ \log 1{,}05 - 0{,}0211893 & \\ 7 \log 1{,}05 \ldots\ldots\ldots & = 0{,}1483251 \\ \hline \log A & = 4{,}2466226 \end{array}$$

$$A = 17645{,}04.$$

45. — *Problema 2.°* — Qual'è il capitale che, impiegato ad interesse composto al tasso r, dà dopo n anni il montante A?

La formola (1) dà (2) $a = \dfrac{A}{(1+r)^n}$.

Esempio. — Qual'è il capitale che impiegato ad interesse composto al 4,75 per 100, dà, dopo 12 anni, il montante di 24600 lire?

$$\begin{array}{rl} \log 24600 \ldots\ldots\ldots & = 4{,}3909351 \\ \log 1{,}0475 = 0{,}0201540 & \\ 12 \log 1{,}0475 \ldots\ldots\ldots & = 0{,}2418480 \\ \hline \log a & = 4{,}1490871 \end{array}$$

$$a = 14095{,}70.$$

46. — *Problema 3.°* — A qual tasso bisogna impiegare un capitale a ad interesse composto, perchè dopo n anni dia il montante A?

Prendendo i logaritmi di ambo i membri dell'equazione $A = a(1 + r)^n$ si ha:

$$log\,A = log\,a + n\,log\,(1 + r)$$

da cui

$$(3)\quad log\,(1 + r) = \frac{log\,A - log\,a}{n}.$$

Calcolato il logaritmo di $1 + r$ si trova il numero corrispondente, da cui, sottratta l'unità, si ottiene r. Moltiplicando il valore di r per 100 si ha il tasso rispetto a 100 lire.

Esempio. — Trovare il tasso a cui bisogna impiegare il capitale di lire 12540 perchè in capo a 7 anni dia il montante di 17645 lire:

$$\begin{aligned} log\ 17645 &= 4{,}2466217 \\ -\ log\ 12540 &= 4{,}0982975 \\ \text{Differenza} &= 0{,}1483242 \end{aligned}$$

$$log\,(1 + r) = 0{,}1483242 : 7 = 0{,}0211892$$

$$1 + r = 1{,}05 \qquad \text{da cui } r = 05.$$

Moltiplicando per 100 avremo il tasso r' ogni 100 lire abbiano quindi 5.

47. — *Problema 4.°* — Per quanti anni bisogna tenere impiegato il capitale a ad interesse composto al tasso r perchè dia il montante A?

Prendendo i logaritmi di ambo i membri dell'equazione $A = a(1 + r)^n$ si ha:

$$log\,A = log\,a + n\,log\,(1 + r)$$

da cui

$$(4)\quad n = \frac{log\,A - log\,a}{log\,(+r)}.$$

Esempio. — Trovare per quanti anni bisogna tenere impiegato il capitale di lire 12540 ad interesse composto ed al tasso del 4,75 per 100, perchè dia il montante di lire 17645:

$$\begin{array}{r} \log\ 17645 = 4,2466217 \\ -\ \log\ 12540 = 4,0982975 \\ \hline \text{Differenza}\ 0,1483242 \\ \log\ 1,0475 = 0,0201540. \end{array}$$

Il quoziente fra questi due logaritmi è circa 7. Dunque $n = 7$.

48. — Come applicazione dell'impiego dei logaritmi, diamo qui la soluzione di due interessanti problemi:

1.° — Qual'è il montante di 1 centesimo impiegato all'interesse composto, ed al tasso del 4 per 100 dal venuta di Cristo fino a noi?

Abbiamo $a = 0,01 \qquad r = 0,04 \qquad n = 1905$

Sostituendo questi valori nella formola (1) abbiamo

$$A = 0.01 \times 1,04^{1905}$$

$$\begin{array}{r} \log\ 0,01\ \ldots\ldots\ldots = \overline{2},0000000 \\ \log\ 1,04 = 0,0170333 \\ 1905 \times \log\ 1,04\ \ldots\ldots\ldots = 32,4484365 \\ \hline \log A\ \ 30,4484365. \end{array}$$

Il numero corrispondente a questo logaritmo ha 31 cifre nella parte intera. Dividendo per 100 avremo il montante in lire che avrà 31 cifre, somma favolosa e che esce dai confini dell'umano apprezzamento.

2.° Richiesto l'inventore del giuoco degli scacchi quale fosse la sua pretesa per la geniale scoperta, così rispose:

— Mi darete per la prima casella della scacchiera un centesimo e me lo raddoppierete tante volte quante sono le caselle.

Calcolare a quanto ammontava la somma richiesta.

Per la prima casella compete all'inventore degli scacchi, 1 centesimo, per la seconda 2, per la terza 4 ossia 2^2, per la quarta 8, ossia 2^3, per la quinta 16, ossia 2^4 per la sessantaquattresima, poichè tante sono le caselle della scacchiera, 2^{63}. Complessivamente al detto inventore compete una somma S in centesimi uguale a

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots\ldots\ldots + 2^{63}.$$

È questa una progressione geometrica finita, il cui primo termine è 1 e l'ultimo 2^{63}, e la ragione è 2. Si ottiene la somma dei termini di una progressione geometrica sottraendo il primo termine dall'ultimo, moltiplicato per la ragione e dividendo la differenza per la ragione diminuita di una unità.

Si ha dunque:

$$S = \frac{2^{63} \times 2 - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1.$$

Calcoleremo coi logaritmi il valore di 2^{64}:

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$64 \log 2 = 19{,}2659200.$$

Il numero corrispondente e cioè il valore 2^{64}, è un numero di 20 cifre, esprimente centesimi. Ridotto in lire avrà 18 cifre, valore inestimabile.

Annualità.

49. — Se anno per anno s'impiega uno stesso capitale a, detto *annualità*, e, se si lasciano successivamente fruttare queste annualità, si otterrà in capo ad

n anni un montante A, che ci proponiamo di calcolare La prima annualità, restando impiegata n anni, darà coi suoi interessi composti, il montante $a(1+r)^n$. La seconda annualità, quella cioè versata in principio del secondo anno, rimanendo impiegata un anno di meno, cioè $n-1$ anni darà il montante $a(1+r)^{n-1}$. La terza annualità alla fine di n anni ammonterà ad $a(1+r)^{n-2}$, ecc. L'ultima annualità, restando impiegata un sol anno, darà $a(1+r)$.

In capo ad n anni si sarà accumulata la somma dei termini della seguente progressione geometrica:

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \\ + \ldots\ldots + a(1+r)$$

e raccogliendo il fattore comune a si ha:

$$A = a\,\{(1+r) + (1+r)^2 + \ldots\ldots + \\ + (1+r)^{n-1} + (1+r)^n\}$$

avendo invertito l'ordine dei termini.

La somma dei termini della progressione geometrica racchiusa fra parentesi, è:

$$S = \frac{(1+r)^n(1+r)-(1+r)}{1+r-1} = \frac{(1+r)^{n+1}-(1+r)}{r} = \\ = \frac{(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$$

ove, s'intende, la ragione è $1+r$. Pertanto il montare di queste annualità cogli interessi capitalizzati è

$$A = a \times \frac{(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}.$$

Questa formola non è direttamente calcolabile coi logaritmi, nullameno si potrà calcolare a parte il valore di $(1+r)^n$.

Esempio. — Qual'è il montante dell'annualità di 500 lire per 10 anni al tasso del 4 per 100?

Poniamo:

$$a = 500 \quad , \quad (1 + r) = 1{,}04 \quad , \quad r = 0{,}04 \quad , \quad n = 10$$

Avremo:

$$A = 500 \times \frac{1{,}04\,(1{,}04^{10} - 1)}{0{,}04}.$$

Calcoliamo a parte $1{,}04^{10}$:

$$\begin{aligned} \log\ 1{,}04 &= 0{,}0170333 \\ 10\ \log\ 1{,}04 &= 0{,}1703330 \\ 1{,}04^{10} &= 1{,}4802 \end{aligned}$$

Sostituendo:

$$A = 500 \times \frac{1{,}04 \times 0{,}4802}{0{,}04} = 7203.$$

Calcolo del numero « e ».

50. — Consideriamo la serie indefinita:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

I due primi termini danno una somma uguale a 2. I termini seguenti sono rispettivamente minori dei termini della progressione geometrica

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots$$

che si ottengono sostituendo a ciascuno dei fattori 3, 4, 5.... il fattore minore 2, la quale sostituzione aumenta le frazioni; questa serie essendo manifestamente convergente, la prima lo sarà a maggior ragione. La somma dei primi n termini, astrazione fatta dei primi due' tende verso un limite minore del limite della somma dei termini della progressione, minore cioè dell'unità. La somma totale dunque tende verso un limite compreso fra 2 e 3.

Questo limite è un numero incommensurabile.

Supponiamo infatti che esso sia uguale ad una frazione ordinaria $\frac{m}{n}$, si avrebbe:

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Se noi scriviamo innanzitutto i primi $n+1$ termini e se poniamo i seguenti sotto la forma:

$$\frac{1}{1.2.3.\ldots n}\left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots\right\}$$

avremo:

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{1}{1.2.\ldots n} +$$
$$+ \frac{1}{1.2.\ldots n}\left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots\right\}$$

Moltiplichiamo tutti i termini dell'uguaglianza per il prodotto $1.\ 2.\ 3.\ldots n$, il primo membro diventa un numero intero $1.\ 2.\ 3.\ldots\ (n-1)m$; i primi $n+1$ termini del secondo membro diventano pure numeri interi, la somma dei quali, per abbreviazione, indicheremo con N; si ottiene in tal modo l'uguaglianza:

$$1.2.\ldots\ldots(n-1)\,m = N + \left\{\frac{1}{n+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right\}$$

La quantità fra parentesi è una frazione minore dell'unità, poichè i suoi termini sono rispettivamente minori di quelli della progressione

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots\ldots$$

che si ottiene sostituendo a ciascuno dei fattori $n + 2$, $n + 3, \ldots\ldots$ il fattore minore $n + 1$, ciò che aumenta le frazioni; il limite della somma dei termini di questa progressione essendo $\frac{1}{n}$, la quantità fra parentesi è minore di $\frac{1}{n}$; è dunque una frazione nel vero senso della parola.

Si avrebbe dunque nell'uguaglianza precedente un numero intero uguale ad un numero frazionario, la qual cosa è impossibile. Così il limite verso il quale tende la somma dei termini della serie proposta è un numero incommensurabile compreso fra 2 e 3. Questo numero ha una grande importanza nella matematica; lo si indica colla lettera e.

51. — Indichiamo con R il resto della serie, ossia l'errore commesso prendendo solamente i primi $n + 1$ termini:

$$R = \frac{1}{1,2.\ldots.n} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots\ldots \right\}$$

La quantità fra parentesi, da quanto si è detto, essendo minore di $\frac{1}{n}$, si ha:

$$R < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1.2.3.\ldots n}.$$

Quindi se si prendono $n + 1$ termini, è minore della $n.^{ma}$ parte dell'ultimo termine calcolato.

Ecco il calcolo del numero e con otto cifre decimali:

$$
\begin{array}{rl}
 & 2 \\
= & 0{,}5 \\
= & 0{,}1666\ 6667 \\
= & 0.0416\ 6667 \\
= & 0{,}0083\ 3333 \\
= & 0{,}0013\ 8889 \\
= & 0{,}0001\ 9841 \\
= & 0{,}0000\ 2480 \\
= & 0{,}0000\ 0276 \\
= & 0{,}0000\ 0028 \\
= & 0{,}0000\ 0003 \\
\hline
 & 2{,}7182\ 8124
\end{array}
$$

52. — Si è detto al N. 50 che il limite della somma dei termini della progressione indefinita

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots\ldots\ldots$$

è $\frac{1}{n}$. Vogliamo provarlo. La ragione di questa progressione è $\frac{1}{n+1}$. Noi sappiamo che la somma dei termini d'una progressione geometrica divergente è $\frac{a\,r^n - a}{r-1}$ ove a è il primo termine, r la ragione, n il numero dei termini; sarà $a\,r^{n-1}$ l'ultimo termine ed $a\,r^n$, l'ultimo termine moltiplicato per la ragione. Se la progressione è convergente, cioè se i suoi termini vanno diminuendo, detta somma sarà:

$$S = \frac{a - a\,r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a\,r^n}{1-r}.$$

Se si prende un numero di termini sempre più grande, la ragione r essendo in valore assoluto minore dell'unità, il termine $a\,r^n$ della progressione convergente diminuisce di più in più e tende verso zero quando n aumenta indefinitamente. Nello stesso tempo tende pure verso zero la quantità $\frac{a\,r^n}{1-r}$; dunque la somma dei termini si avvicina indefinitamente alla quantità fissa $\frac{a}{1-r}$ da differirne tanto poco quanto si vuole. In una parola, la somma dei termini tende verso il limite $\frac{a}{1-r}$.

Nella nostra progressione abbiamo:

$$a = \frac{1}{n+1} \quad \text{ed} \quad r = \frac{1}{n+1}.$$

Sostituendo avremo per limite della somma:

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{1} = \frac{1}{n}.$$

Calcolo dei logaritmi neperiani.

53. — Dalla teorica delle serie s'impara che la funzione $L\,(1+x)$ si sviluppa in

$$(1)\ L\,(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots$$

ove L è il simbolo dei logaritmi neperiani ed x un numero qualunque.

Questa serie è convergente per i valori di x compresi fra -1 esclusivamente e $+1$ inclusivamente.

54. — Dalla serie precedente si deducono delle serie, che servono al calcolo delle tavole dei logaritmi. Cerchiamo la differenza fra i logaritmi di due numeri interi consecutivi n ed $n+1$.

Poichè

$$L(n+1) - Ln = L\frac{n+1}{n} = L\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

se nella serie (1) si sostituisce ad x la frazione $\frac{1}{n}$ si ha:

$$(2) \quad L(n+1) - Ln = \frac{1}{n} - \frac{1}{2.\ n^2} + \frac{1}{3.\ n^3} - \cdots\cdots$$

Ma questa serie non converge abbastanza rapidamente e quindi bisognerebbe prendere un numero grandissimo di termini per avere i logaritmi con una certa approssimazione.

Si giunge ad una serie molto più rapidamente convergente nel modo seguente: se si sottrae l'una dall'altra le due serie

$$L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots$$

$$L(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots\cdots$$

i termini di grado pari si distruggono, quelli di grado impari s'aggiungono, e si ha:

$$L(1+x) - L(1-x) = L\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\cdots\right)$$

Poniamo ora

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$$

da cui

$$x=\frac{1}{2n+1}$$

e sostituendo ad x il suo valore, otterremo la serie

$$(3)\qquad L\frac{n+1}{n}=L(n+1)-Ln=$$
$$=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\cdots\right]$$

che converge tanto più rapidamente quanto più il numero n è grande.

55. — È coll'aiuto della serie (3) che si calcolano i logaritmi neperiani.

Facendo in questa serie $n=1$, si ha:

$$L\,2=\frac{2}{3}+\frac{2}{3.3^3}+\frac{2}{5.3^5}+\frac{2}{7.3^7}+\cdots\cdots$$

Si comincerà a ridurre in decimali le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3^3}$, $\frac{2}{3^5}$, $\frac{2}{3^7}$, ..., dividendo successivamente per 9; poi si divideranno per i numeri impari 1, 3, 5, 7,....

I dieci primi termini danno, con dieci cifre decimali esatte:

$$L\,2=0{,}6931471806.$$

Se nella serie (3) si pone $n=2$, si ha

$$L\,3-L\,2=\frac{2}{5}+\frac{2}{3.5^3}+\frac{2}{5.5^5}$$

e si abbreviano i calcoli osservando che dividere per 25 equivale dividere per 100 e moltiplicare per 4. I primi sette termini danno con dieci cifre decimali esatte:

$$L\ 3 = 1{,}0986122787.$$

Si ottiene $L\ 4$ raddoppiando $L\ 2$:

$$L\ 4 = 1{,}3862936612.$$

Si calcola poi $L\ 5$ colla serie

$$L\ 5 - L\ 4 = \frac{2}{9} + \frac{2}{3.9^3} + \frac{2}{5.9^5} + \cdots\cdots$$

e si ottengono le frazioni $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{9^3}$, $\frac{2}{9^5}$, ……… dividendo per 3 le frazioni già calcolate $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3^5}$, $\frac{2}{3^9}$ …. i primi cinque termini danno con dieci cifre decimali esatte: $L\ 5 = 1{,}6094379124.$

Si otterrà $L\ 6$ aggiungendo $L\ 3$ a $L\ 2$.

Si calcola $L\ 7$ colla solita serie ponendo $n = 6$, e così di seguito all'infinito.

Calcoli dei logaritmi volgari.

56. — Per calcolare i logaritmi volgari bisogna innanzitutto cercare il modulo. A tale scopo si calcola il logaritmo neperiano di 2 coll'aiuto delle serie

$$L\ 2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3.3^3} + \frac{2}{5.3^5} + \frac{2}{7.3^7} + \cdots\cdots$$

come è stato spiegato nel numero precedente, e si ha:

$$L\ 2 = 0{,}6931471806.$$

Raddoppiando questo logaritmo si ottiene il logaritmo neperiano di 4:

$$L\,4 = 1{,}3862943612:$$

Si determina quindi il logaritmo neperiano di 5 colla serie

$$L\,5 - L\,4 = \frac{2}{9} + \frac{2}{3.9^2} + \frac{2}{5.9^5} + \cdots\cdots$$

notando come queste nuove frazioni si deducono da quelle che hanno servito per il calcolo di $L\,2$, come già è stato spiegato. Avuti i $L\,2$ e $L\,5$, l'addizione di questi due logaritmi dà:

$$L\,10 = 2{,}3025850930.$$

Si sa che il modulo M dei logaritmi volgari è uguale a $\frac{1}{L\,10}$; dividendo 1 per $L\,10$ si avrà il valore di questo modulo:

$$M = 0{,}4342944819$$

e raddoppiato si ha:

$$2\,M = 0{,}8685889638.$$

Si ottengono i logaritmi volgari moltiplicando i logaritmi neperiani per il modulo.

La serie (3) diventa così:

$$(4)\qquad log\,(n+1) - log\,n = $$
$$= 2\,M\left[\frac{1}{2\,n+1} + \frac{1}{3\,(2\,n+1)^3} + \frac{1}{5\,(2\,n+1)^5} + \cdots\cdots\right]$$

È appunto questa serie che si adopera per calcolare i logaritmi volgari scrivendola sotto la forma:

$$log\,(n+1) - log\,n = \frac{2\,M}{2n+1} + \frac{2\,M}{3\,(2\,n+1)^3} + $$
$$+ \frac{2\,M}{5\,(2\,n+1)^5} + \cdots\cdots$$

Si otterrà il logaritmo volgare di 2 moltiplicando per M il logaritmo neperiano di 2, che ha servito a determinare il modulo. Si calcolerà *log* 3 colla serie

$$log\ 3 - log\ 2 = \frac{2\,M}{5} + \frac{2\,M}{3.5^3} + \frac{2\,M}{5.5^5} + \cdots\cdots$$

Si calcoleranno dapprima le frazioni $\frac{2\,M}{5}$, $\frac{2\,M}{5^3}$, $\frac{2\,M}{5^5}$ $\cdots\cdots$, dividendo successivamente per 25, o più semplicemente moltiplicando per 4 e dividendo per 100; si divideranno queste frazioni rispettivamente per 1, 3, 5,...; addizionando poi i risultati si avrà *log* 3. Si otterrà *log* 4 raddoppiando *log* 2. Si otterrà *log* 5 moltiplicando per M il logaritmo neperiano di 5 che ha servito a calcolare il modulo.

Si troverà *log* 6 aggiungendo *log* 2 e *log* 3. Si calcolerà *log* 7 colla serie

$$log\ 7 - log\ 6 = \frac{2\,M}{13} + \frac{2\,M}{3.13^3} + \frac{2\,M}{5.13^5} + \cdots\cdots$$

Si avra *log* 8 aggiungendo *log* 4, *log* 2, *log* 9 e raddoppiando *log* 3; si sa poi che *log* 10 = 1. Si calcolerà log 11 colla solita serie e così di seguito indefinitamente.

La serie (4) convergendo tanto più rapidamente quanto più c'inoltriamo nella successione dei numeri interi, i calcoli diventeranno subito facilissimi. Si avrà, ad esempio, il logaritmo di 101 con otto cifre decimali esatte col mezzo di due soli termini:

$$log\ 101 - 2 = \frac{2\,M}{201} + \frac{2\,M}{3.201^3}.$$

Si calcolerà dapprima il primo termine dividendo il numero cognito 2 M per 201; poi si dedurrà il secondo termine dal primo dividendo questo per 3.201^3, cioè per 121203.

Il primo termine della serie basterà per il logaritmo di 1001:

$$log\ 1001 - 3 = \frac{2\ M}{2001}$$

e a più forte ragione al di là di questo limite.

57. — È così che si procede per calcolare le tavole dei logaritmi dei numeri interi. Per avere il logaritmo d'un numero frazionario $n + h$ compreso, sia entro 1000 e 10000, sia entro 10000 e 100000, si cerca nelle tavole il logaritmo della parte intera 12 e vi si aggiunge la differenza tavolare

$$\Delta = log\ (n + 1) - log\ n$$

moltiplicata per la frazione h.

L'accrescimento reale del logaritmo è:

$$s = log\ (n + h) - log\ n = \frac{n + h}{n} = log\left(1 + \frac{h}{n}\right);$$

la proporzione dà l'accrescimento approssimato:

$$h\ \Delta = h\ log\frac{n + 1}{n} = h\ log\left(1 + \frac{1}{n}\right);$$

l'errore commesso è:

$$s - h\ \Delta = log\left(1 + \frac{h}{n}\right) - h\ log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Cenni sulle tavole delle funzioni circolari.

58. — Si riconosce facilmente che una funzione circolare di x, per esempio $sen\ x$, e l'arco stesso x non possono essere legati da una equazione algebrica intera comprendente tutti i valori della variabile x. Infatti se le quantità x e $sen\ x$ soddisfacessero ad una equazione

algebrica intera di grado m rispetto ad x, a ciascun valore di *sne* x corrisponderebbero le m radici dell'equazione e quindi m valori di x; ma si sa che a ciascun valore di *sen* x corrisponde un numero infinito di valori di x. Si dimostra pure che una tale relazione è impossibile anche per i valori della variabile x compresi entro certi limiti; così le funzioni circolari sono funzioni *trascendentali* dell'arco, ed è impossibile calcolare con un numero limitato di operazioni elementari i loro valori per valori qualunque della variabile.

E dunque necessario costruire delle tavole analoghe a quelle dei logaritmi, tavole che contengano i valori che prende la funzione per valori della variabile x convenientemente scelti. Ed allorchè si darà alla variabile un valore che non si trova nelle tavole, si considereranno i due valori consecutivi che lo comprendono e si interpolerà come per i logaritmi, e cioè si ammetterà che nell'intervallo le variazioni della funzione sieno proporzionali a quelle della variabile.

Nella costruzione delle tavole si considera l'arco come la variabile indipendente, e gli si dà una serie di valori in progressione aritmetica da o a $\frac{\pi}{2}$. È inutile prolungare la tavola al di là, poichè per le note formole di trigonometria si può sempre ricondurre l'arco fra i limiti o e $\frac{\pi}{2}$. Se poi si costruisce simultaneamente una tavola di seni e una tavola di coseni, possiamo arrestarci a $\frac{\pi}{4}$, poichè il seno di un arco maggiore di $\frac{\pi}{4}$ è eguale al coseno dell'arco complementare, che è minore di $\frac{\pi}{4}$. Altrettanto dicasi delle tangenti e cotangenti, secanti e cosecanti.

Costruzione delle tavole.

59. — Supponiamo che si vogliano calcolare i seni ed i coseni degli archi di 10 secondi in 10 secondi da 0 a 90^0. Bigogna innanzitutto calcolare il valore di *sen* $10''$ e quello di *cos* $10''$ con una certa approssimazione.

La differenza del seno dell'arco piccolissimō di $10''$ all'arco stesso essendo una quantità relativamente piccolissima, prenderemo la lunghezza dell'arco di $10''$ per valore approssimato di *sen* $10''$; l'errore commesso sarà mincre del quarto del cubo dell'arco. Calcoliamo questo rrore.

La semicirconferenza contenendo 64800 volte l'arco di $10''$, la lunghezza dell'arco di $10''$ che indicheremo con α è:

$$\alpha = \frac{\pi}{64800}.$$

Prendendo per π il valore troppo grande 3,2 si ha:

$$\alpha < 0{,}00005$$

e quindi

$$\frac{\alpha^3}{4} < 0{,}00000 \quad 00000 \quad 0004.$$

L'errore non infiuendo che sulla quattordicesima cifra decimale, avremo *sen* $10''$ con tredici cifre decimali esatte. Se si divide

$$\pi = 3{,}14159,\ 26535,\ 89793,\ 23846......$$

si trova che il quoziente è uguale a

$$0{,}00004,\ 84813,\ 681$$

più una frazione complementare minore di una mezza unità del tredicesimo ordine decimale; se si prende

$$0{,}00004,\ 84813,\ 681$$

per valore approssimato di *sen* 10″, si commetterà un errore uguale alla differenza di queste due frazioni, e quindi minore di una mezza unità del tredicesimo ordine decimale.

Calcoliamo ora *cos* 10″ Prenderemo per valore approssimato di *cos* 10″ la quantità $1 - \frac{\alpha^2}{2}$ e l'errore commesso sarà minore di $\frac{\alpha^4}{16}$ e quindi minore di $\frac{4}{10^{19}}$; si avrà dunque *cos* 10″ con diciotto cifre decimali esatte. Facendo i calcoli si trova:

$$\alpha = 0{,}00004,\ 84813,\ 68110,\ 953$$
$$\alpha^2 = 0{,}00000,\ 00023,\ 50443,\ 053$$

$$\frac{\alpha^2}{2} = 0{,}00000,\ 00011,\ 75221,\ 526$$

per difetto con dieciotto cifre decimali esatte; se ne deduce

$$1 - \frac{\alpha^2}{2} = 0{,}99999,\ 99988,\ 24778,\ 474$$

per eccesso con un errore minore di una unità di dieciottesimo ordine decimale; per avere il coseno dell'arco di 10″ bisognerebbe aggiungervi una frazione minore di una unità di dieciottesimo ordine decimale; se si prende per valore approssimato di *cos* 10″ il numero precedente, l'errore, che è la differenza dei due errori, sarà minore di una unità del dieciottesimo ordine.

60. — Una volta conosciuti il seno e il coseno del primo termine della progressione aritmetica, le regole dell'addizione degli archi permettono di calcolare successivamente i seni ed i coseni di tutti i termini della progressione.

Indicando con q la quantità conosciuta $2 \cos 10''$ si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 20'' &= q \operatorname{sen} 10'' \\ \operatorname{sen} 30'' &= q \operatorname{sen} 20'' - \operatorname{sen} 10'' \\ \operatorname{sen} 40'' &= q \operatorname{sen} 30'' - \operatorname{sen} 20'' \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si ha pure:

$$\begin{aligned} \cos 20'' &= q \cos 10'' - 1 \\ \cos 30'' &= q \cos 20'' - \cos 10'' \\ \cos 40'' &= q \cos 30'' - \cos 20'' \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si possono abbreviare i calcoli osservando che la quantità q differisce pochissimo dal numero 2, e ponendo $q = 2 - p$ le formole diventano:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 20'' - \operatorname{sen} 10'' &= \operatorname{sen} 10'' - p \operatorname{sen} 10'' \\ \operatorname{sen} 30'' - \operatorname{sen} 20'' &= (\operatorname{sen} 20'' - \operatorname{sen} 10'') - p \operatorname{sen} 20'' \\ \operatorname{sen} 40'' - \operatorname{sen} 30'' &= (\operatorname{sen} 30'' - \operatorname{sen} 20'') - p \operatorname{sen} 30'' \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

E poichè si è preso approssimativamente

$\cos 10'' = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ si ha $p = 2 - 2 \cos 10'' = \alpha^2$.

Così la lettera p esprime la quantità piccolissima α^2 calcolata precedentemente, e si ha:

$$p = 0{,}00000,\ 00023,\ 504.$$

Si calcolerà dapprima il prodotto $p \operatorname{sen} 10''$ che si sottrarrà da $\operatorname{sen} 10''$ e si otterrà la differenza $\operatorname{sen} 20'' - \operatorname{sen} 10''$; aggiungendo questa differenza a $\operatorname{sen} 10''$ si avrà $\operatorname{sen} 20''$. Si moltiplicherà per $\operatorname{sen} 20''$ per p e si sottrarrà il prodotto da $\operatorname{sen} 20'' - \operatorname{sen} 10''$, ciò che sarà la differenza seguente *sen* 30″ — *sen* 20″; aggiungendo questa differenza a *sen* 20 si avrà *sen* 30″ e così di seguito volta in volta. Le otto prime cifre decimali del numero p essendo degli zeri, non vi sono che cinque prodotti parziali a calcolare in ciascuna moltiplicazione. la qual cosa abbrevia molto i calcoli; moltiplicando invece per il numero q vi sarebbero da effettuare quattordici prodotti parziali.

61. -- Siccome la più gran parte dei calcoli si fa per logaritmi, si sono costruite delle tavole contenenti non già i valori stessi delle funzioni circolari, bensì quelle dei loro logaritmi. Si dedurranno queste nuove tavole dalle precedenti, servendosi delle tavole ordinarie dei logaritmi dei numeri interi.

Costruite le tavole dei logaritmi dei seni e dei coseni, si dedurranno quelle dei logaritmi delle tangenti e delle cotangenti dalle relazioni note:

$$tang\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}, \quad cos\,x = \frac{cos\,x}{sen\,x}$$

da cui

$$log\ tang\,x = log\ sen\,x - log\ cos\,x$$
$$log\ cot\,x = log\ cos\,x - log\ sen\,x.$$

È inutile introdurre nelle tavole i logaritmi delle secanti e delle cosecanti, poichè in virtù delle relazioni

$$sec\,x = \frac{1}{cos\,x}, \quad cosec\,x = \frac{1}{sen\,x}$$

si ha:

$$log\ sec\,x = -\,log\ cos\,x, \quad log\ cosec\,x = -\,log\ sen\,x.$$