PROPAGANDA D'ISTRUZIONE

BIBLIOTECA DEL POPOLO

CENTESIMI 80 IL VOLUME

TIBERIO FERROLLI

Geometria non-euclidea

OGNI VOLUME 80 CENTESIMI

Ogni volumetto consta di 64 pagine di fitta composizione e contiene un completo trattatello elementare di scienza pratica, di cognizioni utili ed indispensabili, dettato in forma popolare, succinta, chiara, alla portata di ogni intelligenza.

CASA EDITRICE SONZOGNO
della Società Anonima ALBERTO MATARELLI
Via Pasquirolo, 14 - MILANO

BATTAGLINI

VOLUME 590

Edizione precedente 1934-XII

Ristampa stereotipa finita il 30 settembre 1940-XVIII

Stabilimento Grafico Matarelli della Soc. An. ALBERTO MATARELLI
Milano - Via Passarella N. 15 - *Imprimé en Italie.* e-40-c

AVVERTENZA

In questo lavoro sono esposti lo sviluppo storico e critico della geometria non-euclidea e le proprietà caratteristiche di essa.

A svolgere l'argomento si può giungere per due vie: o coll'esporre a priori i principî di una geometria indipendente dalla verità o dalla falsità del postulato euclideo sulle parallele, o col mostrare la possibilità dell'esistenza logica di una geometria fondata sulla ipotesi della falsità del postulato stesso.

Noi abbiamo seguito, per gran parte, quest'ultima, perchè l'argomento riesce più facile a trattarsi elementarmente, e anche perchè viene messo in miglior luce lo svolgimento storico della nuova geometria.

Per questa pubblicazione ci siamo valsi principalmente delle eccellenti opere del Bonola e del Barbarin, e di altri lavori sparsi quà e là nelle varie riviste di scienze e di storia delle matematiche.

GEOMETRIA NON-EUCLIDEA

CAPITOLO I.

Il postulato euclideo.

1. — Per *geometria non-euclidea* s' intende quella che respinge alcuni dei principî fondamentali sui quali si basa la geometria ordinaria od euclidea, o è da essi indipendente.

La distinzione delle due geometrie porterebbe la discussione in un campo che non è solamente matematico, ma piuttosto filosofico; perchè dalla critica di certe proposizioni cardinali della geometria ordinaria si risale, in ultima analisi, alla natura delle forme geometriche e in generale a quella dello spazio.

Mentre la geometria ordinaria espone i suoi assiomi e postulati con l'affermazione di caratteristiche che si accordano per la maggior parte con l'esperienza dei nostri sensi e con l'intuizione comune, la geometria non-euclidea cerca di liberarsi da questo empirismo per fondare su principî più generali e più vasti una nuova dottrina. Sotto questo aspetto, la geometria non-euclidea, sebbene porti talvolta a conseguenze che ripugnano ai nostri sensi o che possono sembrare paradossali, non ha un valore scientifico minore che la prima.

2. — *Il postulato delle parallele*. - Il punto su cui cadde la discussione e la critica dei varî geometri, fin da quelli che seguirono Euclide (330-275 a. C.) è

il significato di parallele quale è inteso dal geometra greco e, in particolare, il *quinto postulato* del primo libro degli *Elementi*.

Euclide chiama parallele: *due rette poste nello stesso piano, che prolungate comunque non s'incontrano.* I diversi teoremi sulle parallele si basano per la maggior parte sul quinto postulato che è il seguente:

Se una linea retta, cadendo sopra due altre, fa gli angoli interni da una medesima parte, in modo che la loro somma sia minore di due retti, quelle due rette, prolungate da questa parte, s'incontrano.

Le conseguenze più notevoli che da questa proposizione derivano sono:

La possibilità di condurre da un punto dato una sola parallela a una retta data;

L'equidistanza di due rette parallele;

Il teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo;

Le proprietà delle figure simili.

Fu appunto la critica del famoso postulato ora enunciato che diede origine, sebbene non immediata, alla nuova geometria. Ma prima di trattare di queste nuove teorie, dobbiamo parlare di quei geometri che con le loro ricerche dettero impulso alla scoperta della nuova dottrina. Distingueremo pertanto in tre gruppi gli autori che dovremo ricordare nel presente studio.

1° gruppo. - *Comentatori e traduttori di Euclide* (dal I secolo a. C. al XVII secolo).

2° gruppo. - *Precursori della geometria non-euclidea* (dal secolo XVII al secolo XIX).

3° gruppo. - *Fondatori della geometria non-euclidea* (secolo XIX in poi).

I primi cercano una dimostrazione del quinto postulato; quelli del secondo gruppo discutono e dubitano sulla verità del postulato stesso; gli ultimi, sull'ipotesi della falsità di esso, o indipendente da esso, fondano la nuova geometria.

3. — *Il dubbio sull'evidenza del quinto postulato.* - Anche i più antichi comentatori degli *Elementi* di Euclide non ritennero abbastanza evidente il quinto postulato, sì da accettarlo senza dimostrazione; essi perciò idearono di dedurlo come conseguenza da altre proposizioni, o cercarono di esprimere la questione diversamente.

Dobbiamo però avvertire che le dimostrazioni di questi geometri sono per la maggior parte artificiose, quando non siano addirittura errate; le migliori poi non persuadono.

Una questione assai importante ci si presenta: come mai è potuto sorgere il dubbio sulla verità del quinto postulato?

Certo, per noi, avvezzi da secoli a servirci unicamente della geometria ordinaria, e come scopo di ricerche teoriche e come mezzo nei bisogni della pratica, tale dubbio non è del tutto spontaneo, perchè oramai alcune delle proprietà, anche meno evidenti, della geometria euclidea, sono, per il fatto dell'ereditarietà psichica, insite nella nostra mente come idee aprioristiche e fondamentali. Ma non dovè essere la stessa cosa per i filosofi greci posteriori a Euclide, che, avvezzi a sottilizzare e magari a sofisticare sulle questioni della filosofia, non potevano accettare a priori, senza discutere, i principî di una scienza che si pretendeva rigorosamente e assolutamente vera, quale la geometria appare negli *Elementi* di Euclide.

Ed invero i primi a dubitare della verità dell'enunciato euclideo sono, come abbiamo detto, di poco, relativamente, posteriori al geometra greco; e perciò in essi il dubbio sorse necessariamente spontaneo; mentre quelli che seguirono, trattarono la questione più per sfoggio deduttivo e logico, che per intima convinzione della falsità del postulato.

Un esempio chiarissimo lo abbiamo dal matematico tedesco TAURINUS (principio sec. XIX), il quale, pur essendo intuitivamente convinto, come dichiarò egli stesso, della verità del postulato sulle parallele, riuscì

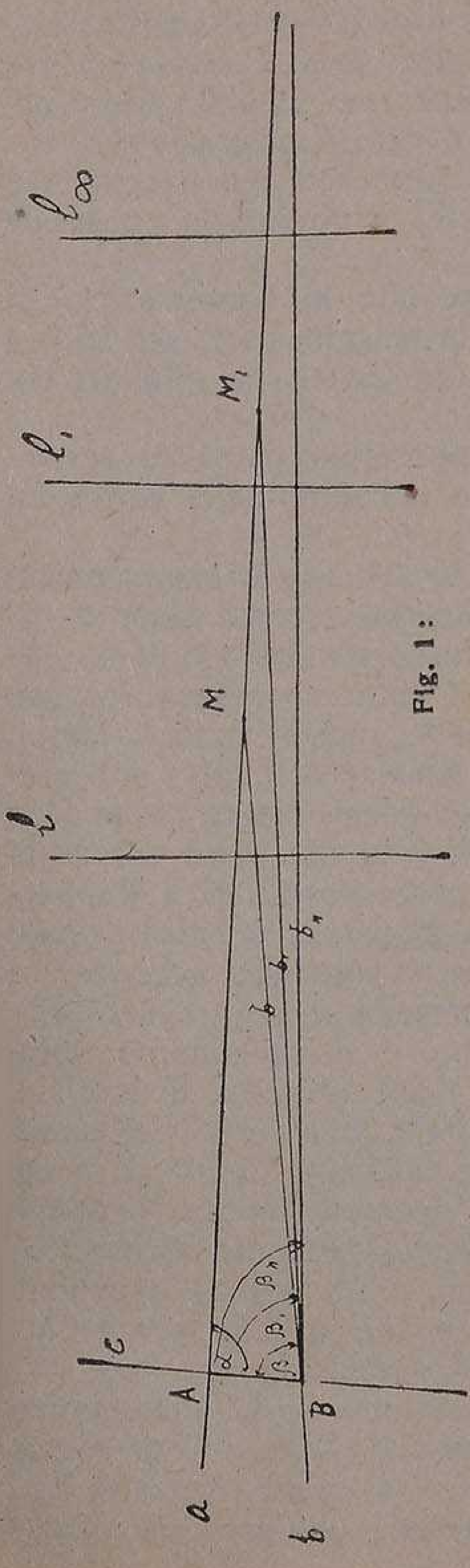


Fig. 1:

a costruire un sistema geometrico indipendente da esso. A questo matematico accenneremo più avanti in altro capitolo.

4. — Vi sono tuttavia dei casi in cui il potulato in questione non è di assoluta evidenza.

Consideriamo infatti due rette a, b (fig. 1) in un piano, segate da una trasversale c, e tali che la somma degli angoli interni da una stessa parte $\alpha + \beta$ sia *di poco* inferiore a due retti.

Immaginiamo le due rette tracciate su di un foglio il cui margine destro sia la retta l. Se il foglio è relativamente piccolo, il punto d'incontro m delle rette a e b cadrà fuori del margine l, cioè fuori del foglio, e sarà compreso entro un secondo foglio il cui margine destro sia l_1. Teniamo fissa la retta a e spostiamo la b in modo che l'angolo β divenga $\beta_1 < \beta$. (1) Il nuovo punto m, d'incontro delle due ret-

(1) Sempre essendo $\alpha + \beta_1 < 2$ retti. I simboli $<$ e $>$ significano, rispettivamente, *minore* e *maggiore*.

te, cadrà, se anche il secondo foglio è abbastanza piccolo, fuori di questo. Ora *può darsi*, ed è logico ammetterlo, che la retta b assuma una posizione b_n, tale che, pur essendo $\alpha + \beta_n < 2$ retti, non esista un foglio così grande da comprendere il punto d'incontro della retta a con la retta b_n; in altre parole: per quanto il margine l si allontani da un punto fisso del piano, superando qualsiasi lunghezza ad arbitrio, il punto d'incontro delle due rette cada sempre al di là di essa retta. In tal caso dobbiamo concludere che le rette a e b_n non s'incontrano effettivamente; il quinto postulato così non sarebbe assolutamente vero; e conseguentemente si potrebbero avere due rette come a e b_n in un piano, che prolungate indefinitamente non s'incontrano, senza soddisfare alla condizione che sia $\alpha + \beta_n = 2$ retti o 180 gradi.

Tali rette, stando alla definizione euclidea, sarebbero parallele. Dunque la definizione di parallele in Euclide esprime un concetto più generale di quello che egli stesso attribuisce alle sue parallele.

Si vede fin d'ora come sia logico ammettere l'esistenza di due specie di parallele:

Le *euclidee:* quelle che prolungate indefinitamente non s'incontrano, ma tali che la somma degli angoli interni da una stessa parte sia eguale a due angoli retti;

Le *non-euclidee*, (più generali delle prime) quelle che prolungate indefinitamente non s'incontrano, senza che sia verificata la condizione di cui sopra.

Queste sono, in sostanza, le considerazioni che hanno dato luogo alla scoperta della nuova geometria. Si vede anche come la geometria ordinaria non sia che un caso particolare di una geometria più generale, dalla quale si passa alla prima introducendo delle condizioni speciali.

5. — *I comentatori greci.* - Posidonio, filosofo stoico del I secolo a. C., propone di chiamare parallele *due rette complanari ed equidistanti*, senza preoccuparsi

del loro punto d'incontro. GEMINO, astronomo contemporaneo del primo, intravide la possibilità di avere rette parallele nel senso euclideo, cioè che prolungate non s'incontrano, ma tuttavia *non equidistanti;* in altre parole egli considera le parallele come due rette *asintotiche* (1). È questa una interpretazione ardita che vedremo confermata dai moderni geometri.

TOLOMEO (II secolo d. C.) non si occupa, come i precedenti, della natura delle parallele, ma cerca di dimostrare il quinto postulato nel modo seguente,

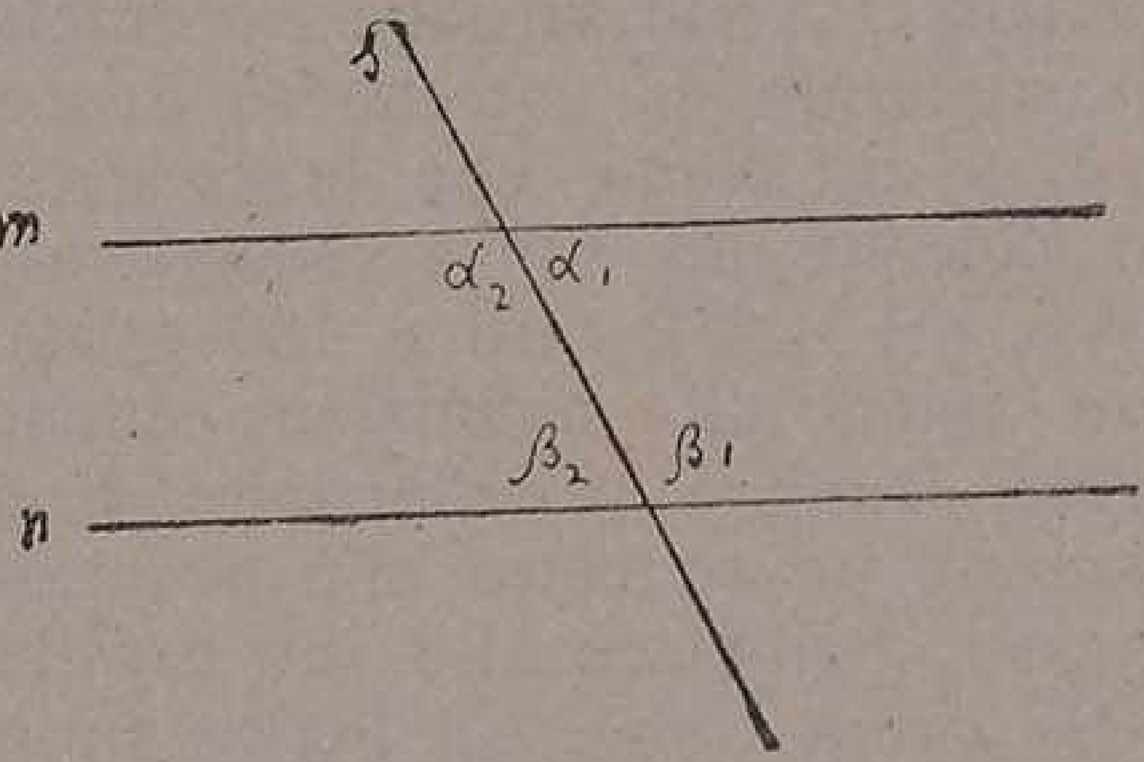


Fig. 2.

non troppo rigoroso, conservando però alle parallele il significato euclideo.

Si abbiano due rette parallele *m, n,* (fig. 2) segate da una terza *s*. Siano α_1 β_1 gli angoli interni a destra, e α_2 β_2 quelli interni a sinistra. Posto questo, la somma $\alpha_1 + \beta_1$ sarà maggiore, o minore, ovvero uguale a due retti. Ora Tolomeo ammette che (e qui sta il punto debole della dimostrazione) se per una coppia di parallele si verifica uno dei tre casi, altrettanto avvenga per ogni altra coppia.

---

(1) Si dice *asintotica* una linea (generalmente una curva) che tende ad identificarsi con un'altra (generalmente una retta) avvicinandovisi indefinitamente, senza però raggiungerla mai se non all'infinito. Tale è, appunto, la relazione fra i rami dell'iperbole ed i suoi asintoti.

Supponiamo allora che sia

$$\alpha_1 + \beta_1 < 2\ R.$$

Allora sarà anche

$$\alpha_2 + \beta_2 < 2\ R.$$

Ne segue

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 < 4\ R,$$

il che è assurdo. Dunque non può essere

$$\alpha_1 + \beta_1 < 2\ R.$$

Identicamente si dimostra non potere essere

$$\alpha_2 + \beta_2 < 2\ R,$$

e però deve essere

$$\alpha_1 + \beta_1 = 2\ R.$$

Con questo, Tolomeo conclude che due rette parallele, segate da una terza, formano angoli interni da una stessa parte la cui somma è due angoli retti; e il quinto postulato sarebbe anch'esso dimostrato.

PROCLO, filosofo alessandrino (412-485), critica il ragionamento di Tolomeo, e tenta dimostrare diversamente la cosa, introducendo l'ipotesi che la distanza di due parallele si mantenga finita; ipotesi che concorda perfettamente col concetto di equidistanza delle parallele euclidee.

A questi matematici dobbiamo aggiungere SIMPLICIUS (VI secolo) che è l'ultimo dei greci che si sia occupato del quinto postulato. Le sue idee però si identificano con quelle di Gemino e Posidonio.

Per mostrare come l'argomento delle parallele in generale, e particolarmente del quinto postulato euclideo, sia stato oggetto di ricerche presso i Greci, esporremo il seguente paradossale ragionamento col quale alcuni sofisti pretendevano dimostrare che due rette in un piano non s'incontrano mai, anche quando segate da una terza formino angoli interni da una stessa parte la cui somma sia minore di due retti.

Siano m, n due rette segate dalla trasversale s. (fig. 3). Da quella parte di s in cui la somma degli angoli interni è minore di due retti, prendiamo su m, ed n rispettivamente $AD = BE = AC$ (C essendo il punto medio di AB). Le due rette m, n non possono incontrarsi fra i punti A, B e D, E perchè in un triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due. Congiungiamo allora D con E e prendiamo, a partire dal segmento DE, due segmenti (su m, n) $DF = EH = DK$ (K essendo il punto medio di DE). Le rette m,

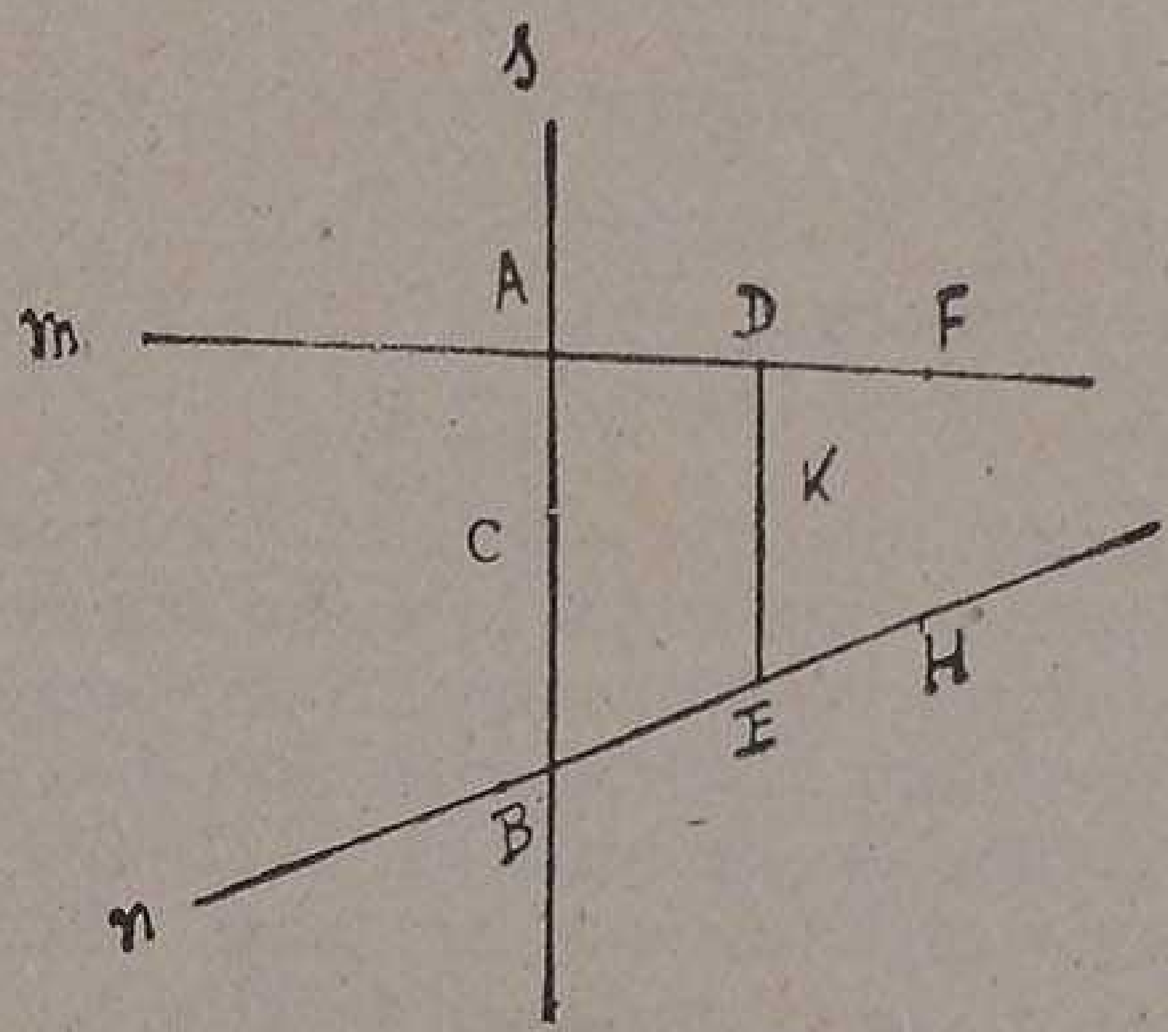


Fig. 3.

n non possono incontrarsi fra i punti D, E e F, H per le stesse ragioni; e poichè questa operazione può ripetersi all'infinito, i sofisti pretendevano concludere che le rette m, n non s'incontrano.

L'errore sta in ciò che con tale processo non si può raggiungere il punto d'incontro delle due rette; ma questo non porta a concludere ch'esso non esista.

Tornando a Proclo, esponiamo ancora alcune sue idee sulla questione del quinto postulato.

Egli osserva che, pur ammettendo vero il teorema che la somma di due angoli di un triangolo è minore di due retti, non si può a priori dir vera la reciproca: che cioè due rette, segate da una terza, quando formano angoli interni da una stessa parte la cui somma sia minore di due retti, s'incontrano da quella parte, in quanto che due lati di un triangolo sono *rette speciali.* Resta a dimostrare che: *se per alcune coppie di rette* (come i due lati d'un triangolo) *segate da una terza e formanti angoli* ecc. ecc. *esiste un punto d'incontro, questo punto esiste per tutte le coppie di rette che soddisfano alla stessa condizione.*

A noi sembra che qui Proclo voglia troppo sottilizzare e anche sofisticare. Perchè se si vuole ammettere senz'altro il quinto postulato, dubitare sulla reciproca del teorema sulla somma di due angoli di

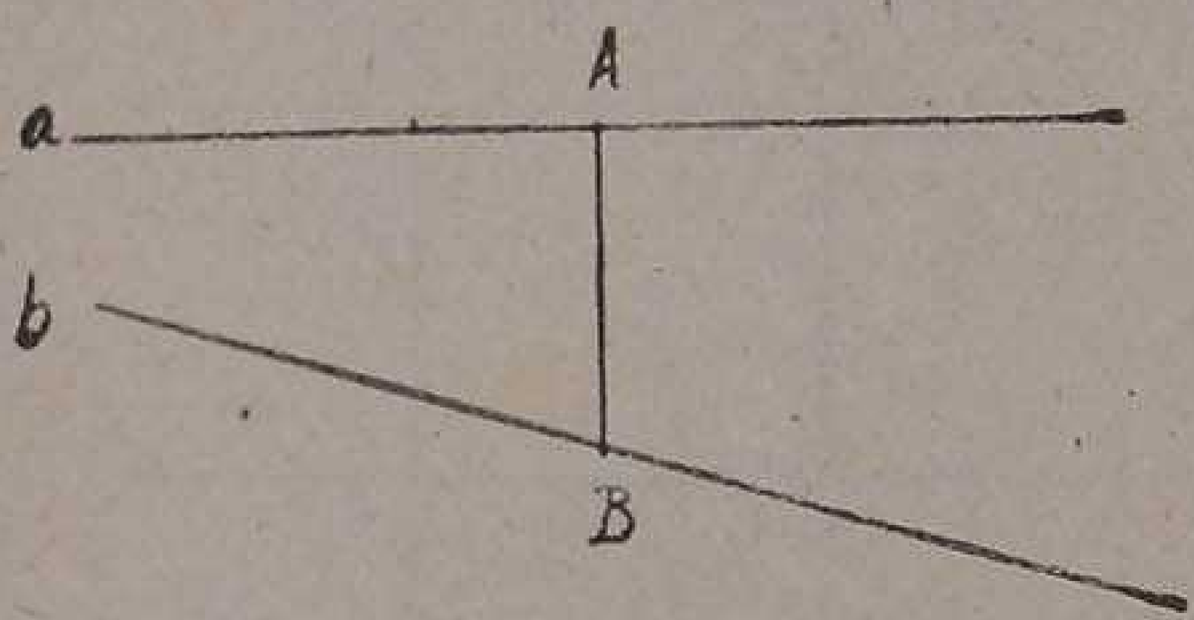


Fig. 4.

un triangolo è assurdo; sarebbe lecito dubitare quando si volesse ritenere dubbio il postulato euclideo.

6. — *I filosofi Arabi.* - Di questi, alcuni accettarono le idee di Euclide riguardo alle parallele e si limitarono a comentare gli *Elementi;* altri portarono concetti nuovi alla quistione. Fra questi ultimi è da ricordare NASIR-EDDIN (XIII sec.) che riesce a dimostrare il teorema sulla somma degli angoli di un triangolo indipendentemente dal concetto di parallele. Per dimostrare il quale premette il seguente teorema: *Se due rette* a, b (fig. 4) *sono la prima perpendicolare e l'altra obliqua al segmento* AB, *i segmenti di perpendicolare calati da* b *su* a *sono minori di* AB *dalla parte in cui* AB *forma con* b *un angolo acuto,*

maggiori di AB *dalla parte in cui* AB *forma con* b *un angolo ottuso.*

Ne segue subito che se due segmenti uguali AB, $A'B'$ cadono da una stessa banda e perpendicolarmente alla BB', la retta AA' sarà anch'essa perpendicolare ai segmenti dati (fig. 5).

Inoltre si avrà $AA'=BB'$; e la figura $AA'B'B$ sarà un rettangolo.

Con questo Nasir-Eddin ricava subito che la somma degli angoli interni d'un triangolo è uguale a due retti. Per un triangolo rettangolo la cosa è manifesta, essendo esso la metà di un rettangolo; per un triangolo qualunque si ottiene la dimostrazione scomponendo il triangolo in due triangoli rettangoli.

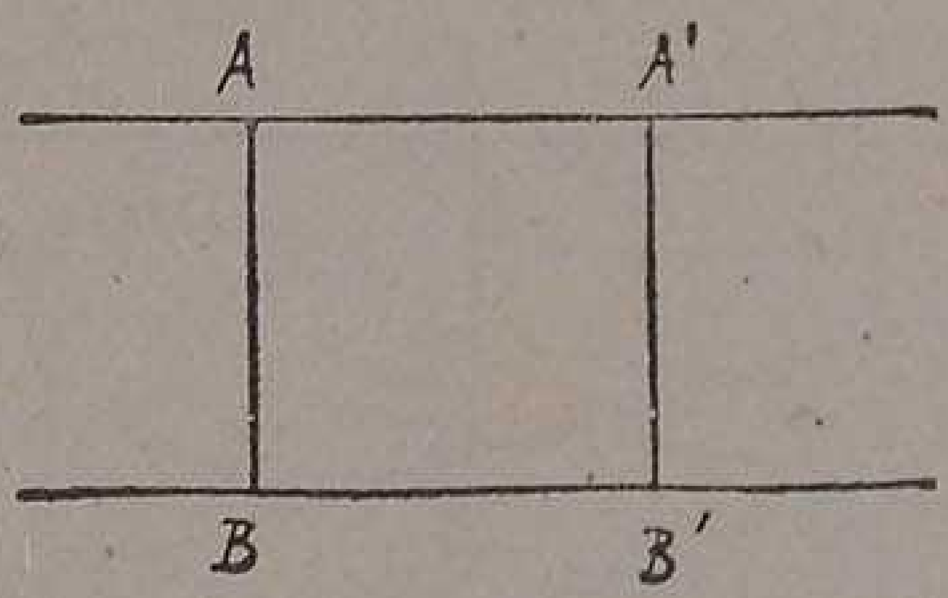


Fig. 5.

Ecco ora come il geometra arabo dimostra il quinto postulato. La dimostrazione è divisa in due parti. Nella prima si suppone che una delle rette segate dalla trasversale sia perpendicolare a questa. Noi daremo la dimostrazione di questa prima parte, modificandola alquanto per renderla più chiara.

Siano BC, AD due rette: la prima perpendicolare, l'altra obliqua alla AB (fig. 6).

Da un punto qualunque D di AD si conduca la perpendicolare alla retta AB prolungata, e sia M il punto d'incontro. Da D s'innalzi (dalla parte di B) la per pendicolare alla DM, e si prenda $DE=MB$. Per il lemma premesso, la figura $MDEB$ è un rettangolo e però sarà l'angolo EBM uguale all'angolo CBM'

essendo entrambi retti. Dunque la BC coincide con la BE. Inoltre, nel triangolo rettangolo AMD, l'angolo MDA è acuto (teorema sulla somma degli angoli di un triangolo): per cui il punto E, che si trova sulla perpendicolare innalzata da DM fuori dell'angolo DAM, cadrà fuori di questo angolo. Allora i punti B ed E sono *separati* dalla AD, e però la BC che coincide colla BE, incontrerà necessariamente la AD.

Nel caso che anche la BC sia obliqua alla AB, la dimostrazione dopo quanto si è detto è ovvia. Resta in tal modo dimostrato il quinto postulato di Euclide.

La questione però è solo apparentemente risolta:

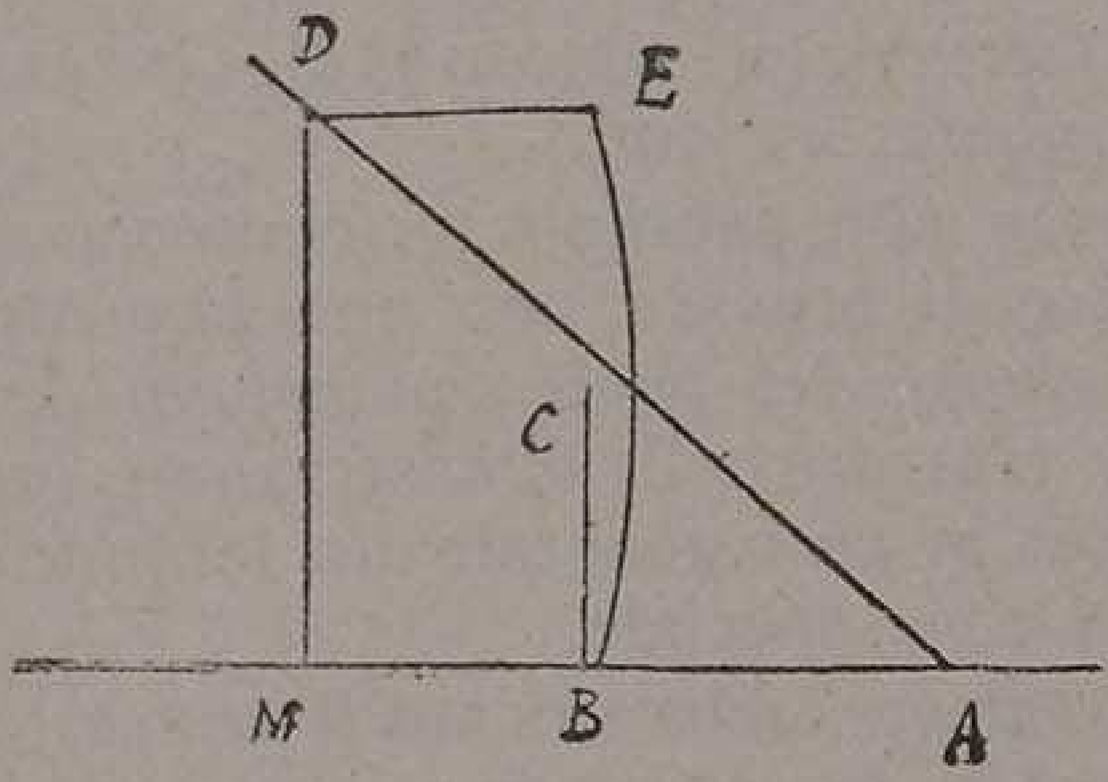


Fig. 6.

perchè la dimostrazione di Nasir-Eddin, sebbene non contenga contraddizioni e quindi sia logicamente accettabile, pure essa dipende dalla verità del lemma enunciato, la cui evidenza non è certo maggiore di quella del quinto postulato.

7. — *I geometri del Rinascimento.* - Solo verso la metà del secolo XVI i geometri si cominciano ad occupare dell'argomento delle parallele. Ciò si deve al fatto che il testo di Proclo, *Degli Elementi*, fu pubblicato soltanto nel 1533 a Basilea. Ne fu stampata una edizione in latino a Padova nel 1560.

COMMANDINO (XVI secolo) al significato di parallele aggiunge il concetto di equidistanza.

CLAVIO, di poco posteriore al primo, cerca dimostrare il postulato euclideo esponendo il teorema che: la *linea equidistante da una retta è una retta.*

Nel secolo XVII, CATALDI è il primo ad occuparsi esclusivamente delle parallele, a differenza di quelli sopra detti i quali trattarono di questo argomento incidentalmente nei loro comenti al testo euclideo.

Nella sua « *Operetta delle linee rette equidistanti et non equidistanti* », egli identifica le parallele con le rette equidistanti, basandosi sulla supposizione che « *rette non equidistanti convergono in un verso e divergono in nell'altro.*

BORELLI riprende il concetto di CATALDI, aggiungendo però alcuni assiomi.

VITALE nega alle parallele un comportamento asintotico e cerca di provare, con una dimostrazione errata, che *il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta.* L'errore della dimostrazione sta nel fatto ch'egli applica in caso generale un lemma da lui premesso in un caso speciale.

WALLIS (inglese), abbandonato il concetto di equidistanza, dimostra (o crede dimostrare) il quinto postulato, basandosi sul principio intuitivo: *di ogni figura esiste una simile di grandezza arbitraria.* Se non che a noi sembra che in questo principio sia già implicitamente ammesso il concetto euclideo di parallele: perchè le proprietà delle figure simili dipendono appunto dalla premessa del postulato euclideo, per cui non è lecito derivare questo da quelle.

8. — Chiuderemo questo capitolo osservando come la proposizione sulle parallele venga da alcuni autori chiamata *postulato,* da altri addirittura *assioma.* La cosa ha una certa importanza, trattandosi di un principio la cui evidenza non è da tutti accettata per manifesta.

Postulato è la traduzione latina *(postulatum)* della parola greca *etema,* che significa *richiesta.* Quando si enuncia un postulato *si chiede* che questo venga ammesso senza dimostrazione come abbastanza evidente.

Assioma è parola del tutto greca e vuol dire *principio intuitivo* degno (αχἰός) di essere accettato senza dimostrarlo: anzi la cui dimostrazione è impossibile, essendo un' *idea fondamentale.*

Tuttavia, esistono proposizioni che sarebbe difficile dire se siano assiomi o postulati, la distinzione dipendendo in fondo dalla perspicacia intuitiva di diverse intelligenze alle quali la stessa cosa può sembrare più o meno evidente.

Ma, tornando alla proposizione sulle parallele, il fatto di avere cercato di essa una dimostrazione, di avere dubitato sulla sua verità, e finalmente la scoperta di una geometria da essa indipendente, o magari fondata sulla sua falsità, mostrano la relatività dell'evidenza dell'enunciato euclideo, sì da porlo senz'altro fra i postulati.

CAPITOLO II.

I precursori della geometria non-euclidea.

1. — *L'opera saccheriana.* - È stato un geometra italiano, il Padre *Gerolamo Saccheri,* gesuita (1667-1733) a dare il maggior impulso alla fondazione della geometria non-euclidea. Le questioni ch'egli tratta sul quinto postulato si trovano in un'opera pregievolissima, stampata in Milano nel 1733: l'*Euclides ab omni naevo vindicatus,* cioè: *Euclide rivendicato.* In essa l'autore dedica la sua parte maggiore a quegli argomenti che lo inducono a concludere sulla verità assoluta del quinto postulato.

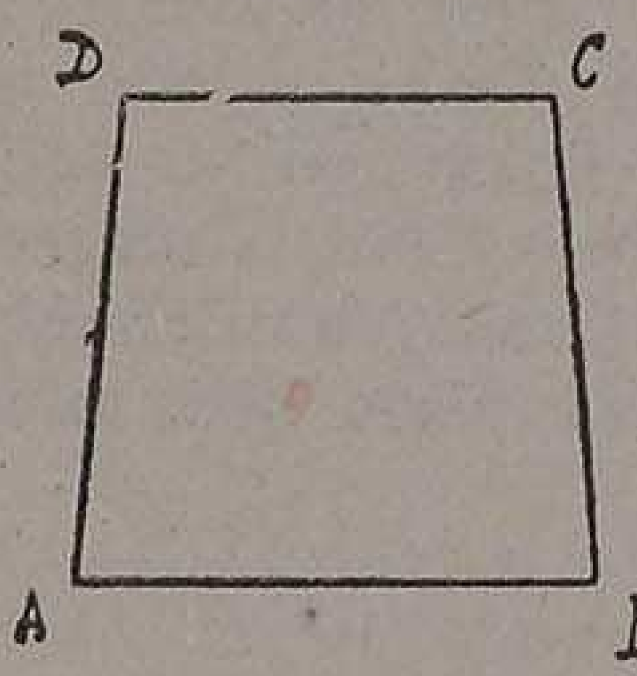


Fig. 7.

Per riuscire a tale intento, il Saccheri si vale in fondo di un ampio ragionamento per assurdo. Egli concede, a coloro che dubitano sulla verità del postulato euclideo, l'ipotesi della sua falsità: e cerca fra le conseguenze di tale ipotesi qualche proposizione contradittoria con l'ipotesi stessa, per concludere ch' essa è falsa, e quindi è vero il quinto postulato.

La figura fondamentale del Saccheri è *il quadrilatero birettangolare isoscele,* cioè un quadrilatero con due lati opposti eguali e perpendicolari alla base. L'Autore deduce le proprietà di questo quadrilatero dal seguente lemma:

Se in un quadrilatero ABCD (fig. 7) *cogli angoli* A, B *retti, i lati* AD, BC *sono uguali, anche l' angolo* C *è uguale all' angolo* D. *E se i lati* AD, BC *sono disuguali, dei due angoli* C, D, *è maggiore quello adiacente al lato minore, e viceversa.*

Daremo la dimostrazione della prima parte di questo lemma, mostrando com' esso sia indipendente dal quinto postulato.

Dimezziamo in M e in N rispettivamente i lati DC, AB del quadrilatero (fig. 7 *a*): otterremo così due quadrilateri $ANMD$, $NBCM$. Stacchiamo il quadrilatero $NBCM$ dall'altro e ribaltiamolo sul piano del disegno in $C'M'N'B'$ (fig. 7 *b*). Portiamo a coincidere il lato $B'N'$ col lato AN del primo. Allora, essendo per ipotesi ang. $A =$ ang. B e quindi ang. A $=$ ang. B', e $AD = BC = B'C'$, il vertice C' coinciderà col vertice D.

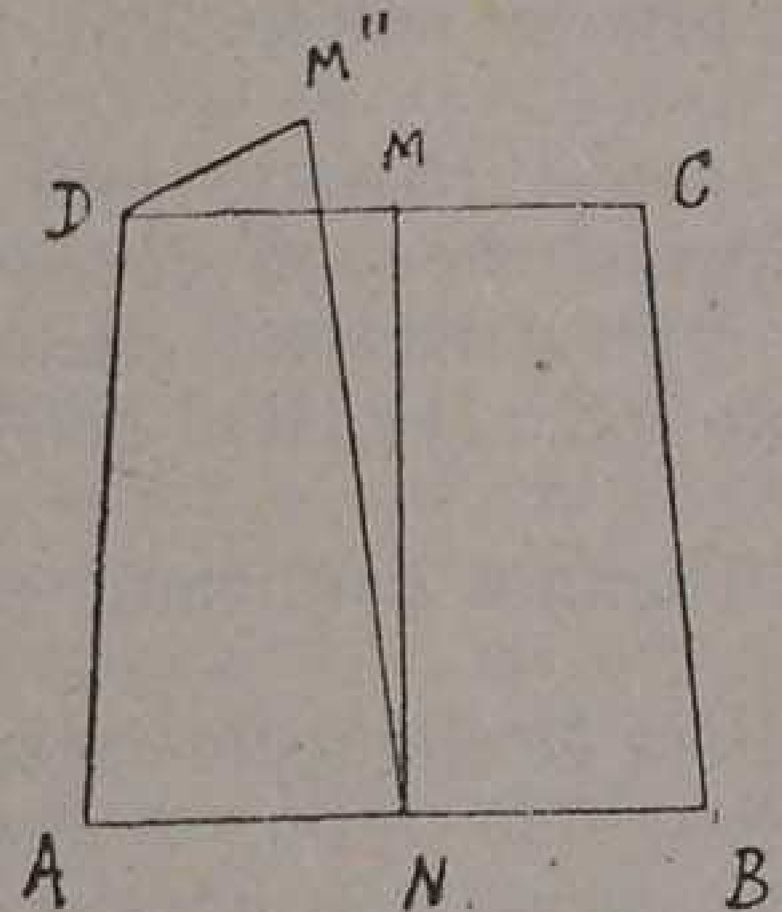


Fig. 7 *a*.

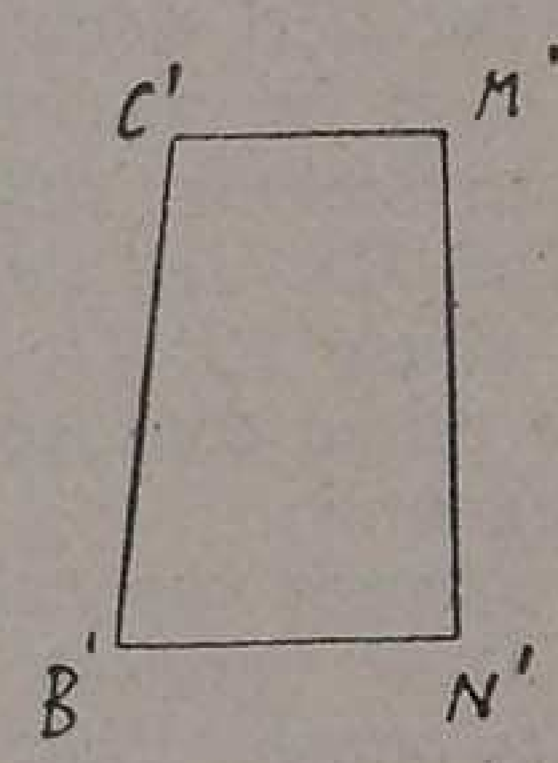


Fig. 7 *b*.

Supponiamo che il quarto vertice M' cada in M''. Ma è evidente che il punto M'' (che si può considerare intersezione di due circonferenze coi centri in D e N, e di raggio DM'' e NM'') dovrà necessariamente coincidere col punto M: perchè questo si può considerare intersezione di due circonferenze aventi gli stessi centri D, N e di raggi rispettivamente uguali ai primi, essendo per costruzione $DM'' = C'M' = DM$, e $NM'' = N'M' = NM$. Dunque i quadrilateri $DMNA$, $CBNM$ si possono far coincidere e però sono uguali, per cui sarà ang. $D =$ ang. C. Questo lemma si può enunciare più generalmente, perchè gli angoli A, B possono essere anche non retti, ma solamente uguali.

La dimostrazione della seconda parte è ovvia.

Abbiasi ora un quadrilatero $ABCD$ birettangolo (ang. A = ang. B = 1 R) ed isoscele ($AD = BC$): nell'ipotesi euclidea anche gli angoli C, D sono retti. Ma se noi *a priori* neghiamo il quinto postulato, il lemma precedente (*assolutamente vero,* perchè indipendente dal concetto euclideo di parallele), ci viene a dimostrare più generalmente che i due angoli C, D sono uguali, *senza esser necessariamente retti,* e però dobbiamo ammettere che siano entrambi acuti o entrambi ottusi. Queste sono le conseguenze logiche del lemma, per quanto a prima vista possano sembrare paradossali; pure, ci è forza accettarle nell'ipotesi della falsità del quinto postulato.

Il Saccheri discute le tre ipotesi rispetto agli angoli C, D del quadrilatero: ipotesi che egli denomina rispettivamente *dell'angolo retto* (sistema euclideo, $C = D = 1$R), *dell'angolo acuto* ($C = D < 1$R), *dell'angolo ottuso* ($C = D > 1$R).

Le prime conseguenze del lemma enunciato sono le seguenti:

A seconda che nel quadrilatero birettangolo isoscele ABCD *è verificata l'ipotesi angolo retto, l'ipotesi angolo ottuso, l'ipotesi angolo acuto, si ha rispettivamente:* AB = CD, AB > CD, AB < CD.

Per quanto riguarda la prima ipotesi la dimostrazione è immediata.

Nell'*ip. ang. ottuso,* abbiamo visto che la perpendicolare MN, abbassata dal punto di mezzo M di DC, divide il quadrilatero dato in due quadrilateri $ANMD$, $BMNC$ uguali, e però sarà ang. DMN = ang. CMN = 1 R.

Posto questo, consideriamo uno dei due quadrilateri, p. es. $ANMD$: esso è birettangolo in M e in N, inoltre è rettangolo in A, ed è ottusangolo (ip. ang. ottuso) in A: dunque (lemma precedente) sarà $DM < AN$. Nello stesso modo si dimostra essere $CM < BN$. Dunque è $AB > DC$ (fig. 7 *a*).

Nell'*ip. ang. acuto,* le disuguaglianze s'invertono, e risulta $AB < DC$.

A questa proposizione l'autore fa seguire queste tre altre.

— *Se in un solo caso è vera l'ip. ang. retto, essa è vera in ogni altro caso.*

— *Se in un sol caso è vera l'ip. ang. acuto, essa è vera in ogni altro caso.*

— *Se in un sol caso è vera l'ip. ang. ottuso, essa è vera in ogni altro caso.*

La dimostrazione delle quali serve ad affermare l'*incompatibilità della coesistenza delle tre geometrie relative alle tre ipotesi in uno stesso sistema geometrico,* ovvero: *l'indipendenza di ciascuna di esse dalle altre due.*

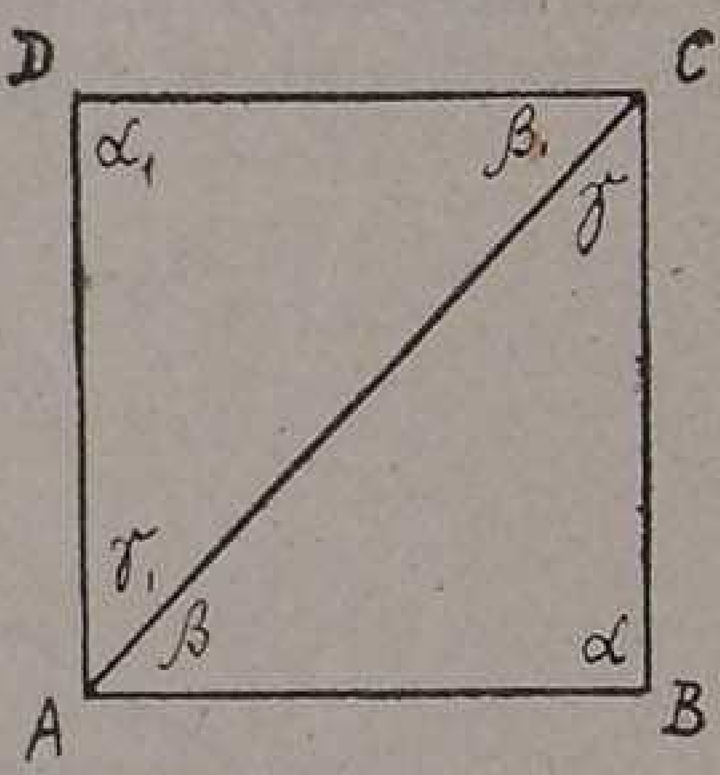


Fig. 8.

Conseguenza immediata del teorema dimostrato è l'altro importantissimo:

A seconda che sia verificata l'ip. ang. retto, l'ip. ang. ottuso, l'ip. ang. acuto, la somma degli angoli interni di un triangolo è rispettivamente uguale, maggiore o minore di due angoli retti.

Sia ABC (fig. 8) un triangolo rettangolo in B. Si completi il quadrilatero tracciando $AD = BC$ e normale ad AB, e si congiunga D con C.

Nell'*ipotesi ang. retto* i due triangoli ABC, ADC sono uguali: e però sarà $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$.

Inoltre è anche $\alpha + \beta + \gamma + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 4$ R.

ed essendo $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$

sarà $\alpha + \beta + \gamma = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 2$ R.

Ad un triangolo qualunque, la dimostrazione è applicabile, scomponendolo in due triangoli rettangoli.

Abbiamo così una dimostrazione del teorema euclideo sugli angoli di un triangolo, indipendentemente dal significato di parallele. A questo risultato era giunto anche Nasir-Eddin. Ma il geometra italiano ha il merito di aver fatto dipendere questo teorema da un lemma la cui evidenza è ben più grande di quella del lemma del filosofo arabo.

Supponiamo ora verificato l'*ip. ang. ottuso*, sarà allora $AB > DC$, e $\gamma > \gamma_1$;

e però $\alpha + \beta + \gamma > \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$;

ma $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 2\ R$,

dunque $\alpha + \beta + \gamma > 2\ R$.

Nell'*ip. ang. acuto* si dimostra identicamente essere

$$\alpha + \beta + \gamma < 2\ R.$$

Scomponendo un triangolo qualunque in due triangoli rettangoli, si dimostra il teorema ingenerale.

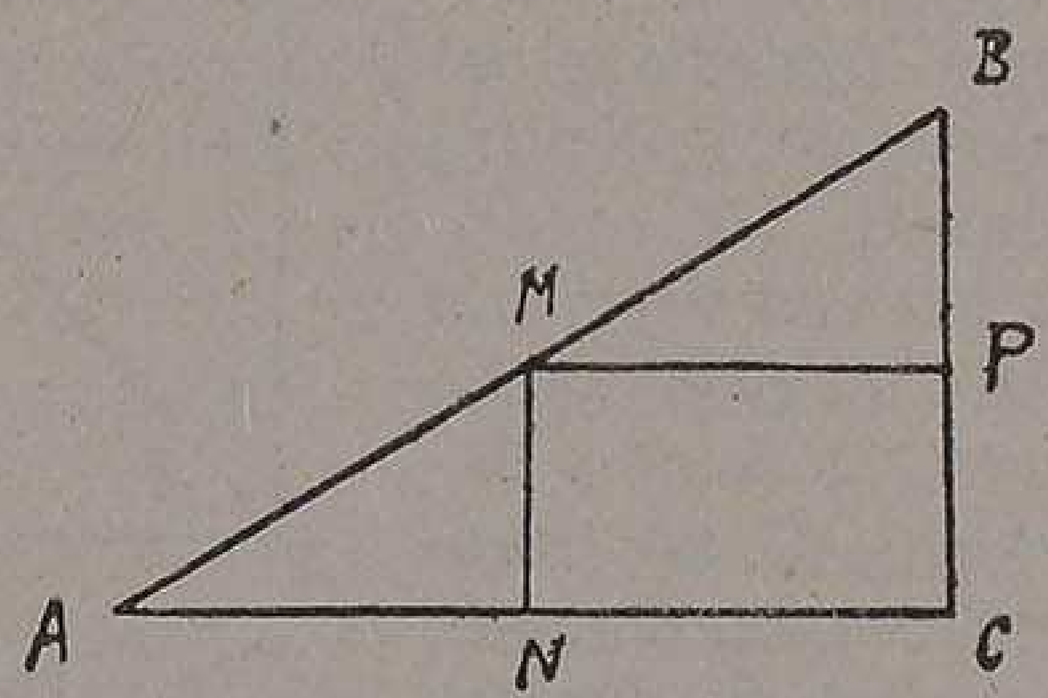


Fig. 9.

2. — Esponiamo ora un teorema le cui conseguenze sono notevolissime.

Sia ABC *un triangolo rettangolo in* C, (fig. 9); *siano* M *il punto medio dell'ipotenusa* AB, e N *il piede della perpendicolare abbassata da* M *su* N; *si dimostra essere*

$$AN = NC \quad (\textit{nell'ip. ang. retto})$$
$$AN < NC \quad (\textit{nell'ip, ang. ottuso})$$
$$AN > NC \quad (\textit{nell'ip. ang. acuto}).$$

Per ciò che riguarda l'angolo retto, la dimostrazione è immediata. *Nell'ipotesi ang. ottuso*, la somma degli angoli di un quadrilatero essendo maggiore di quattro retti, sarà (considerando il quadrilatero $NMBC$, birettangolo in N e in C):

$$\text{ang. } NMB + \text{ang. } MBC > 2\text{ R};$$

ma essendo $\text{ang. } NMB + \text{ang. } AMN = 2\text{ R}$,

risulta $\quad \text{ang. } AMN < \text{ang. } MBC$.

Caliamo ora da M la normale MP al cateto BC; i due triangoli rettangoli AMN, MBP colle ipotenuse uguali, in virtù della precedente relazione dànno luogo alla disuguaglianza: $AN < MP$. Inoltre nel quadrilatero trirettangolo $NMPC$, l'angolo NMP è ottuso *(ip. ang. ottuso)*; per cui sarà (lemma fondamentale):

$$MP < NC.$$

Dunque: $AN < NC$.

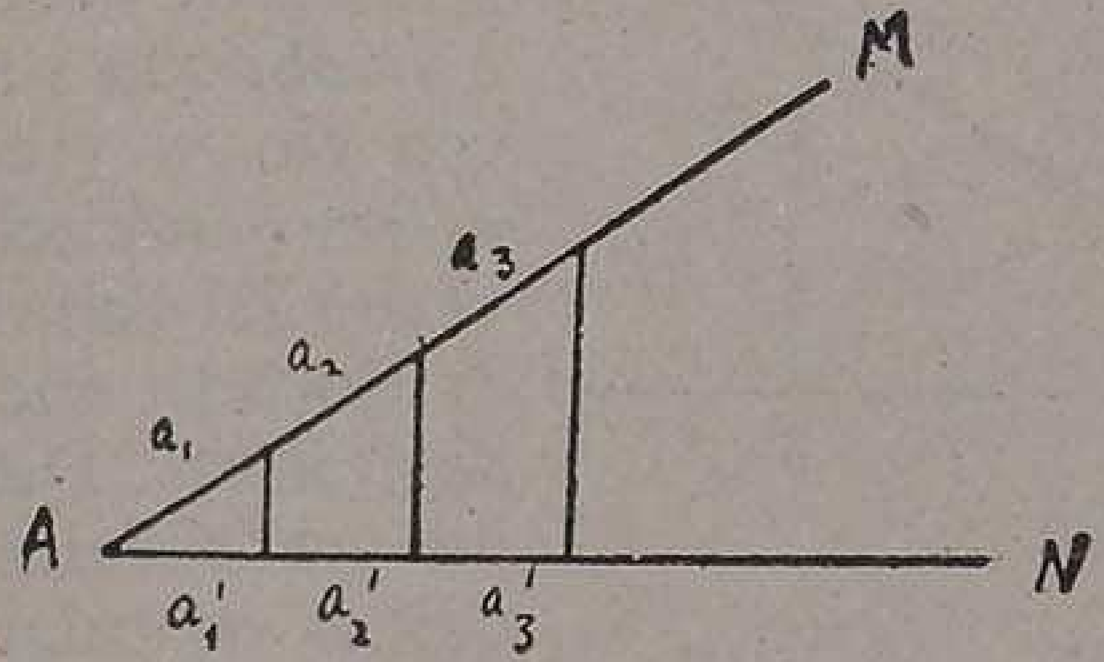


Fig. 10.

Analogamente si dimostra nell'*ip. ang. acuto* essere

$$AN > NC.$$

La proposizione che segue è una estensione immediata del teorema premesso.

Sia dato un angolo qualsiasi MAN (fig. 10). *Sul lato* AM *si prendano successivamente i segmenti uguali* a_1, a_2, a_3.... *e si costruiscano le rispettive proiezioni* a'_1, a'_2, a_3'.... *su* AN. Allora si ha:

$$\begin{aligned} a_1' &= a_2' = a_3' = \ldots. \quad \text{(ip. ang. retto)} \\ a_1' &< a_2' < a_3' < \ldots. \quad \text{(ip. ang. ottuso)} \\ a_1' &> a_2' > a_3' > \ldots. \quad \text{(ip. ang. acuto)} \end{aligned}$$

La dimostrazione è ovvia e perciò la tralasciamo.

Dunque, nel caso che siano verificate le due ipotesi *angolo retto* e *angòlo ottuso*, la serie $a_1' + a_2' + a_3' + \ldots.$ delle proiezioni è *illimitata*, potendo supeperare qualsiasi segmento grande a piacere.

Abbiansi allora due rette AC, BD (fig. 11), la prima obliqua, le seconda perpendicolare alla retta AB.

Nelle ipotesi *ang. retto* e *ang. ottuso* potremo sempre trovare sulla AC un punto A_n tale che, costruita la sua proiezione A_n' sulla AB, il segmento A_n' sia maggiore del segmento AB (1) o per lo meno uguale. Perciò la BD, normale al lato $A\,A_n'$ del triangolo rettangolo $A\,A_n\,A_n'$ incontrerà necessariamente l'ipotenusa A_n. In altre parole: nell'*ip. ang. retto e ang. ottuso, una perpendicolare e un'obliqua s'incontrano;* con ciò si viene ad ammettere implicitamente la verità del quinto postulato di Euclide anche nell'*ip- ang. ottuso*. Dunque: siamo partiti dalla falsità del quinto postulato introducendo l'*ip. ang. ottuso,* abbiamo trovato una conseguenza in contraddizione con tale ipotesi; Saccheri per tanto conclude che essa è falsa.

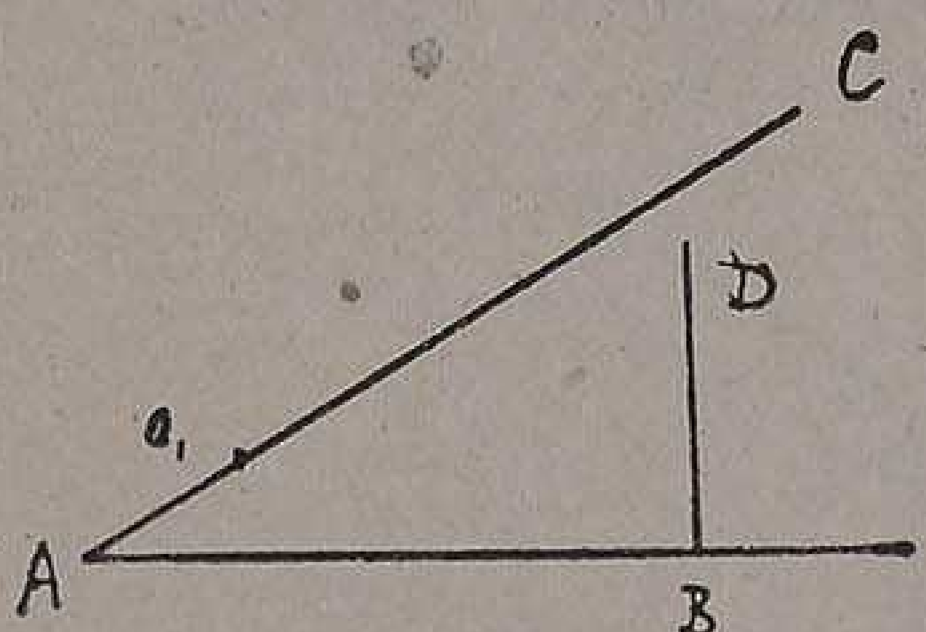


Fig. 11.

Risulta che le ipotesi logicamente accettabili sono quelle dell'*angolo retto* e dell'*angolo acuto*.

E veniamo a quest'ultima.

Abbiamo visto nel lemma precedente, che nell'*ip. ang. acuto,* le proiezioni a_1', a_2', a_3'.... vanno sempre diminuendo. Allora possono darsi due casi:

I. Che il segmento AB sia la somma delle proiezioni di un certo numero N di segmenti uguali a_1,

---

(1) Il segmento A_n si deve immaginare multiplo di un certo segmento a_1 la cui proiezione sia $a_1'{}_4$. Per quanto piccola risulti tale proiezione rispetto ad AB, il lemma precedente permette, nelle due ipotesi ammesse, l'esistenza di un punto A_n' al di là del punto B.

a_2, a_3.... a_n (fig. 12). Se questo si verifica, la BD coinciderà con la retta $A_n A_n'$ e perciò incontrerà necessariamente la obliqua AC nel punto A_n.

II. Che, per quanto il punto A_n si allontani dal ver-

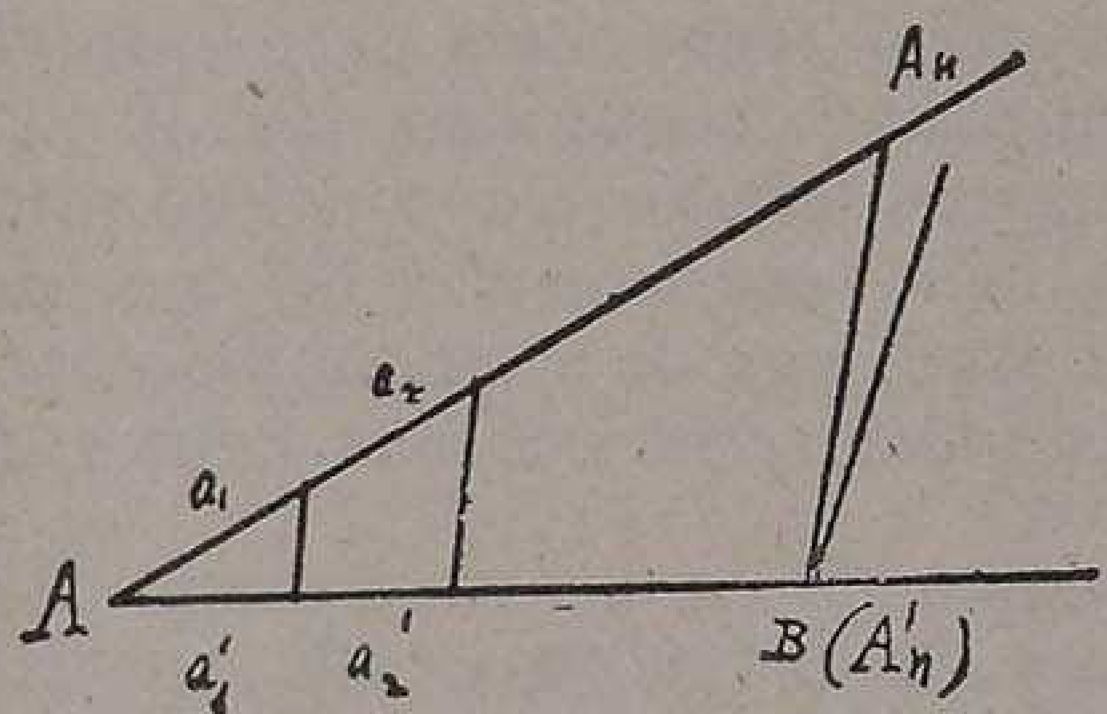


Fig. 12.

tice A superando qualsiasi grandezza ad arbitrio, il punto corrispondente A_n' in proiezione cada dentro AB, avvicinandosi sempre più al punto B (fig. 13). In altre parole il segmento AB è il *limite* della somma

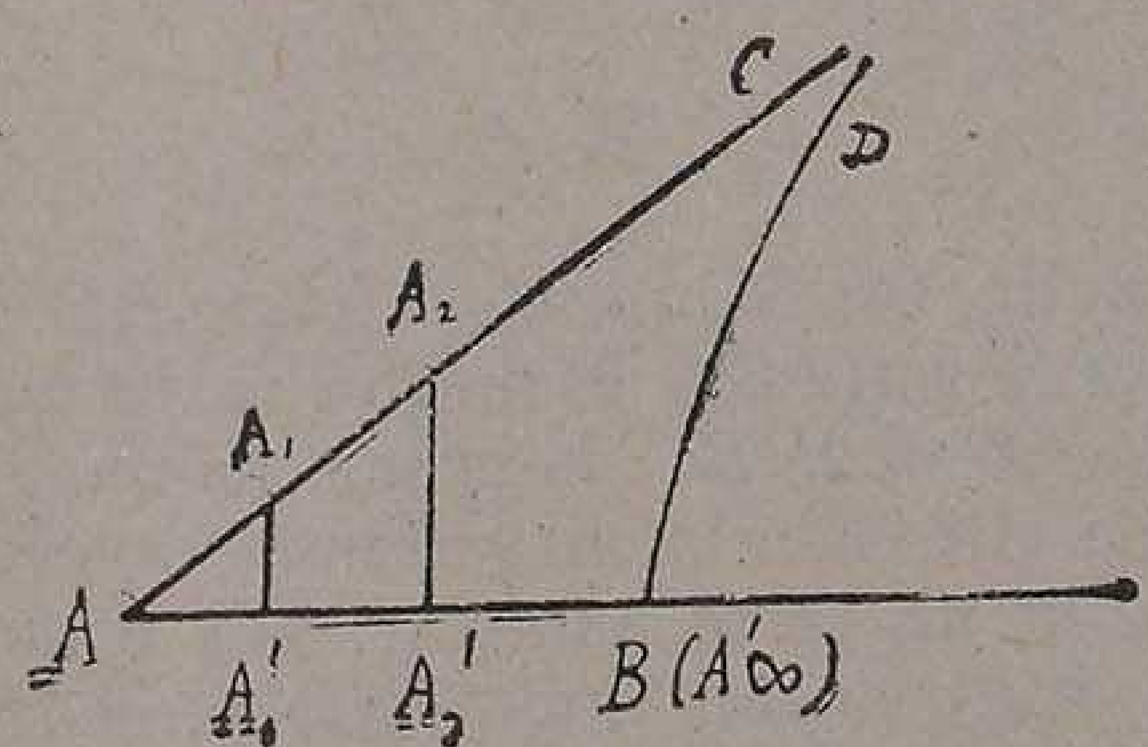


Fig. 13.

delle proiezioni dei segmenti uguali sulla AC. Allora la BD dovrà ritenersi come la congiungente del punto B col punto all' infinito della retta AC, e perciò non incontrerà la AC.

Pertanto: *Nell'ipotesi ang. acuto esistono una per-*

pendicolare e un' obliqua a una stessa retta che non s'incontrano.

L'ipotesi dell'angolo acuto non porta dunque a concludere sulla verità del quinto postulato. Si vede quindi fin da ora la possibilità di costruire un sistema geometrico *logicamente conseguente* ed indipendente dal postulato euclideo. Ma il Saccheri non giunge a questo: sempre più convinto intuitivamente della verità della proposizione del geometra greco, cerca tutti i modi per distruggere l'ipotesi dell'angolo acuto, dichiarandola *contraria alla natura della retta.*

3. — Vediamo ora come si possano costruire una perpendicolare ed una obliqua alla stessa retta che non s'incontrino.

Si consideri un triangolo ABC ret-

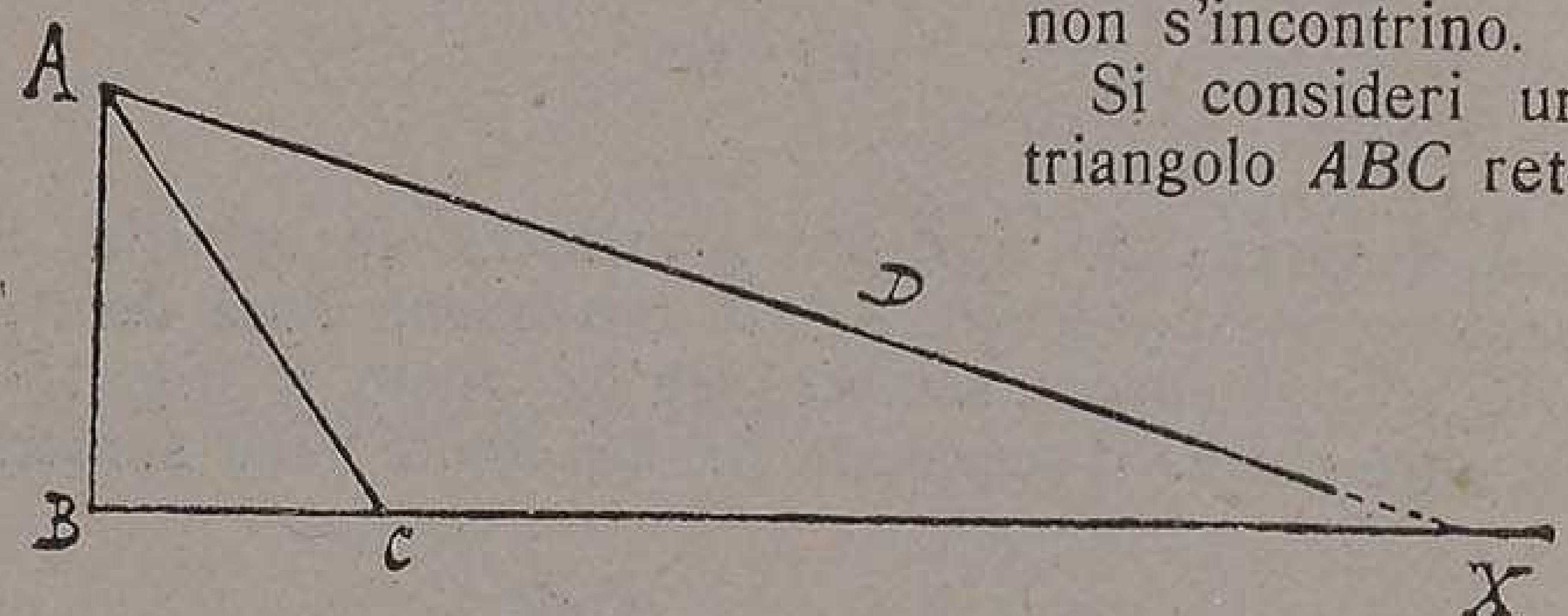


Fig. 14.

tangolo in B (fig. 14). Si prolunghi il lato BC. Pel vertice A si conduca la retta DA in modo che sia ang. $CAD =$ ang. ACB La AD e la BC, la prima obliqua, la seconda normale alla AB, non s' incontrano. Invero, se s' incontrassero in un certo punto X, nel triangolo ACX, la somma degli angoli interni $CAX + AXC + XCA$ supererebbe i due retti dell'angolo AXC, il che è contro l'ipotesi.

Veniamo ora ad un'altra proprietà importantissima che si ha, nell' *ip. ang. acuto,* in certe coppie particolari di rette in un piano.

Consideriamo (fig. 15) due rette complanari a, b aventi in A, B, una perpendicolare comune AB. Vediamo cosa succede di queste due rette. Prendiamo sulla retta a un punto A' e sulla b stacchiamo a partire da B il segmento $BB' = AA'$. Avremo così un quadrilatero birettangolo in A, B, ed isoscele, sul quale, per il lemma fondamentale applicato all'*ip. ang. acuto*, sarà $A'B' > AB$. Preso un terzo punto A'' su a, stacchiamo sulla b a partire da B' il segmento $B'B'' = A'A''$; avremo il quadrilatero isoscele $A'B'B''A''$ ottusangolo in A', B'. e perciò acutangolo in A'', B''; dunque, sempre per il lemma, sarà $A''B'' > A'B'$, e così via. Ne segue che le distanze AB, $A'B'$.....

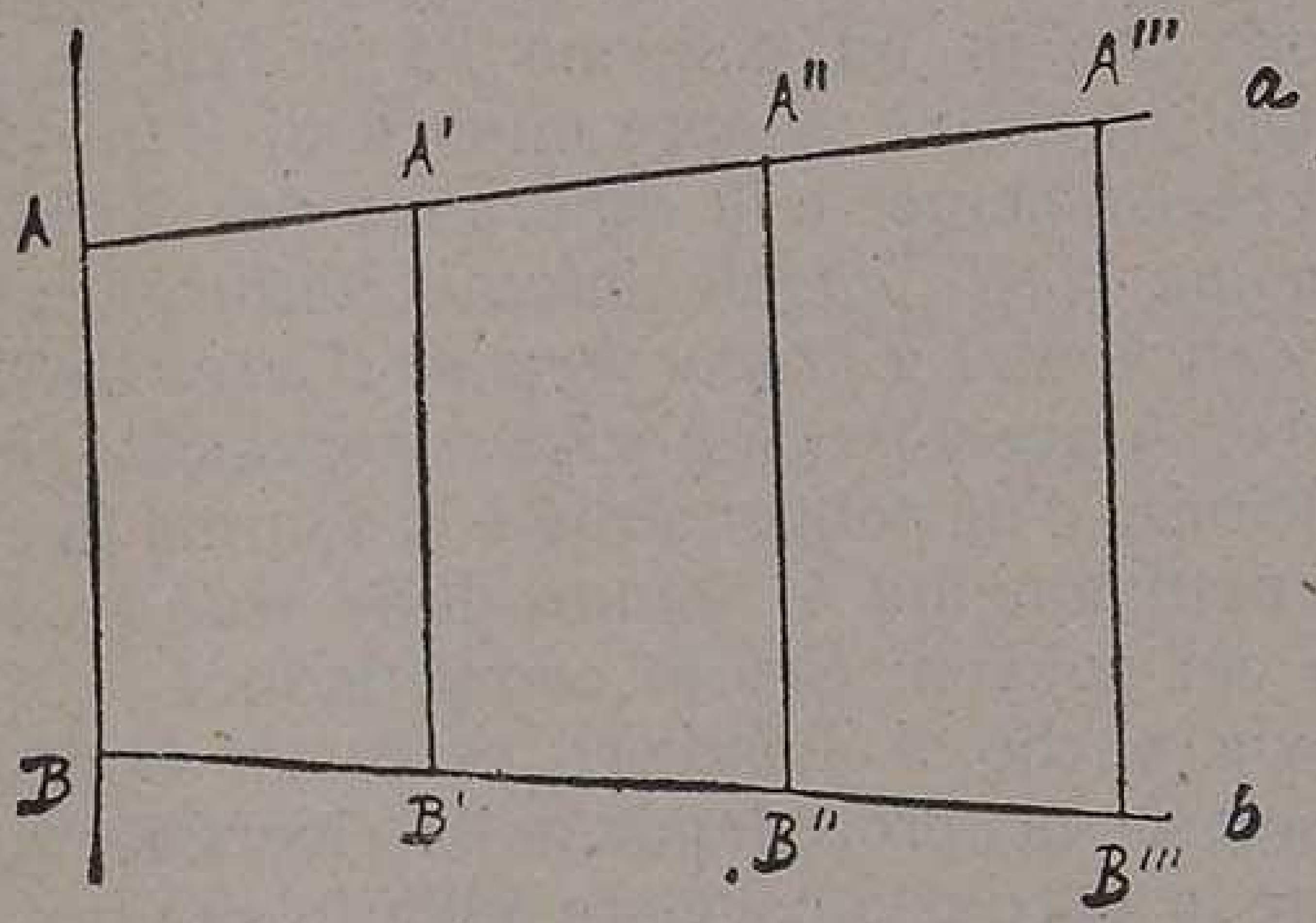


Fig. 15.

fra i punti delle due rette crescono oltre ogni limite, perchè tale operazione può ripetersi indefinitamente; le due rette a, b allora dovranno necessariamente divergere.

La stessa cosa si dimostra per il verso di sinistra della normale AB; dunque: nell'*ip. ang. acuto, due rette complanari aventi una perpendicolare comune, divergono indefinitivamente da bande opposte rispetto alla loro perpendicolare.*

Questo risultato, paradossale per le proprietà ordinarie della retta, è stata una delle ragioni per cui il Saccheri fu indotto a rigettare anche l'ipotesi ang. acuto.

4. — *Imitatori e continuatori del Padre Saccheri.* — Un continuatore dell'opera saccheriana lo abbiamo nel geometra svizzero LAMBERT (1728-1777) il quale, sulla figura fondamentale che è il *quadrilatero trirettangolo,* discute le tre ipotesi dell'*ang. retto* (che s'identifica col sistema euclideo), dell'*ang. ottuso* ch' egli dichiara falsa, e dall'*ang. acuto* nella quale non trova alcuna contraddizione.

Anzi il Lambert prosegue, in questa terza ipotesi, nelle sue deduzioni e scopre alcuni teoremi fra i quali notevole è quella sulla *deficienza* del *poligono,* dimostrando che in un poligono di n lati, la somma degli angoli interni è sempre minore di $2(n-2)$ retti: e più precisamente « *la differenza fra* $2(n-2)$ retti *e la somma degli angoli interni* (differenza ch'egli chiama *deficientia*) è *proporzionale all'area dello stesso poligono* ». A questo egli giunse osservando che l'area e la deficienza d'un poligono che è la somma di più altri, sono rispettivamente la somma delle aree e delle deficienze dei poligoni che lo compongono.

Tuttavia anche il Lambert cerca di confutare la terza ipotesi; ma procedendo nelle ricerche non trova nulla che lo porti a concludere sulla falsità del sistema geometrico su tale ipotesi fondata; anzi trova alcune analogie fra la geometria ordinaria della sfera e questo sistema. Infatti, nella geometria ordinaria, l'area di un triangolo sferico è dato dalla formula dove $A, B, C,$ sono gli angoli:

$$\gamma^2 (A + B + C - \pi);$$

mutando in questa il raggio γ nel raggio imaginario

$$\gamma\sqrt{-1},$$

diventa: $\gamma^2 (\pi - A - B - C)$,

che è appunto la formula dell'area di un triangolo piano nella *terza ipotesi* di Lambert.

In sostanza il metodo seguito dal Lambert per affermare la verità del postulato euclideo è analogo a quello del Saccheri; ma il matematico svizzero è andato più oltre nelle sue ricerche, senza però risolvere completamente la questione.

5. — *Geometri francesi nel secolo XVIII.* - Un notevole interesse alla teoria delle parallele presero i francesi verso la fine del secolo decimottavo.

D'ALEMBERT, infastidito delle ricerche infruttuose sulla questione, propone di troncare ogni discussione *con una buona definizione della linea retta.* Egli chiama, scherzando, le parallele *lo scandalo della geometria.*

LAGRANGE fa notare l'indipendenza della trigono-

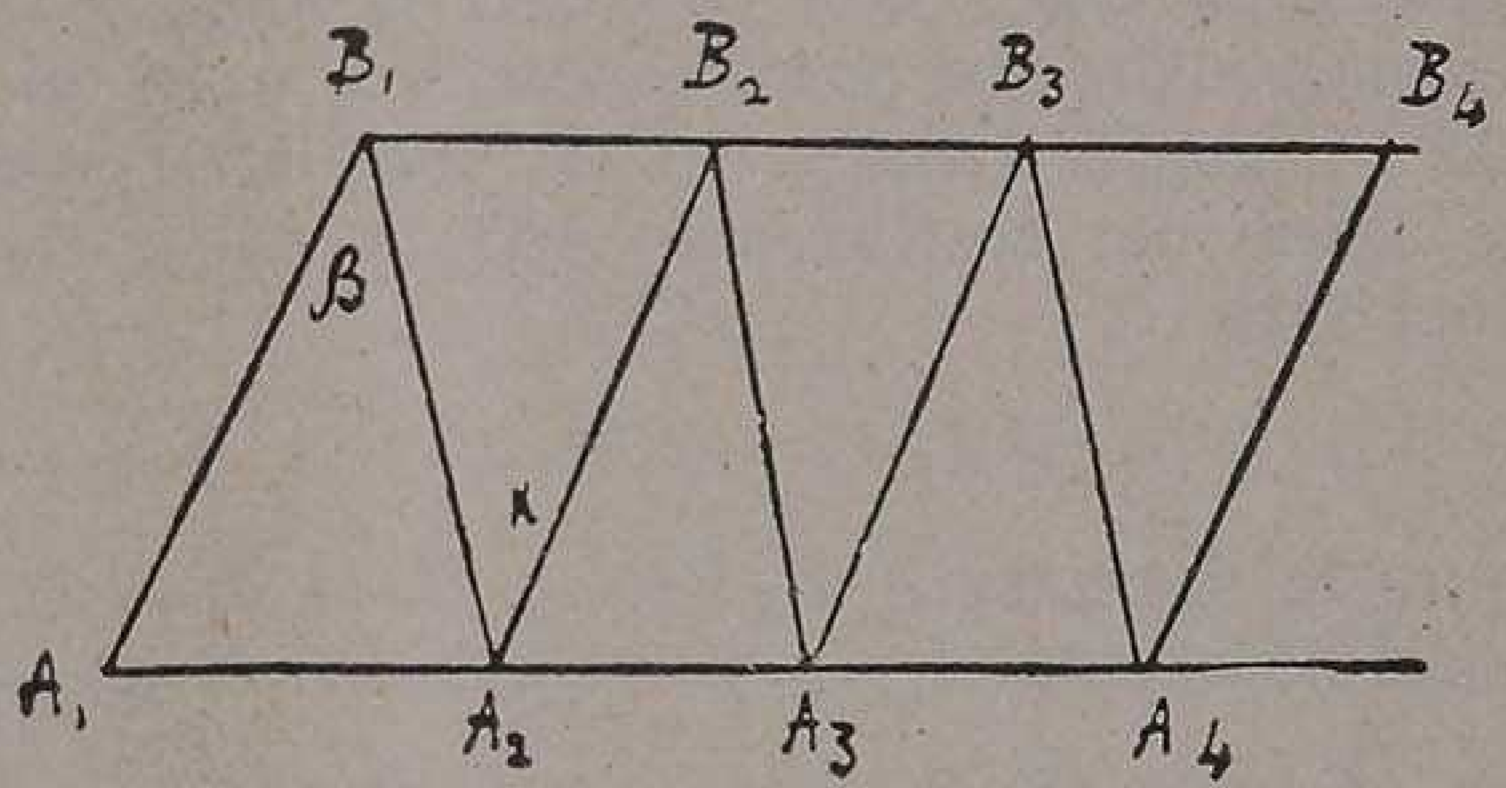


Fig 16.

metria sferica ordinaria dal quinto postulato (ciò era stato osservato anche dal Lambert); e quindi la possibilità di una geometria da esso indipendente.

Ma soprattutto notevole è l'opera del LEGENDRE (1752-1833), che per certi riguardi può paragonarsi a quella del Saccheri e del Lambert per ciò che concerne la teoria delle parallele e specialmente la dimostrazione del quinto postulato.

Legendre scarta a priori l'ipotesi dell'angolo ottuso, ponendo in principio il teorema:

In qualsiasi triangolo la somma degli angoli interni è minore (ip. ang. acuto) *o è uguale* (ip. ang. retto) *a due angoli retti.*

La dimostrazione che riportiamo è fondata sulla verità del *postulato di Archimede,* sulla *infinità della retta.*

Siano, su d'una retta data, n segmenti uguali $A_1 A_2$, $A_2 A_3 \ldots\ldots A_n A_n + 1$ (fig. 16). Su di essi come base si costruiscano n triangoli eguali i cui vertici siano $B_1 B_2 \ldots\ldots B_n$, tutti dalla stessa banda della retta.

Otterremo così (avendo congiunti i punti $B_1 B_2$, $B_2 B_3 \ldots.$) altri $n - 1$ triangoli uguali fra di loro, ma non uguali ai primi se non si ammette l'ipotesi euclidea. Completiamo la figura col triangolo $B_n B_{n+1} A_{n+1}$ uguale ai precedenti. Indichiamo con β l'angolo B_1 del triangolo $A_1 B_1 A_2$ e con α l' angelo A_2 del triangolo $B_1 A_2 B_2$. Dico che β non può essere maggiore di α. Concediamo allora che possa essere $\beta > \alpha$. In tal caso, avendo i triangoli $A_1B_1A_2$, $A_2B_1B_2$ due lati rispettivamente uguali per costruzione ($A_1B_1 = A_2B_2$, A_2B_1 in comune) sarà

$$A_1 A_2 > B_1 B_2$$

Inoltre la spezzata $A_1 B_1 B_2 \ldots\ldots B_{n+1} A_{n+1}$ è maggiore del segmento $A_1 A_{n+1}$; perciò avremo:

$$A_1 B_1 + nB_1 B_2 + B_{n+1} A_{n+1} > nA_1 A_2$$

ed avendo ammesso $\beta > \alpha$ e quindi $A_1 A_2 > B_1 B_2$ sarà: $2A_1 B_1 > n\ (B_1 B_2 - A_1\, _2A)$.

Ma per n abbastanza grande (1) questa disuguaglianza contraddice il *postulato di Archimede:* perchè, per quanto sia piccola la differenza $B_1 B_2 - A_1 A_2$ rispetto ad $A_1 B_2$, si deve poter sempre trovare un multiplo, secondo un certo numero n di tale differenza, che sia maggiore di $2\ A_1 B_1$. Dunque non può essere $A_1 A_2 > B_1 A_2$; e quindi è assurdo supporre $\beta > \alpha$. Segue che è $\beta \leq \alpha$, e la somma degli angoli del triangolo $A_1 B_1 A_2$ è minore od uguale a due retti. Così è eliminata l'ipotesi dell'angolo ottuso.

---

(1) I punti sulla retta data possono essere in numero qualsivoglia.

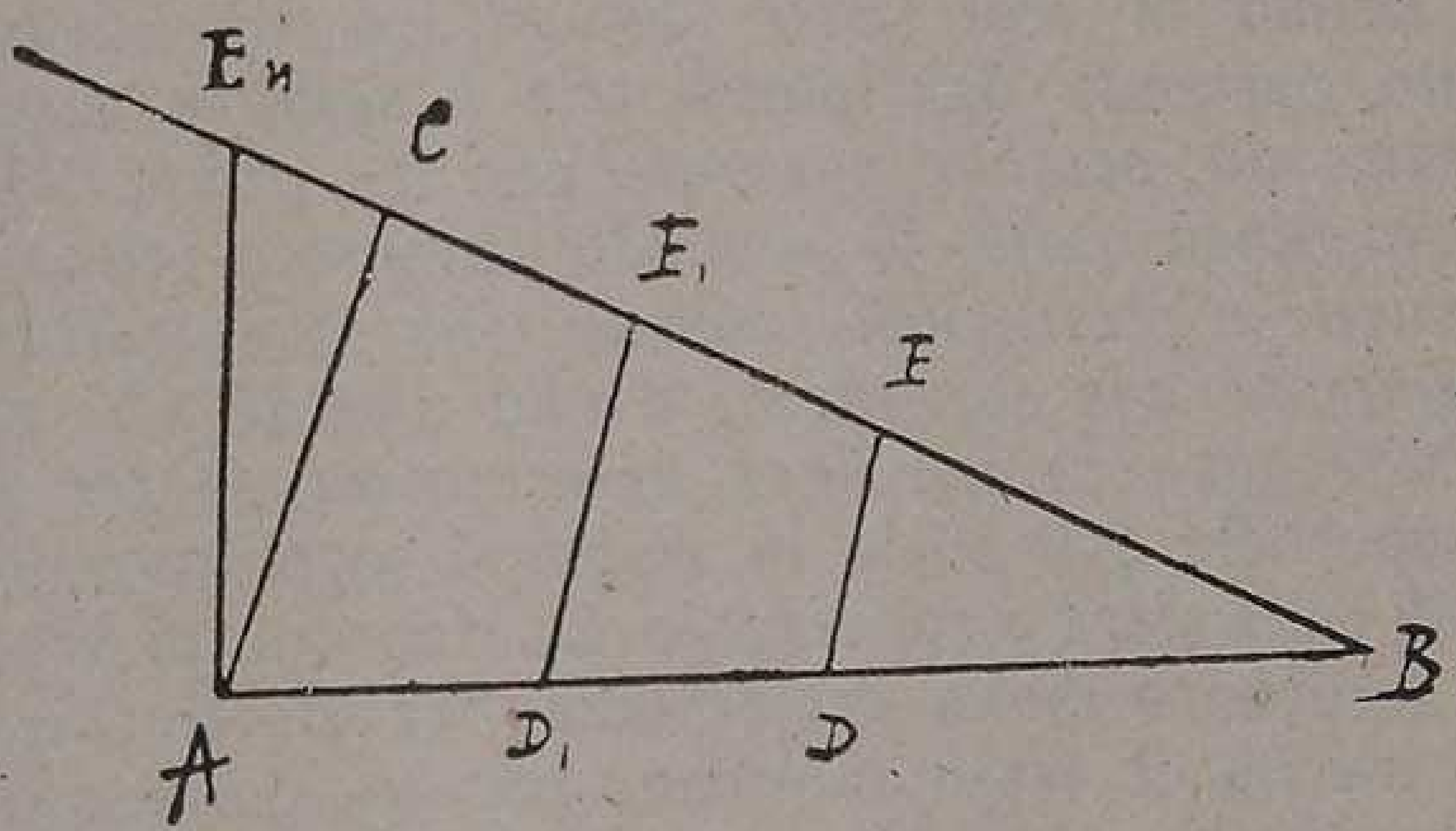
Legendre dimostra in seguito il teorema:

Se in un solo triangolo la somma degli angoli è minore od uguale a due angoli retti, è minore od uguale rispettivamente in ogni altro triangolo.

Questa proposizione mostra l'incompatibilità delle due ipotesi dell'angolo acuto e dell'angolo retto. Resta adunque a decidere quale di esse sia la vera. A tale scopo Legendre dimostra il seguente teorema:

La somma degli angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti, che giustifica l'ipotesi euclidea.

Dimostreremo il teorema per un triangolo rettan-



Pig. 17.

golo. Scomponendo un triangolo qualunque in due triangoli rettangoli si ottiene la dimostrazione in generale.

Sia ABC (fig. 17) un triangolo rettangolo C. Supponiamo gli ang. $A + B + C > 2\,\mathrm{R}$. Da un punto D ad arbitrio sulla AB si conduca la perpendicolare DE al lato BC. Nel quadrilatero birettangolo in C e in E, avendo ammesso l'ipotesi dell'angolo acuto, sarà ang. CAB + ang. $EDA < 2\,\mathrm{R}$; e poichè ang. EDA + ang. $EDB = 2\,\mathrm{R}$, sarà ang. $EDB >$ ang. CAB.

Preso un altro punto D sulla AB, si ripete la costruzione precedente. Otterremo l'angolo $E_1 D_1 B$ maggiore dell'angolo A_1, ma minore dell'angolo EDB. Allora l'angolo generico D si può considerare come una determinata funzione crescente del segmento AD.

Diamo a tale segmento il valore zero, cioè supponiamo che il punto D si porti in A. Avremo in corrispondenza un angolo E_nAB, e sarà ancora AE_n perpendicolare alla BC. Allora nel triangolo AE_nC, la somma degli angoli interni è maggiore di due retti, il che è contradditorio con l'ipotesi ammessa, la quale è per tanto falsa.

Dunque si avrà ang. A + ang. B + ang. $C = 2$ R.

6. — Chiuderemo questo capitolo sui precursori della geometria non-euclidea accennando a WOLFANG BOLYAI (1775-1856) e FEDERICO WACHTER (1792-1817).

Il primo di essi cercò dimostrare il quinto postulato, partendo dall'ipotesi che *è sempre possibile costruire un cerchio passante per tre punti che non sono in linea retta*. Il secondo dimostrò che *quattro punti arbitrari nello spazio (ma non collineari) determinano una superficie; e che due di tali superfici si segano in una linea determinata da tre punti*. La superficie e la linea in discorso sarebbero identificabili colla sfera e col cerchio. Le ricerche di Wachter non avrebbero molta importanza per se stesse; egli però merita di esser ricordato per un colloquio epistolare ch'ebbe con Gauss, dove si parla già di una geometria *anti-euclidea*, la quale corrisponderebbe pienamente a quella nell'ipotesi dell'angolo acuto, introdotta per primo dal nostro Saccheri.

CAPITOLO III.

I fondatori della geometria non-euclidea.

1. — Carlo Federico Gauss. - Fra i primi che abbiano avuto un'idea chiara di un sistema geometrico indipendente dal quinto postulato è Carlo Federico Gauss (1777-1855).

Quale influenza abbiano avuta su di lui le opere del Saccheri e del Lambert non si può precisamente affermare.

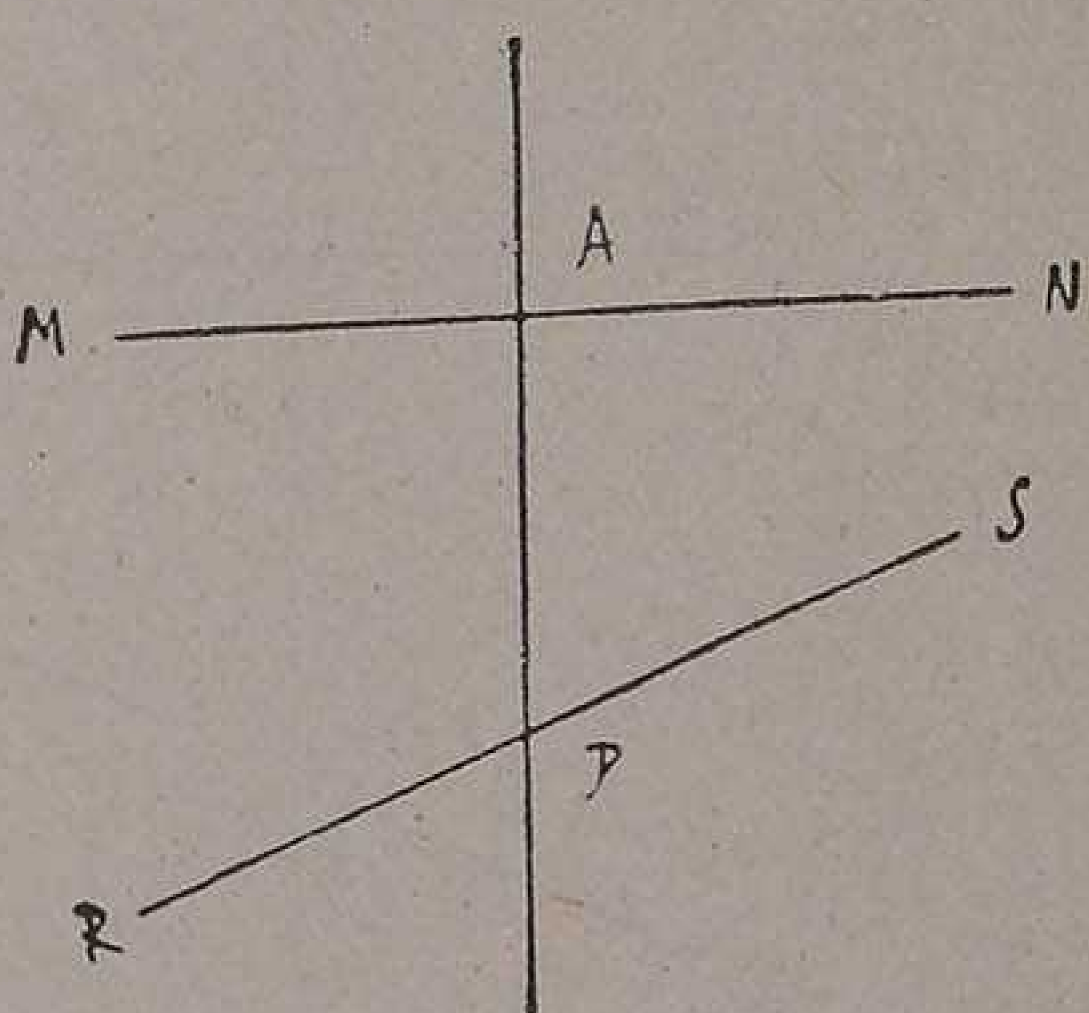


Fig. 18.

È tuttavia facile che egli abbia avuto qualche conoscenza dell' « *Euclides ab omni naevo vindicatus* » e della « *Theorie der Parallellinien* ». Anche Gauss, come Saccheri, tenta di dimostrare la verità del quinto postulato partendo dall'ipotesi della sua falsità; ma poi, non contento delle conclusioni a cui giunge, abbandona la questione esponendo i principî di una nuova geometria indipendente dall'enunciato euclideo. Nelle sue *Meditationes* (com'egli denomina le sue ricerche intorno alle parallele, ricerche che seguirono per ben quarant'anni) ecco come Gauss definisce le parallele:

Siano *MN*, *RS* (fig. 18) due rette poste nello stesso piano e segate da una trasversale *AB* fissa. La *MN* non incontri la *RS*.

Se la retta MN *è tale che ogni retta condotta per* A *e compresa nell'angolo* BAN *incontri la* RS, *allora la* MN *si dice parallela alla* RS.

Osserviamo subito che Gauss ammette il parallelismo della *MN* alla *RS in un dato verso;* nel caso della figura la *MN* è parallela alla *RS* verso destra. La trasversale *AB* ha appunto l'ufficio di determinare i due versi distinti di parallelismo. Così la parallela alla *RS* verso sinistra non è necessariamente la *MN*; supporre questo sarebbe fare un'ipotesi equivalente al postulato euclideo.

Segue subito dalla definizione stessa di parallele che da un dato punto *A* si può condurre una sola

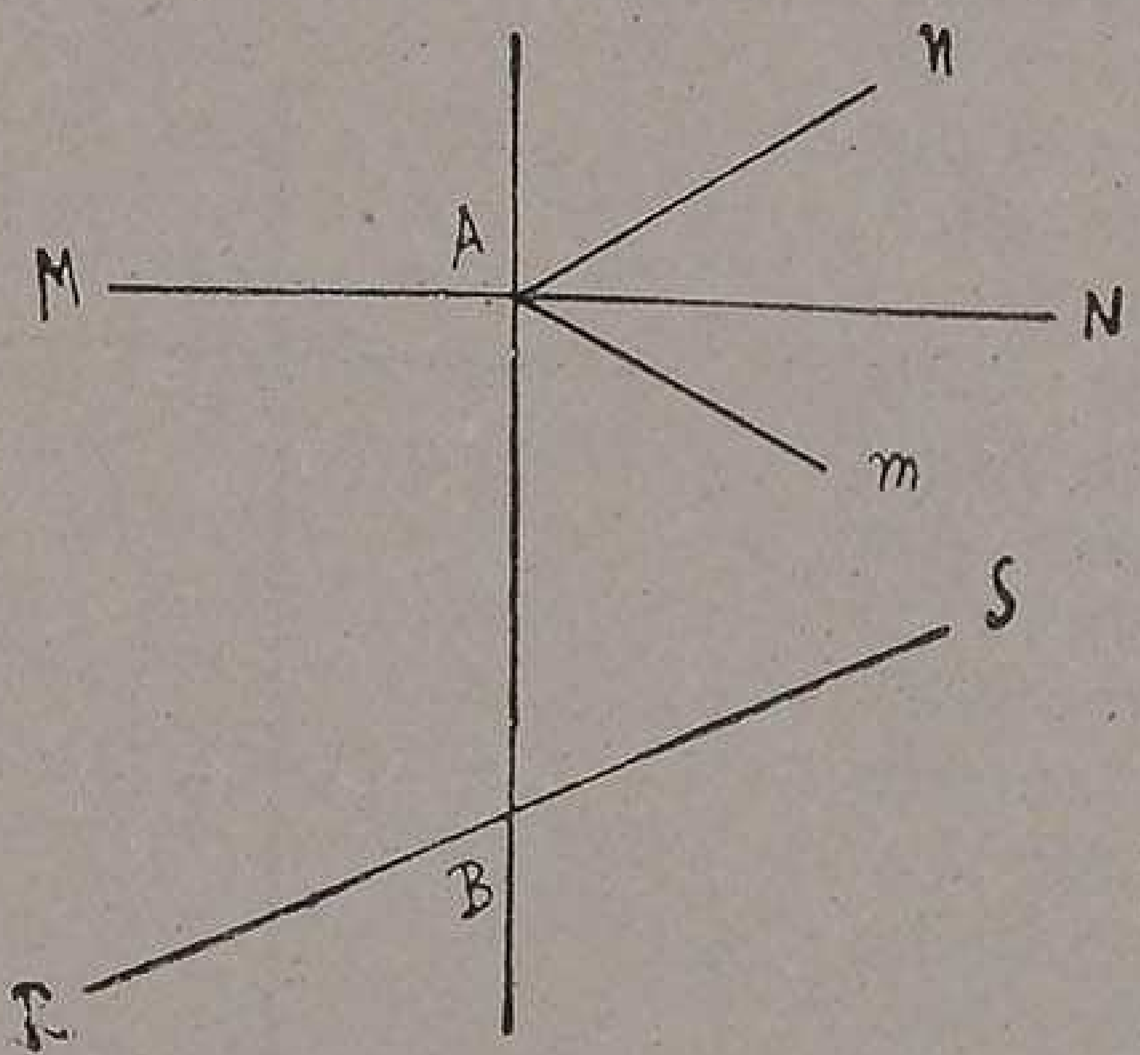


Fig. 19.

parallela *MN*, in un verso dato, ad una data retta *RS*. Invero, qualunque altra retta *m* uscente per *A* e compresa nell'angolo *BAN* che non incontri la *RS* dovrà coincidere con la *MN* (fig. 19). Nè si può ammettere che esista un'altra retta *n* per *B* esterna all'angolo *BAN* che sia parallela (verso destra) alla *RS*; perchè, in tale ipotesi, dovendo le rette *n* ed *RS* soddisfare alla definizione gaussiana di parallele, tutte le rette comprese nell'angolo *BAn* e passanti per *A*, dovrebbero incontrare la *RS*; e quindi anche la *MN* dovrebbe incontrare la *RS*. Il che è assurdo.

Così dimostrata l'*unicità* della parallela in *un dato* *verso*, ne segue che per Gauss da un punto dato si possono condurre due sole parallele a una retta data.

Dalla definizione gaussiana non risulta evidente la *reciprocità* del parallelismo, cioè che anche la RS sia parallela alla MN. Ecco come si può dimostrare la cosa.

Supponiamo infatti che la RS (fig, 20) non sia parallela alla MN. Sia invece la m la parallela a quella retta. Ammettiamo che la m cada di fuori dell'angolo SBA.

Per la definizione stessa di parallele, tutte le linee

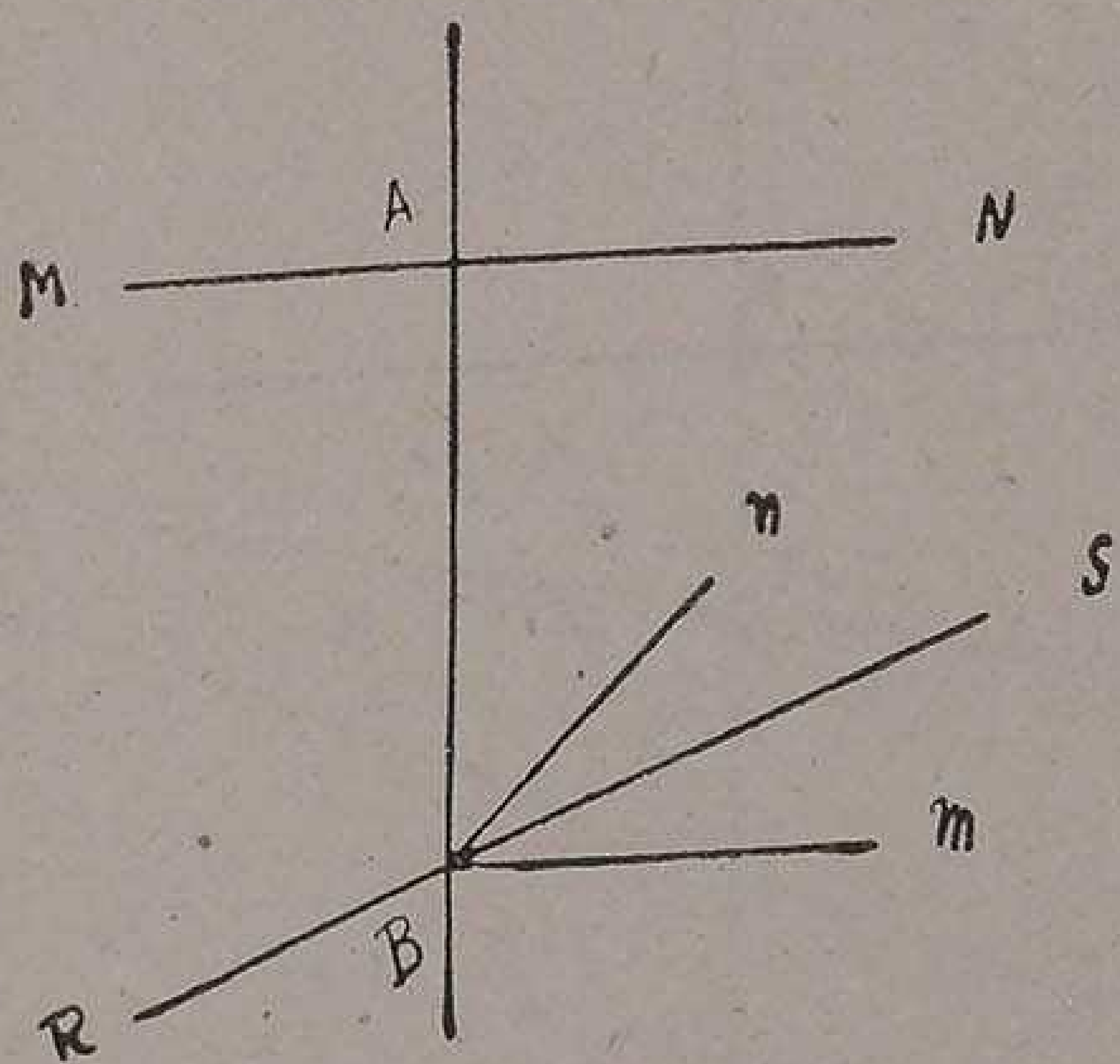


Fig. 20.

per B e comprese nell'angolo mBA dovrebbero incontrare la MN; e però anche la RS dovrebbe incontrare la MN; ma allora la MN non sarebbe più parallela alla RS, contro l'ipotesi; dunque la m non può essere parallela alla MN. Analogamente si dimostra non esistere altra retta n parallela alla MN compresa nell'angolo SBA.

Dimostriamo finalmente che anche per Gauss due rette parallele (in un dato verso) ad una terza sono parallele fra loro (nello stesso verso).

Siano $M_1 N_1$, $M_2 N_2$ (fig. 21) due rette entrambe parallele (verso destra) alla retta MN. Anzitutto è chiaro che le due rette $M_1 N_1$, $M_2 N_2$ non possono incontrarsi in uno stesso punto, perchè se ciò avvenisse si potrebbe da questo punto condurre due parallele nello stesso verso a una retta. Di più, qualunque retta m per C e compresa nell'angolo $A C N_2$ dovendo incontrare (per ipotesi) la MN, segherà necessariamente anche la $M_1 N_1$ la quale è *compresa* fra la MN e la $M_2 N_2$. Dunque le rette MN, $M_2 N_2$ sono parallele. Analogamente si dimostrerebbe la cosa, ove la MN fosse compresa fra la $M_1 N_1$ e la $M_2 N_2$.

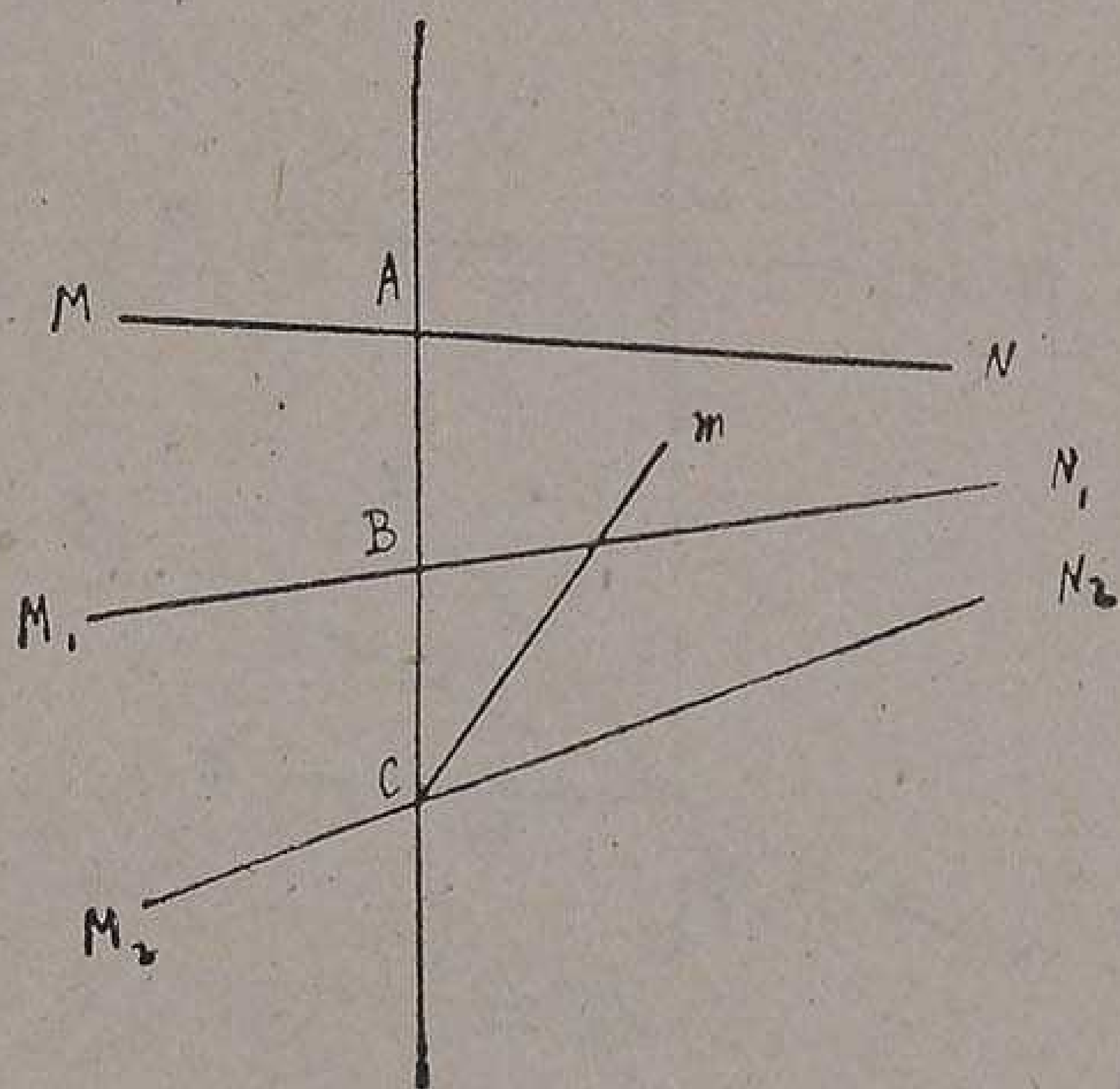


Fig. 21.

Gauss dà inoltre il concetto di *punti corrispondenti* su due parallele. I punti A, B sono *corrispondenti* quando la retta AB forma con le parallele m_1 m_2 due angoli A, B uguali da una stessa parte (fig. 22).

Segue subito che date tre parallele $m_1 m_2 m_3$ (fig. 23) (nello stesso verso) se A, B sono punti corrispondenti e B, C sono anch'essi corrispondenti, anche A, C sono corrispondenti.

Qui terminano le ricerche di Gauss, ma è bene fare alcune osservazioni sulle ultime considerazioni.

Il concetto di punti corrispondenti, trasportato al caso in cui le rette $m_1\, m_2\, m_3 \ldots.$ appartengono a un

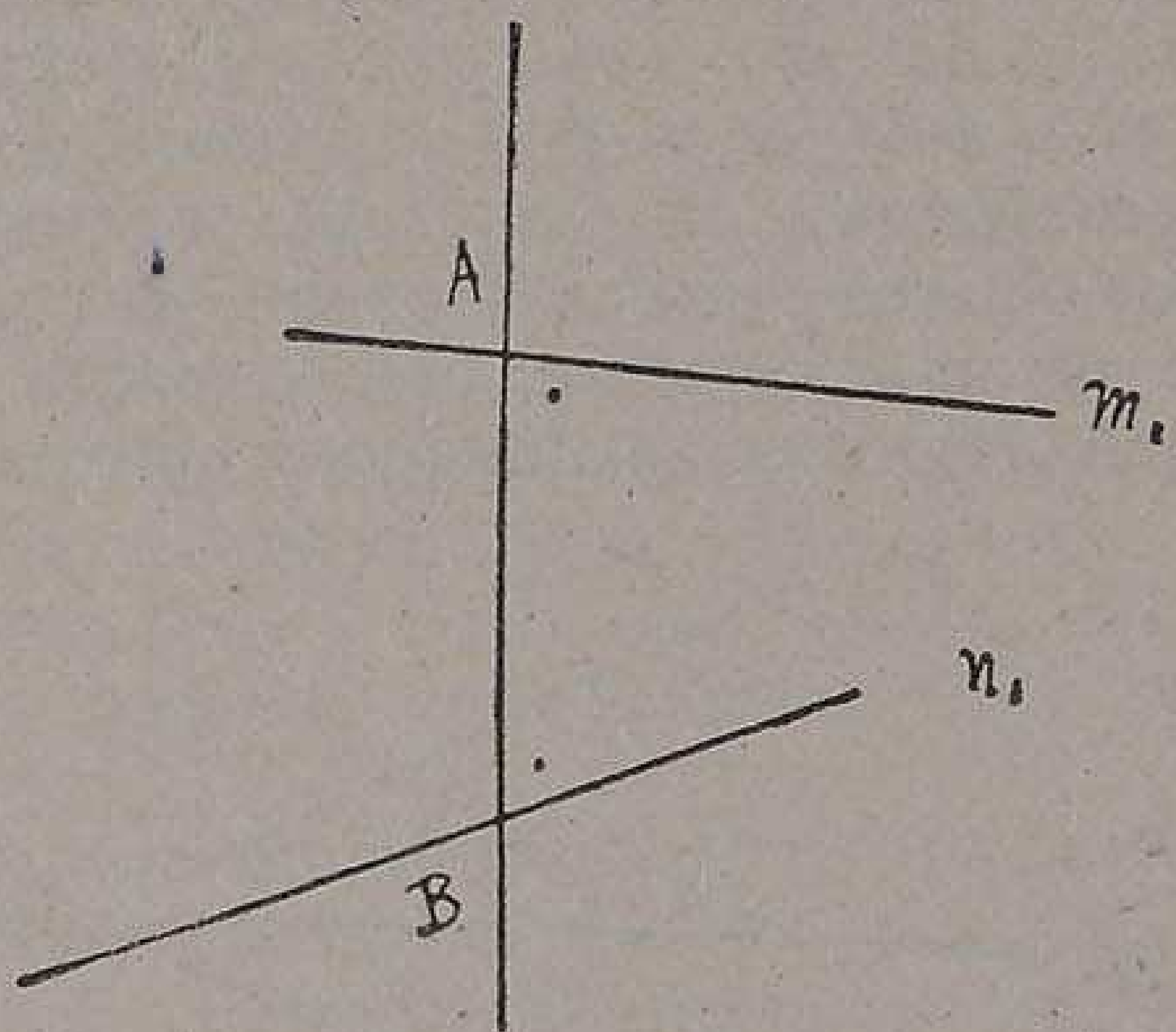


Fig. 22.

fascio, cioè per un punto (fig. 24), ci permette di definire la circonferenza come il *luogo dei punti corrispondenti di un punto dato sulle rette di un fascio*. Questo luogo può anche construirsi quando le rette del fascio sono parallele. Nel caso euclideo si ottiene

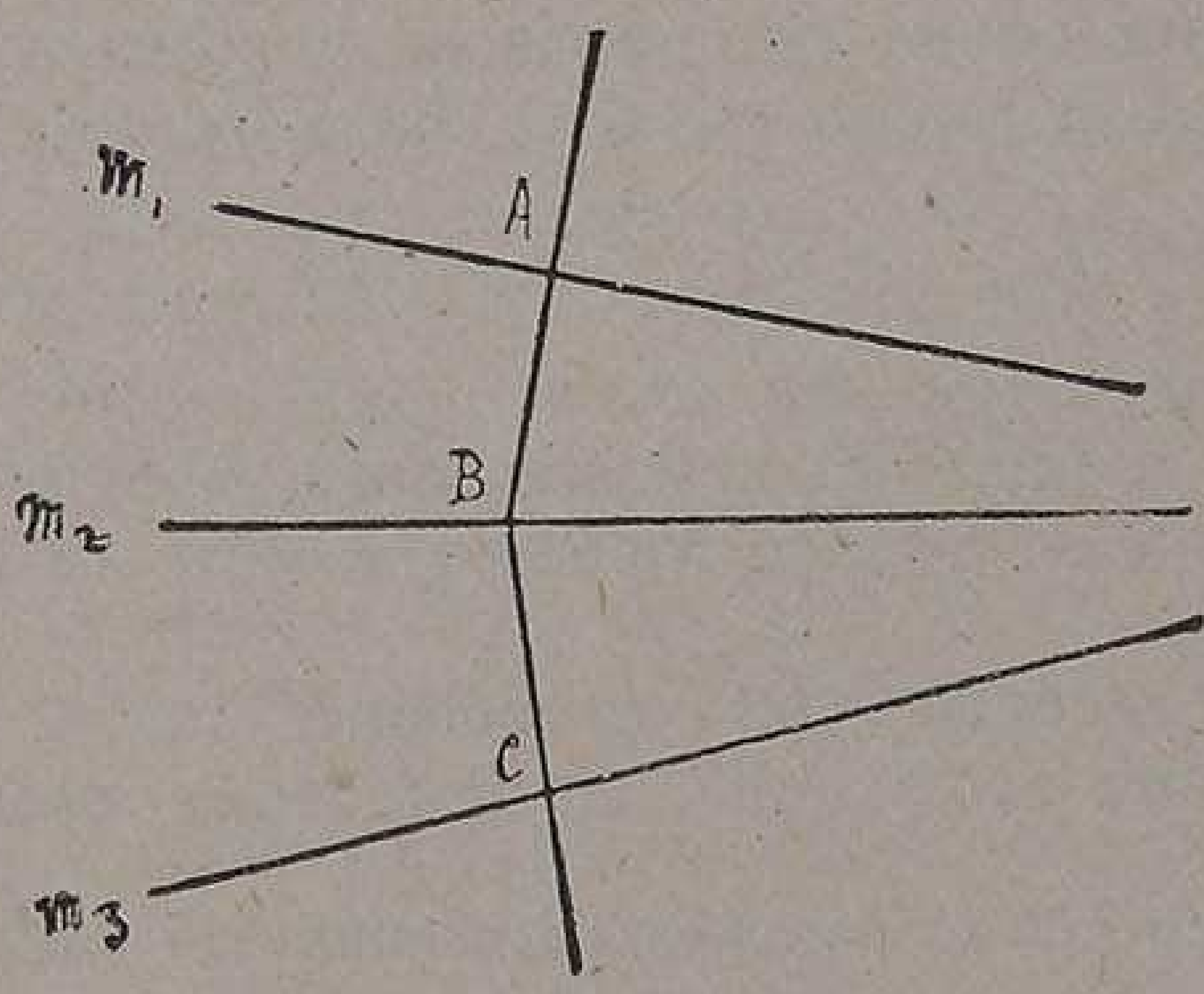


Fig. 23.

una retta; negando l'ipotesi euclidea, si ottiene una linea che ha una certa analogia con la circonferenza, ma che non è una circonferenza. Ed è evidente che *tre qualunque de' suoi punti non appartengono a una circonferenza.* Tale linea può imaginarsi come *limite* di una circonferenza il cui raggio divenga infinito. Gauss trattò la sua geometria anche analiticamente, e nelle sue formule compare una costante k, nota la quale si può risolvere qualunque problema.

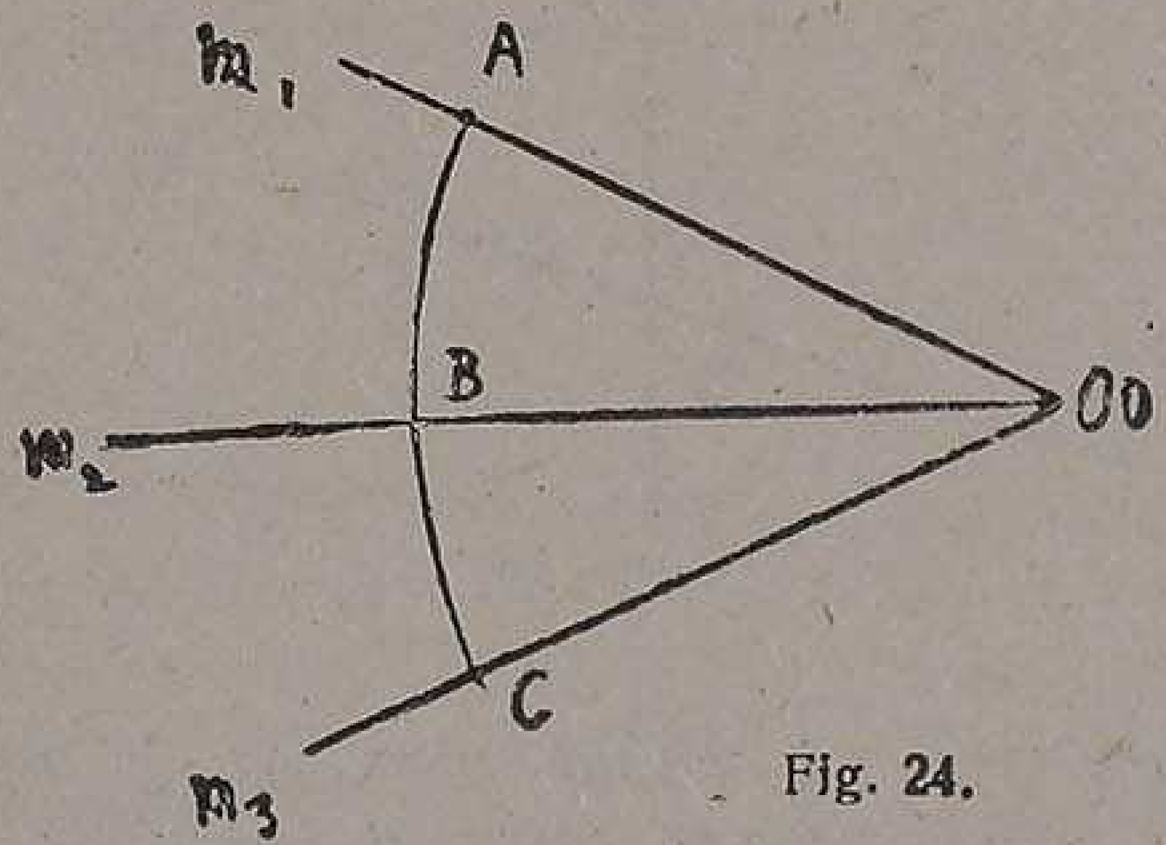


Fig. 24.

In questa nuova geometria la lunghezza della circonferenza di raggio r è data dalla formula

$$\pi k\left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right)$$

Gauss aggiunge che, ove si voglia metter d'accordo la nuova geometria con l'esperienza, bisogna supporre k infinitamente grande rispetto a tutte le grandezze misurabili.

Invero, facendo nella precedente $k=\infty$ si ottiene l'espressione $2\pi r$ della circonferenza ordinaria (1).

(1) Sostituendo a ciascun esponenziale il suo sviluppo in serie, si ha:

$$\pi k\left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right) = 2\pi k\left(\frac{r}{k} + \frac{r^3}{k.3!} + \frac{r^5}{k.5!} + \ldots\ldots\right) =$$
$$= 2\pi r\left(1 + \frac{r^2}{k^2.3!} + \frac{r^4}{k^4.5!} + \ldots\ldots\right)$$

e al limite per $k=\infty$, si ottiene $2\pi r$.

Gauss non proseguì le sue *Meditationes* sulla nuova geometria, perchè nel 1832 conobbe l'opera di GIOVANNI BOLYAI sulla *geometria assoluta.*

2. — *La geometria astrale di* SCHWEIKART. - Contemporaneamente ed indipendentemente dalle ricerche di Gauss. svolse le sue il giurista SCHWEIKART (1780-1857), autore di una *Geometria astrale,* la quale s'identifica facilmente con il sistema geometrico saccheriano e lambertiano nell'*ip. ang. acuto.*

Schweikart spedì a Gauss una lettera nella quale esponeva le seguenti dichiarazioni sulla *geometria astrale:*

« Esistono due tipi di geometria; una geometria in « senso ristretto, la euclidea, e una geometria astrale. « I triangoli di quest'ultima hanno la particolarità che « la somma dei loro angoli non è uguale a due an- « goli retti. Ciò posto, si può rigorosamente dimostrare:

« *a)* che la somma dei tre angoli d'un triangolo è « minore di due angoli retti;

« *b)* che questa somma è tanto più piccola quanto « più grande è l'area del triangolo (1);

« *c)* che l'altezza di un triangolo rettangolo iso- « scele, pur crescendo col crescere dei lati, non può « tuttavia superare un certo segmento che io chiamo « *costante.*

« La geometria euclidea vale nell'ipotesi che la « costante sia infinitamente grande. Solo allora è « vero che la somma dei tre angoli di un triangolo è « uguale a due retti: e ciò si lascia facilmente dimo- « strare ».

Schweikart, nella sua opera, nomina esplicitamente il Saccheri e il Lambert, per cui non v'è alcun dubbio sull'influenza di questi due geometri su di lui.

Gauss ebbe a lodare assai Schweikart, dichiarando di concordare perfettamente in tutto quanto egli svolse

---

(1) Concorda pienamente col teorema di Lambert sulle *deficienze* di un poligono.

nella *Geometria astrale;* anzi compì l'opera risolvendo altre questioni.

Importante è il fatto ch'egli giunse a determinare il *valore limite* dell'area di un triangolo, quando i tre vertici vadano all'infinito, valore espresso dalla formula:

$$\frac{\pi C^2}{\{ log\ ip.\ (1+\sqrt{2}\}^2}$$

essendo C la costante di Schweikart.

È bene insistere sul significato di limite superiore dell'area di un triangolo.

Schweikart fu indotto ad ammettere un limite a tale area, solo come conseguenza dei fondamenti della *geometria astrale.* Ora è noto che Gauss, indipendentemente da qualsiasi postulato in contradizione con l'ipotesi euclidea, aveva intuito a priori la possibilità di un tale limite, negando essere assolutamente vero quello che comunemente viene ritenuto per assioma, cioè che l'area di un triangolo (rettilineo) i cui vertici vadano all'infinito, tenda anch'essa all'infinito. —

A tale riguardo così Gauss si esprime:

« Quasi tutti vorrebbero dare a ciò il titolo di as-
« sioma, io no; *potrebbe infatti accadere che per quanto*
« *lontani fossero fra loro i vertici di un triangolo nello*
« *spazio, la sua area fosse non di meno sempre infe-*
« *riore ad un limite assegnato* ».

La scoperta della *geometria astrale* di Schweikart conferma così effettivamente l'ipotesi gaussiana.

La costante C di Schweikart e la costante k di Gauss (quest'ultima l'abbiamo vista nella formula della lunghezza della circonferenza) sono legate dalla seguente relazione:

$$k = \frac{C}{log\ (1+\sqrt{2})}$$

Finalmente osserviamo che se nella formula del limite superiore dell'area di un triangolo, facciamo

$C = \infty$; cioè, secondo quanto avverte lo stesso Schweikart, supponiamo la costante infinitamente grande rispetto a tutte le grandezze ordinarie, l'area assume anch'essa un valore infinito.

3. — *Sistema geometrico* di LOBACEFSKI. - Tale sistema fu identificato facilmente con quello di Gauss e di Taurinus e con quello di Bolyai che vedremo in seguito. Prima di parlarne dobbiamo riportarci a un argomento già svolto trattando dell'*ip. angolo acuto* del Saccheri.

Siano due rette *a, b* (fig. 25) la prima normale,

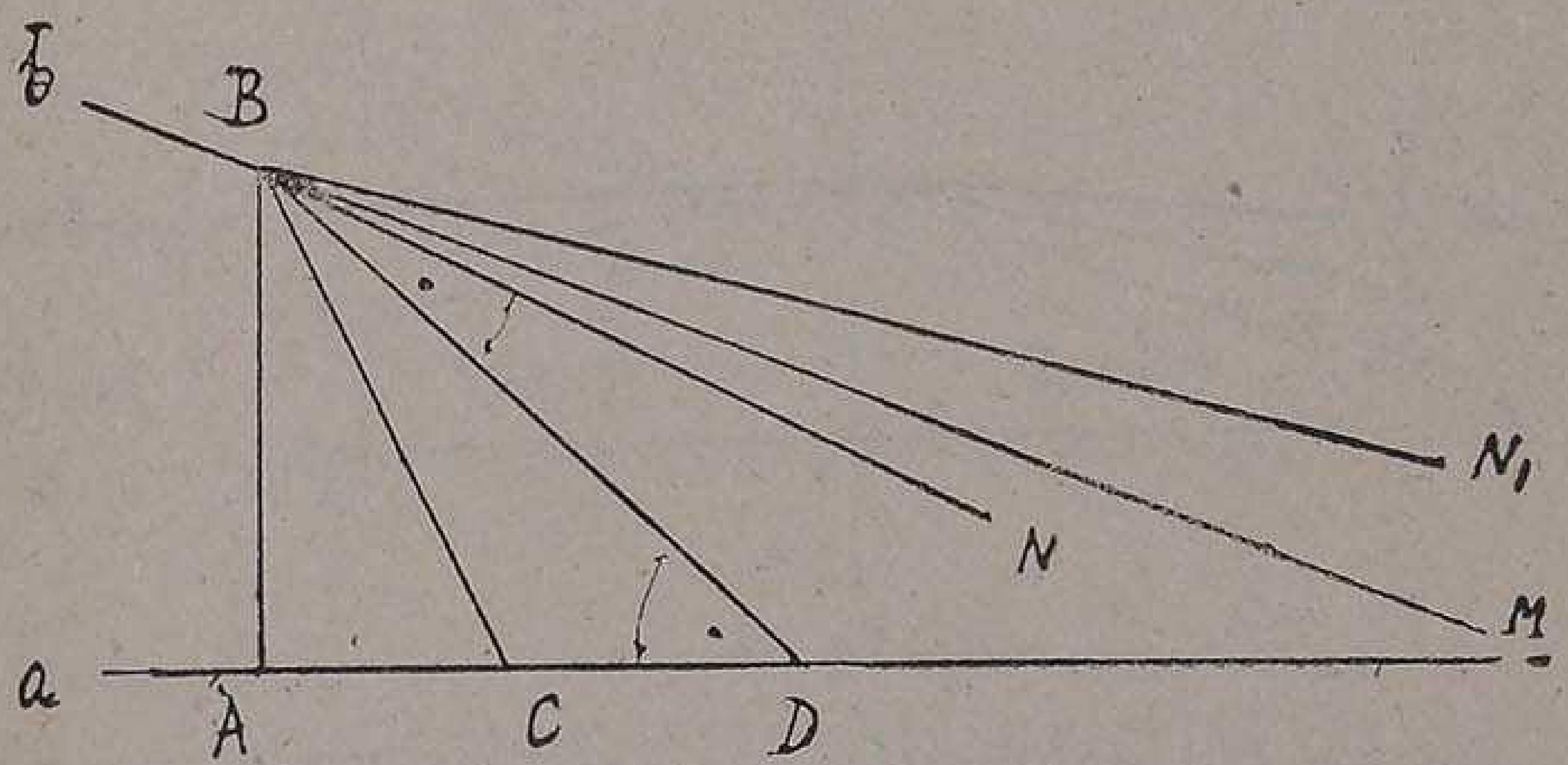


Fig. 25.

l' altra obliqua alla retta *AB*, che non s' incontrano. In tale ipotesi esisterà un certo triangolo *BAC* rettangolo in *A*, tale che sia ang. *BCA* = ang. *CBM*.

Ora, la *posizione relativa* delle due rette date *a, b* può esser tale che *non esista nessun punto* D *sulla retta* a, *per il quale l'angolo* B D A *sia uguale a un certo angolo* D B N, *la retta* B N *essendo compresa nell'angolo* A B M. Allora le rette non incidenti *a, b* s'identificano colle parallele gaussiane, perchè la retta *B N* incontrerà necessariamente la retta *a*.

Il caso particolare della retta *a, b* non esclude però la esistenza di punti come D_1 tali che a ogni triangolo rettangolo $A\,B\,D$, corrisponda una retta come $B\,N$, *esterna* all'angolo $A\,B\,M$ e *non incidente* in a ma tuttavia non parallela alla a.

In altre parole la parallela b alla a separa il fascio delle rette *non secanti* la a dal fascio delle *secanti* la a stessa.

Facendo le medesime considerazioni per il verso di sinistra, risulta:

Presa una retta e un punto fuori di essa, esistono due rette distinte passanti per il punto dato, le quali separano il fascio delle rette secanti la retta data, dal fascio delle non secanti la retta medesima (fig. 26).

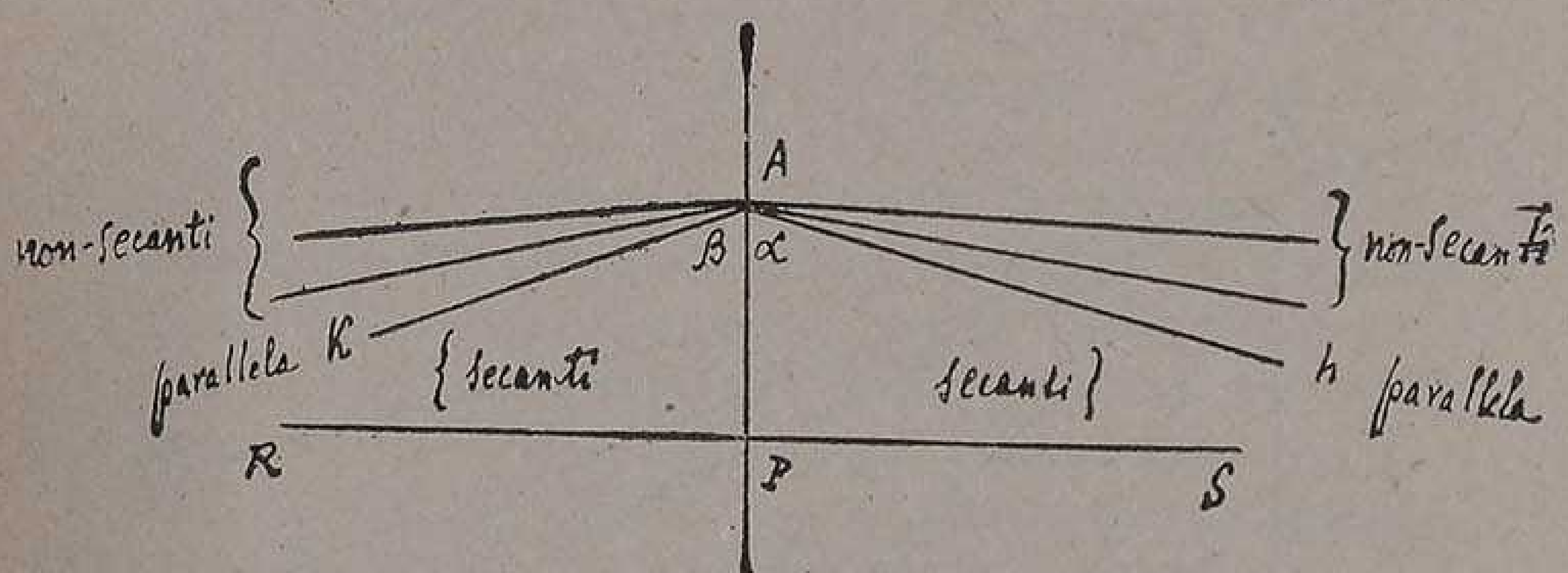


Fig. 26.

Questo è il significato delle parallele di Lobacefski Però in Lobacefski i due versi di parallelismo sono determinati dalla perpendicolare $A\,B$ condotta dal punto A alla retta data $R\,S$, mentre in Gauss la trasversale $A\,B$ non fa un angolo determinato colla retta $R\,S$.

Gli angoli α, β delle due parallele colla normale $A\,B$ si dicono *angoli di parallelismo*.

Inoltre Lobacefski (e qui è la sostanziale differenza dalle parallele gaussiane) introduce il concetto di *distanza di parallelismo*, e trova una relazione fra questa distanza e l'angolo di parallelismo. Così, data una retta $R\,S$ e un punto A fuori di essa, al segmento $a = A\,B$, corrisponde un certo angolo α di parallelismo (fig. 27).

Per indicare l'angolo di parallelismo corrispondente alla distanza a, Lobacefski adopera il simbolo π (a). In Euclide, qualunque sia a, si ha sempre π $(a) = 90°$. In Lobacefski π (a) è una ben determinata funzione di a che tende a 90° quando a tende a zero, e che tende a zero quando a tende all'infinito; cioè, simbolicamente:

$$\lim_{a=0} \pi\ (a) = 90°$$

$$\lim_{a=\infty} \pi\ (a) = 0$$

L'indole del nostro lavoro elementare non ci per-

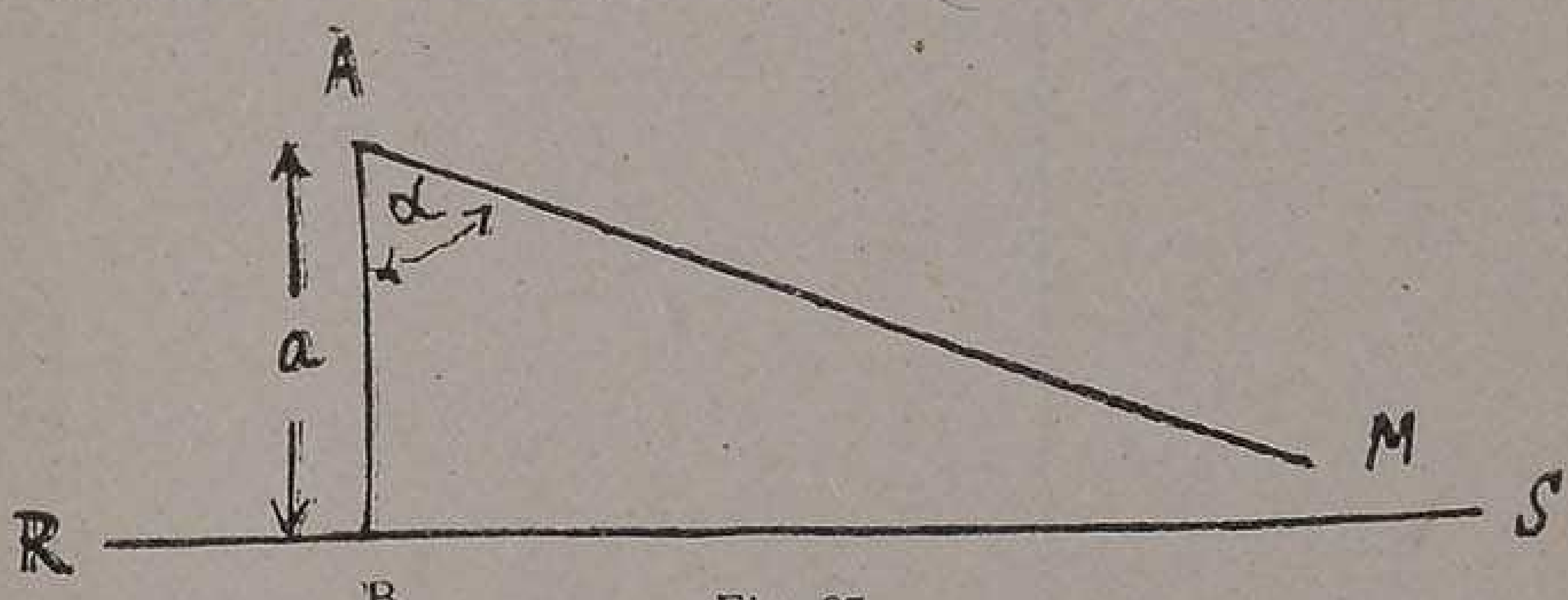


Fig. 27.

mette di esporre in qual modo il geometra russo sia pervenuto alla scoperta così esplicita di questa determinata funzione. Una dimostrazione grafica è nelle figure 28 e 28 a.

È evidente però ch'essa è di capitale importanza, perchè ci permette di costruire effettivamente le parallele, mentre in Gauss bisogna accontentarsi di studiarne le proprietà, *supponendole già costrutte* (1).

---

(1) A tale scopo Lobacefski si serve della relazione seguente da lui trovata, fra la distanza a di parallelismo e il corrispondente angolo α di parallelismo:

$$\text{tang.}\ \frac{1}{2}\alpha = e^{-\frac{a}{u}}$$

dove u è il *parametro* nel piano (cfr. Taurinus) corrispondente al sistema lobacefskiano, e che si può concepire come *il limite delle lunghezze che si sanno costruire.*

Alle parallele lobacefskiane rimangono tutte le proprietà delle parallele gaussiane (*reciprocità*, ecc.) che abbiamo dimostrato.

La teoria delle parallele nel sistema Lobacefski (sistema esposto nella sua opera *Pangeometria* o *Geometria imaginaria*) è preceduta dai teoremi sui triangoli, quelli stessi già enunciati dal Legendre, dal Lambert, e prima ancora dal Saccheri *nell'ip. angolo acuto*.

Ora occorre rilevare un'altra importantissima pro-

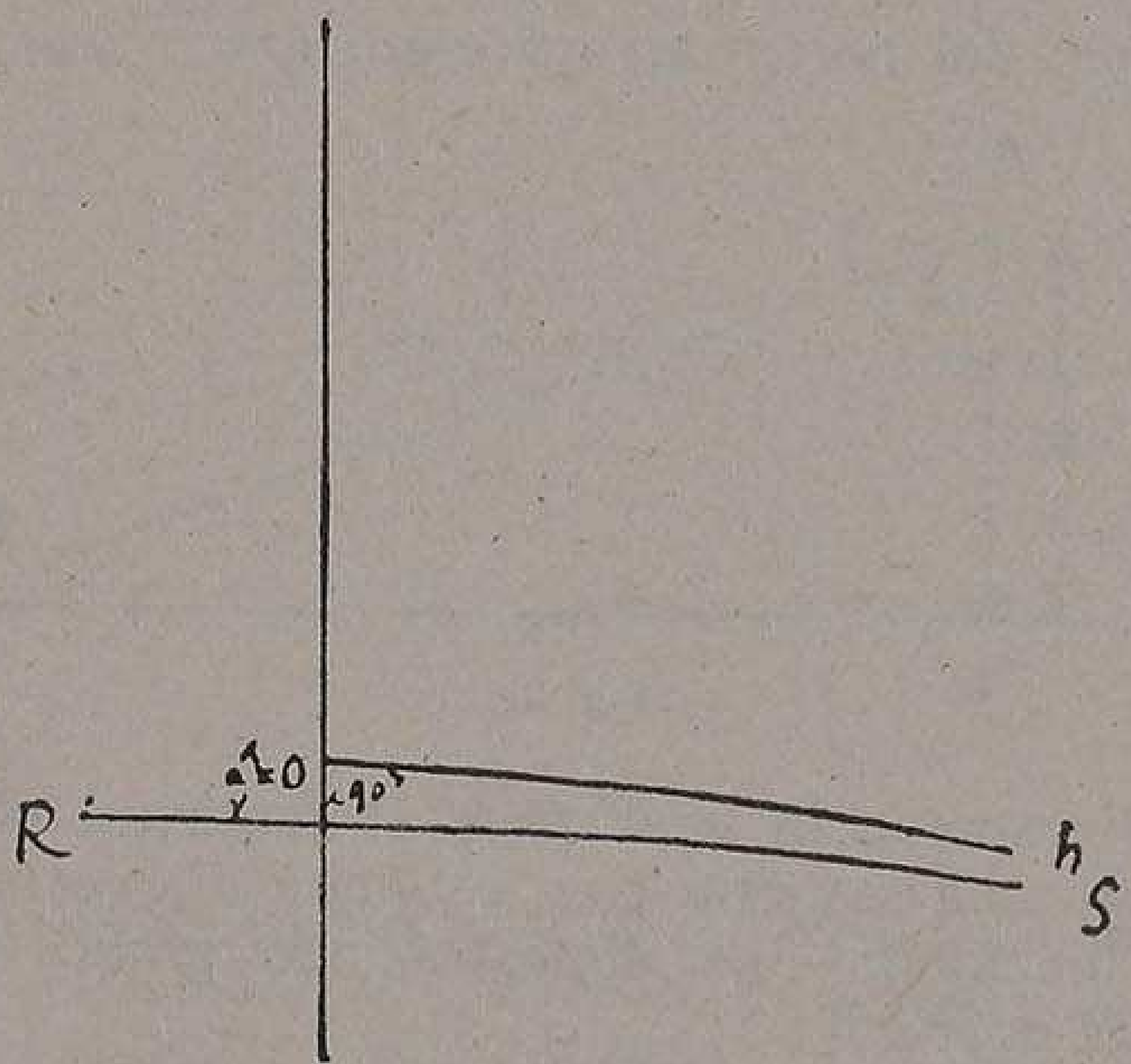


Fig. 28.

prietà delle parallele lobacefskiane, già espressa da Gauss nelle sue *Meditationes* e persino dal nostro Saccheri; cioè il carattere *asintotico* di due parallele.

Dimostreremo cioè che la distanza dei punti di una retta da quelli della sua parallela può rendersi più piccola di quanto vuole.

Siano a, b due parallele Da un punto A della prima, caliamo AB perpendicolare alla seconda. Per la relazione ora esposta che legano l'angolo α di parallelismo alla distanza AB di parallelismo, avremo che, essendo il segmento AB finito e diverso da zero, l'angolo α sarà compreso fra 0° e 90°; e perciò sarà acuto. Analogamente, se da un secondo punto A' di a caliamo $A'B'$ normale a b, l'angolo α' sarà acuto. Allora l'angolo β adiacente sarà ottuso; e perciò nel quadrilatero $ABB'A'$ birettangolo in B e B' il lato $A'B'$ è minore

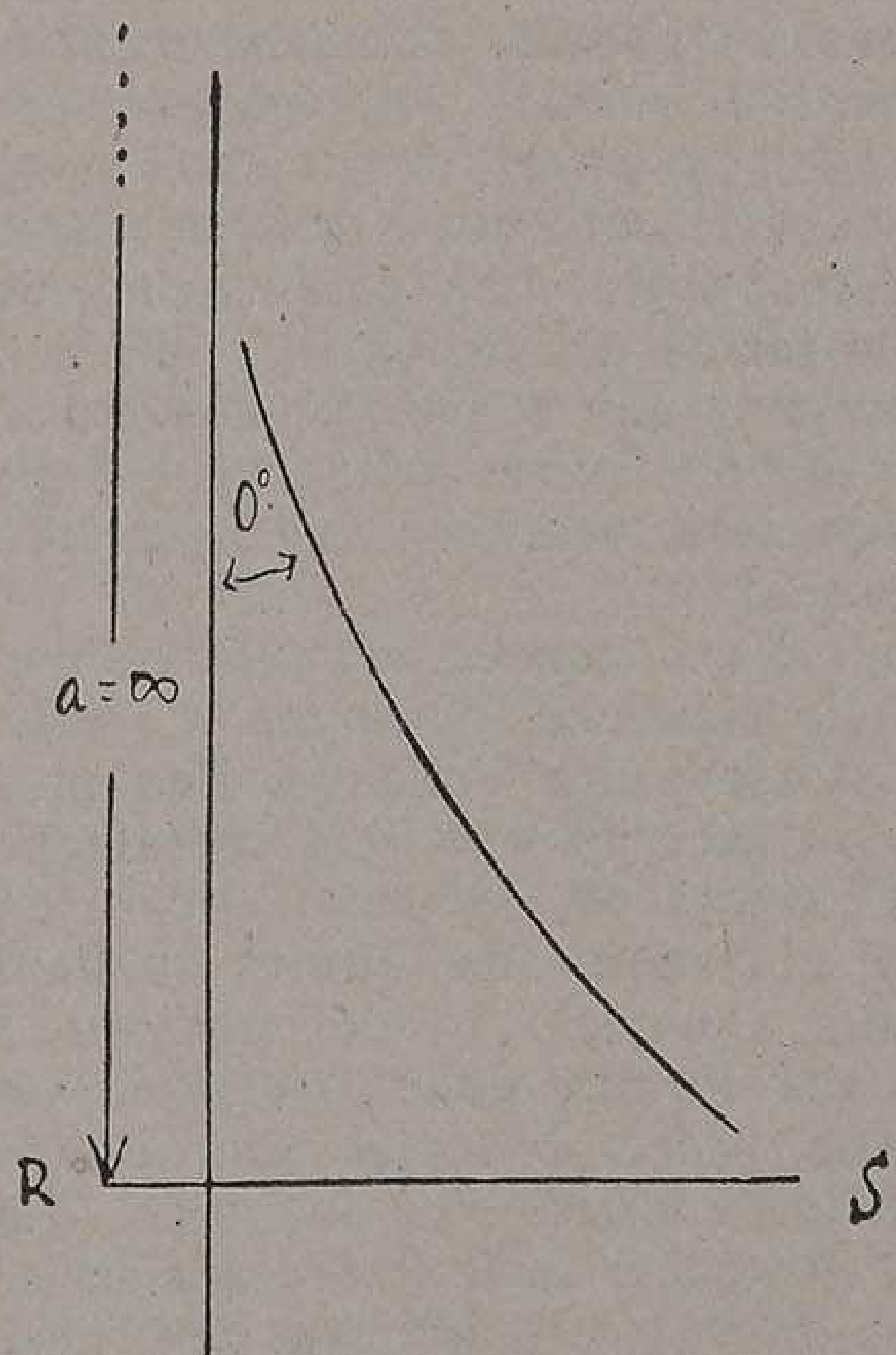


Fig. 28 *a.*

del lato AB *(lemma di Saccheri)*. Similmente, se si ripetono le stesse considerazioni per il quadrilatero birettangolo $A'B'B''A''$, risulta $A''B'' < A'B'$; e così via. Dunque le distanze AB, $A'B'$, $A''B''$.... dei punti di a da quelli di b vanno sempre decrescendo; d'altra parte non potranno mai diventare nulle, per il fatto stesso che le rette a, b sono parallele. Con ciò è dimostrato il loro asintotismo.

4. — Giovanni Bolyai. - Dell'opera di Giovanni Bolyai è inutile parlare per esteso, perchè giungeremmo alle medesime conclusioni già trovate da Gauss e da Lobacefski. Le ricerche di Bolyai sono nella sua famosa opera *La geometria assoluta*, pubblicata nel 1832 come appendice ad un' opera del padre Wolfango. È scritta in latino. Il titolo merita di essere ricordato; è il seguente: *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidis (haud a priori decidenda) independentem;* cioè: « Appendice nella quale si espone la scienza dello spazio *assolutamente vera* ed indipendente dalla verità o dalla falsità dell'assioma XI di Euclide (1), falsità che tuttavia non si può riconoscere a priori ».

Daremo alcune notizie della vita del grande matematico ungherese, perchè è una figura originalissima ed interessante.

Giovanni Bolyai nacque nel 1802; ebbe i primi rudimenti nelle classiche discipline e nelle matematiche dallo stesso padre Volfango. Ben presto il genitore ebbe ad accorgersi di una meravigliosa disposizione di Giovanni per le matematiche; enunciato un teorema, il giovanetto ne intuiva subitamente la dimostrazione. Cominciò i suoi studî su Euclide per darsi poi alla lettura delle opere di Gauss ch'era amico di suo padre. A dodici anni era versatissimo nel calcolo differenziale ed integrale. Conservò parimente il gusto per la letteratura classica: ne' suoi componimenti letterarî imitava con facilità ed eleganza lo stile conciso e robusto di Tacito. Coltivò con buon successo anche la musica, sì da divenire uno dei più eccellenti virtuosi di violino. Entrato non ancora ventenne nell'Accademia militare dell'esercito austriaco a Vienna, superò i suoi compagni nello studio delle lettere e della matematica; nè era ad alcuno secondo negli esercizî ginnastici e sportivi, spe-

(2) In alcuni trattati, il V postulato sulle parallele era anche detto *assioma XI di Euclide*.

cialmente nel tirare di scherma; la quale ultima passione lo portò talvolta a conseguenze non belle.

Fin da quando era in famiglia, concepì il disegno di dimostrare il quinto postulato, sebbene da ciò il padre lo avesse più volte distolto. In queste sue prime ricerche fu aiutato da un suo giovane amico il quale poi abbandonò gli studî della matematica per quelli delle leggi. Ma senza frutto furono le discussioni che si svolsero fra i due amici. Fu solo nell' Accademia, quando aveva all'incirca ventidue anni, che Giovanni riuscì a gettare le basi positive del suo nuovo edifizio geometrico. Quale fosse la gioia del giovane matematico si può facilmente comprendere: aveva finalmente risolto un problema la cui soluzione era per lui un incubo continuo. Spedì al padre il manoscritto, esprimendo in modi assai vivaci la propria soddisfazione. Fra l'altro Bolyai dice: *Ho creato dal nulla un nuovo mondo;* intendeva cioè dire come egli avesse costruito la sua nuova geometria senza il soccorso di alcuna teoria precedente, ma solo partendo da principî logici appartenenti alla pura intuizione. Il padre spedì il pacco a Gauss. La risposta che Gauss dette a Volfango fu, in sostanza, la rovina del giovane matematico.

La lettera di Gauss cominciava a un dipresso così: « Se comincio col dirvi che non posso lodare l'opera di vostro figlio Giovanni, non vi meraviglierete, perchè sarebbe lo stesso che lodare l'opera mia. » E proseguiva accennando alla sua opera sulle parallele e alle ricerche svolte nelle *Meditationes,* di cui abbiamo già parlato, per terminare col dire che le conclusioni a cui era giunto Giovanni erano già state da lui molto tempo prima scoperte.

Tuttavia Gauss riconobbe un merito nell'opera di Bolyai: perchè, venuto a conoscenza dell'*Appendix*, si astenne dal pubblicare le sue ricerche non solo perchè la loro pubblicazione, dopo il lavoro di Bolyai, non avrebbe avuto il pregio dell'originalità, ma sopratutto perchè la geometria assoluta di Bolyai era un' opera completa e perfetta dove i fondamenti della nuova scienza venivano esplicitamente ed arditamente esposti in modo affatto razionale. La qual cosa non si poteva dire per l'opera gaussiana sulle parallele, consistente più che altro in pochi frammenti ed abbozzi schematici della nuova dottrina. Volfango Bolyai cercò in tutti modi di diminuire nel figlio la dolorosa sorpresa, e per consolarlo gli scrisse che in fondo era orgoglioso di lui che aveva saputo concepire da solo quanto era stato immaginato da una mente come quella di Gauss, e che questo fatto tornerebbe ad onore di tutta l'Ungheria.

Ma ben altro furono le impressioni del figlio il quale, non certo persuaso della verità del noto proverbio francese: *les beaux esprits se rencontrent*, sospettò che il padre nelle sue corrispondenze con Gauss gli avesse comunicato le sue ricerce sulla geometria assoluta, e che Gauss si vantasse poi di avere, da solo, tratte le originalissime conseguenze di tale disciplina.

Da questo momento la mente del giovane cominciò sensibilmente a turbarsi; concepì un'avversione ingiustificabile per Gauss, e la mantenne per tutta la vita.

Divenuto di carattere irascibile, ebbe parecchi duelli con i suoi colleghi dell' Accademia e dell'esercito. Tornato in famiglia stette in continua lite col padre, fino a che un giorno arrivò a sfidarlo a duello!

Tuttavia, saputo che Gauss si asteneva dal pubblicare le sue *Meditationes*, si accinse alla pubblicazione della sua geometria; per consiglio del padre la scrisse in latino, come la lingua ch'era più diffusa fra i dotti dell'Ungheria.

Ma nè la soddisfazione che da tale pubblicazione doveva derivargli, nè la gloria e la fama che glie ne vennero, valsero a modificare il suo carattere divenuto ormai ipocondriaco e misantropo.

Ritiratosi a vita privata, conduceva i giorni disordinatamente: talvolta gli atteggiamenti della sua mente prendevano la forma della pazzia.

Concepiva i disegni più assurdi: fra l'altro ideò un sistema di scrittura universale basato sui simboli musicali; sistema che poi si riconobbe assolutamente inattuabile. Parecchi anni avanti la sua morte (morì nel 1860) si era fatto construire il cataletto nel quale soleva riposare; nel suo testamento lasciò scritto che sulla tomba venisse scolpito un pomo in memoria di Eva, di Paride e di Newton.

Ma forse abbiamo già troppo detto della figura di Bolyai, e il lettore vorrà perdonarci questa piccola digressione. Aggiungeremo qualche considerazione generica sulla *geometria assoluta*.

Come è detto nel titolo, le proposizioni che vi sono messe in rilievo sono dimostrate indipendentemente dall'enunciato euclideo.

Bolyai non si preoccupa della verità o della falsità del quinto postulato, ma tratta la geometria in un modo più generale, formando cioè una scienza *assoluta* dello spazio, nel senso etimologico della parola (1): una scienza geometrica non soggetta ai vincoli che derivano dall'ammissione del postulato sulle parallele. Se tale postulato sia vero o falso, poco importa all'autore, perchè la sua geometria ne è indipendente. Ammesso questo, egli enuncia alcuni teoremi generali, fra i quali notissimo è il seguente:

Le circonferenze che hanno per raggio i lati di un triangolo, stanno fra loro come i seni degli angoli opposti.

Bolyai termina la sua *Appendix* colla risoluzione della *quadratura del cerchio;* mostrando così che tale problema è *assolutamente* possibile, e che è invece impossibile se si accetta il quinto postulato.

5. — Bernardo Riemann. - Ed ora occupiamoci del sistema geometrico di Riemann (1826-1866) che

---

(1) *Absolutus* vuol dire appunto disciolto, senza vincoli.

s'identifica con quello fondato sull'ipotesi del Saccheri dell'angolo ottuso e con quello del Lambert.

Consideriamo due rette (fig. 29) poste nello stesso piano ed aventi una perpendicolare comune. Costruiamo, come abbiamo fatto nell'ip. ang. acuto, i quadrilateri isosceli successivi 1, 2, 3..... È facile dimostrare che in questa nuova ipotesi i lati $A\,B$, $A'B'$, $A''B''$..... vanno sempre diminuendo sino ad annullarsi. Per tanto concludiamo:

Nella geometria di Riemann due rette complanari e perpendicolari ad una stessa retta si segano in due punti separati dalla perpendicolare comune.

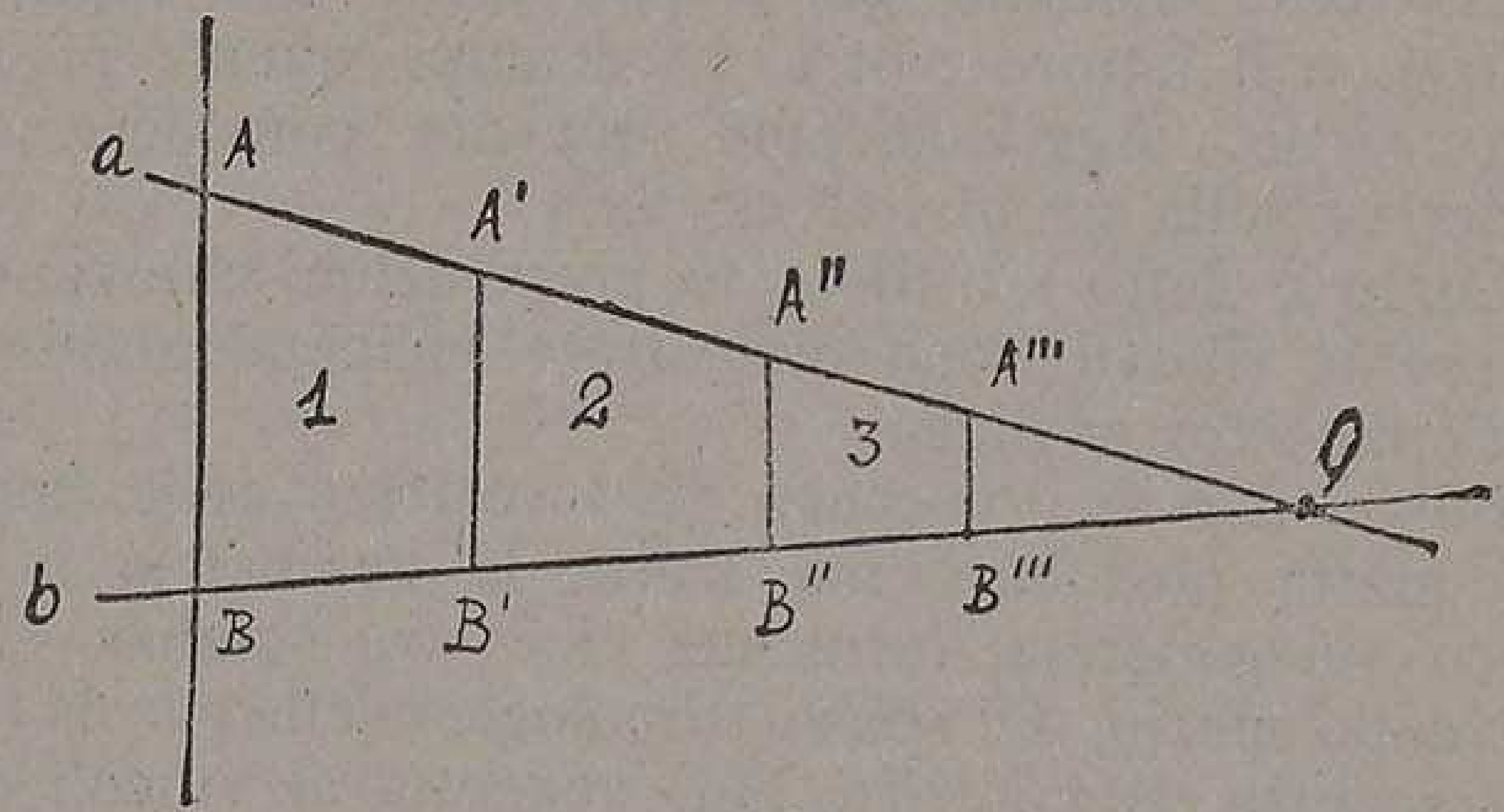


Fig. 29.

I punti O, O' nei quali si tagliano le due rette si dicono *punti opposti*. Essi debono concepirsi come situati ad una distanza *superiore a qualsiasi lunghezza ordinaria ad arbitrio;* ma sono punti effettivi della retta, per quanto non ci sia permesso raggiungerli.

Potrebbero anche dirsi punti *assoluti* della retta, in quanto che la loro esistenza è *assolutamente* logica e indipendente dal fatto che non si possono meccanicamente costruire o solamente raggiungere. Notiamo una certa analogia fra i punti opposti e il punto all'infinito della geometria ordinaria.

Nella geometria ordinaria, date due rette complanari e aventi una perpendicolare comune e quindi parallele nel senso euclideo, si *ammette* che si seghino in un punto che si dice all'infinito.

In Riemann però i punti opposti non sono introdotti per convenzione o per una certa generalizzazione come si è fatto nella geometria ordinaria, ma esistono effettivamente sulla retta.

Posto questo dimostriamo che in Riemann due rette qualunque in un piano sono sempre secanti.

Siano *a, b* due rette complanari (fig. 30). Da un punto *A* della prima caliamo *A B* normale alla seconda.

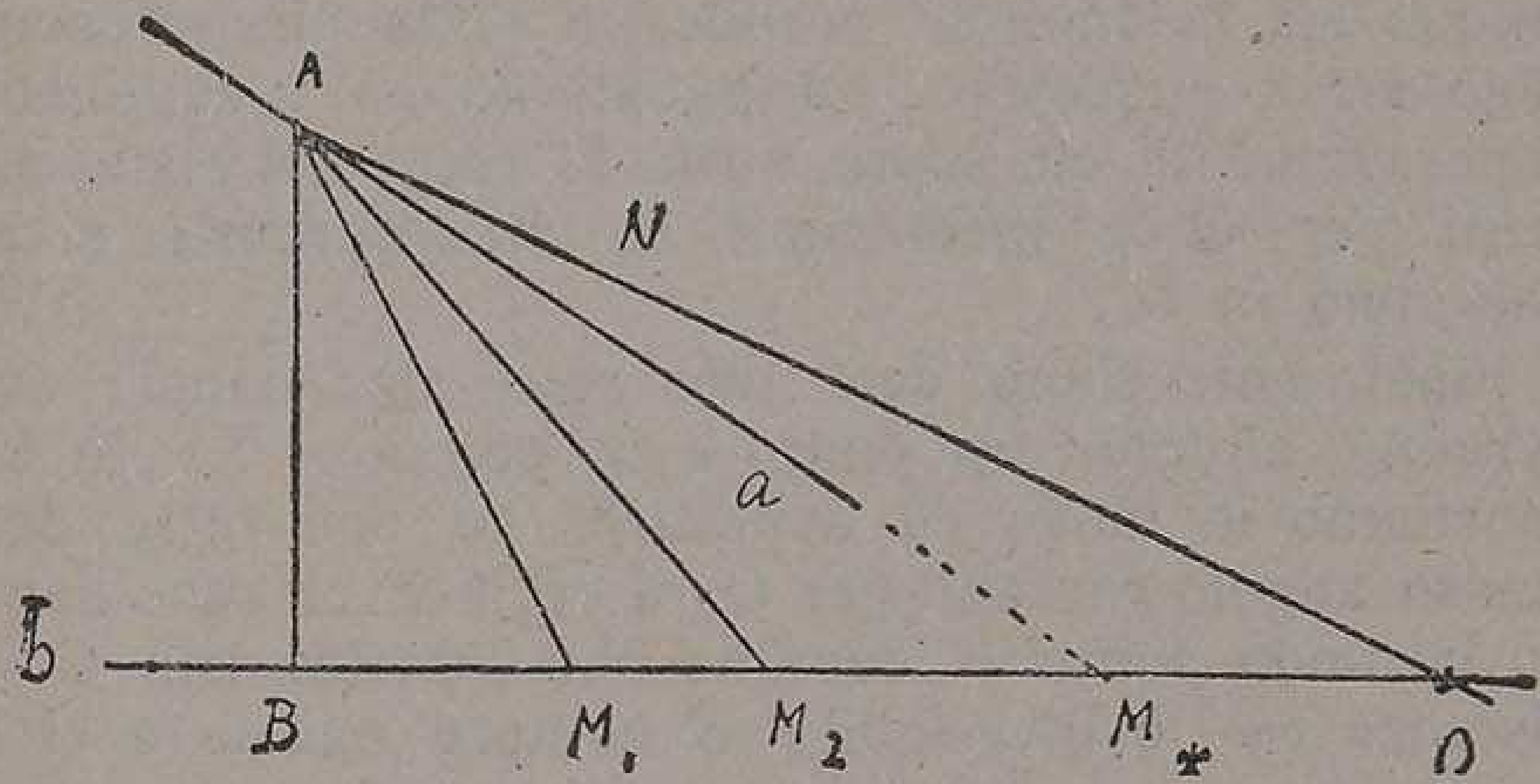


Fig. 30.

innalziamo poi da *A* la perpendicolare *N* alla *A B;* le rette *b* ed *AN* si segheranno allora nel punto assoluto *O*.

Consideriamo ora un raggio mobile per *A*, compreso nell'angolo retto *B A N*. Ad ogni posizione di questo raggio corrisponde sulla retta *b* un certo punto *M*, compreso fra *B* e *O*.

Dunque quando il raggio mobile coinciderà colla retta *b* corrisponderà su questa un certo punto *M* compreso fra *B* ed *O*. Le rette *a, b* per tanto si segano necessariamente in questo punto.

Si vede così che l'ipotesi saccheriana dell'angolo ottuso porta a un sistema geometrico sul quale non esiste il parallelismo.

Seguono ora alcune proprietà della retta riemannniana; tralasciamo la dimostrazione di quest'ultima poichè se ne può fare a meno, dopo quanto abbiamo esposto.

Abbiamo due rette AB, CD entrambe normali a una stessa retta, e siano O, O' i punti nei quali le rette si segano. Se da O come centro e con raggio ad arbitrio descriviamo una circonferenza che le tagli in a, b e dividiamo l'arco $a\,b$ in n parti uguali, le rette che congiungono il punto O con i punti di divisione dell'arco, incontrano nell'altro punto O', qualunque sia n. Inoltre, prendendo sulla circonferenza degli archi successivi ed uguali ad ab e applicando l'operazione di cui sopra, tutte le rette del piano passanti per O e incontranti la circonferenza, si segheranno in O'.

Finalmente siano date due rette qualsiansi: esse avranno almeno un punto ω in comune. Se le trasportiamo in modo da applicarle su due rette dello stesso angolo passanti per O, si verifica ch'esse hanno un secondo punto ω' comune che coincide con O. La distanza $\omega\omega'$ è invariabile e sempre eguale a OO'; indichiamola con 2Δ. *La retta riemanniana è dunque finita* (1), come una circonferenza, e la sua lunghezza totale è 4Δ; ω e ω' sono detti *punti opposti.*

Il piano riemanniano si presenta così come analogo ad una superficie sferica. Le rette sarebbero i cerchi massimi della sfera, i *punti opposti* i poli. La perpendicolare comune a due rette sarebbe il cerchio massimo contenuto nel piano perpendicolare alla retta che unisce i punti opposti, cioè i poli. Vi sono ancora altre analogie. Sopra una sfera, due punti qualsiansi determinano pienamente un cerchio massimo, per il fatto che il suo piano passa per un terzo punto che è il centro della sfera. Ma per i poli della sfera passano un'infinità di cerchi. Così nel piano riemanniano due punti qualsiansi A, B, la cui distanza sia di-

(1) *In* senso assoluto, s'intende.

versa da 2Δ individuano una retta; ma se $AB = 2\Delta$, abbiamo visto che per A, B passano infinite rette, aventi tutte una normale comune.

S'intende che tale analogia va concepita con una certa larghezza, e noi l'abbiamo mostrata unicamente per facilitare la concezione del piano riemanniano.

È notevole il fatto che, nelle regioni normali del piano, le rette riemanniane conservano alcune delle caratteristiche fondamentali della retta euclidea, come quella dell'individuazione per mezzo di soli due punti; se invece ci mettiamo da un punto di vista dal quale si possa abbracciare tutto il piano riemanniano, allora le rette non conservano più tali proprietà.

CAPITOLO IV.

I sistemi geometrici in generale.

1. — *Osservazioni preliminali.* - È opportuno rilevare la distinzione fra *sistema geometrico* e *sistema logico* (o filosofico). Se per sistema geometrico s' intende un qualunque sistema logicamente accettabile il quale esponga relazioni di posizione e relazioni metriche fra le figure geometriche, relazioni che alle volte implicano una deformazione nella natura delle figure stesse quali da noi ordinariamente si concepiscono, possiamo a priori rispondere che è lecito ammettere l'esistenza di altri sistemi geometrici diversi da quelli esposti. Ma se, circoscrivendo alquanto il campo delle ricerche, intendiamo rispettati certi concetti primitivi e fondamentali, negando i quali o anche soltanto modificandoli, si andrebbe fuori della geometria propriamente detta, per entrare nel campo della logica pura, allora dobbiamo concludere non esistere altre geometrie all'infuori di quelle di Lobacefski (Gauss, Bolyai) di Riemann e di Euclide.

Questo ha dimostrato il matematico belga De Tilly, partendo dal *concetto di distanza*, ch'egli assume come concetto intuitivo e comune e a qualsiasi sistema geometrico logicamente conseguente.

Esporremo brevemente la questione.

2. — *Il concetto di distanza.* - La nozione di distanza può essere considerata, per noi, come una di quelle forme *prime e fondamentali* della conoscenza che la più semplice esperienza ci rivela, poichè vi siamo condotti paragonando, per mezzo di un oggetto *campione*, gl' intervalli relativi dei punti di un solido ritenuto invariabile. Ogni intervallo fra due punti corrisponde per tanto ad un *numero* (razio-

nale o irrazionale), e noi diciamo per convenzione che tale numero è la *misura della distanza* fra i due punti.

Ora bisogna ammettere che in qualunque sistema completo e razionale di geometria devono esistere, fra le distanze delle coppie di punti dello spazio, delle *relazioni generali* di una certa forma; il numero degl'intervalli che figura in ciascuna di queste relazioni è in rapporto col numero di dimensioni dello spazio che si studia. Per esempio, nello spazio a una dimensione *(linea)*, vi è una e una sola relazione generale fra le tre distanze di tre punti qualsiansi 1, 2, 3 di questo spazio. Invero, ve n'ha almeno una: senza di che, uno degl'intervalli essendo preso come campione, gli altri due sarebbero misurati rispetto ad esso da numeri arbitrarî, il che è inamissibile; inoltre non può esistere che una sola relazione, perchè se ve ne fossero due, preso come campione uno degl'intervalli, questo determinerebbe completamente gli altri due; o, in altre parole, dati i punti 1, 2, gl'intervalli 1—3, e 2—3 sarebbero costantemente rappresentati dagli stessi numeri, qualunque fosse il punto 3.

Similmente, nello spazio a due dimensioni *(superficie)*, vi è una e una sola relazione generale fra le sei distanze di quattro punti qualunque; e nello spazio a tre dimensioni, il più generale che noi dobbiamo considerare qui, vi è una e una sola relazione fra le dieci distanze di cinque punti qualunque.

3. — Il problema di tale relazione unica e generale è stato oggetto di studio, prima ancora del De Tilly, di Lagrange e di Cayley per lo spazio euclideo, e poi di Schering per lo spazio non-euclideo. Ma si deve sopratutto a De Tilly la risoluzione completa dell'argomento.

Il De Tilly ha dimostrato che la relazione generale fra le dieci distanze di cinque punti nello spazio a tre dimensioni *non può esser posta che sotto due* *forme distinte,* le quali egli esprime con due determinanti eguagliati a zero:

$$\Delta(\varphi_{\mathrm{I}}) = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\Delta(\varphi_{\mathrm{II}}) = 0 \qquad \text{(II)}$$

dove ϕ_{I} e φ_{II} sono due funzioni incognite che indicano la relazione di distanza fra due punti qualsiansi dello spazio; per es. fra il punto 1 e il punto 2, la φ_{I} avrà il valore $\varphi(1,2)$; fra il punto 2 e il punto 3, $\varphi(2,3)$ ecc. e analogamente per la φ_{II}.

La prima φ_{I} che verifica il determinante primo deve esser tale che, se definiamo ciascun punto del sistema con tre numeri (coordinate) x, y, z e indichiamo con ε il valore ± 1, si abbia fra due punti p, q del sistema

$$\varphi_{\mathrm{I}}(p\,q) = \frac{1 + \varepsilon(x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q}{\sqrt{\{1 + \varepsilon(x^2{}_p + y^2{}_p + z^2{}_p)\}\{1 + \varepsilon(x^2{}_q + y^2{}_q + z^2{}_q)\}}}$$

nel quale i radicali devono essere positivi: quanto alla funzione φ_{II} che verifica il determinante (II), essa dev'esser tale che fra due punti p e q abbia il valore

$$\varphi_{\mathrm{II}}(p\,q) = \sqrt{(x_p - x_p)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2}$$

De Tilly ha dimostrato che se esistessero delle altre forme diverse dalle (I) e (II) per rappresentare un sistema di cinque punti, *la loro scoperta non condurrebbe ad un nuovo sistema di geometria distinto da quelli che risultano dalle funzioni già trovate.*

La prima φ_{I} si riferisce allo spazio non-euclideo e precisamente per $\varepsilon = 1$ si ha lo spazio riemanniano; per $\varepsilon = -1$ si ha quello di Lobacefski (Bolyai, Gauss). Inoltre la φ_{I} deve esser tale che sia

$$\varphi_{\mathrm{I}}(1,1) = \varphi_{\mathrm{I}}(2,2) = \varphi_{\mathrm{I}}(3,3) = \ldots\ldots \varphi_{\mathrm{I}}(5,5) = 1.$$

La φ_{II} si riferisce allo spazio euclideo e dev' esser tale che sia

$$\varphi_{\mathrm{II}}(1,1) = \varphi_{\mathrm{II}}(2,2) = \ldots\ldots \varphi_{\mathrm{II}}(5,5) = 0.$$

4. — *Obiezioni alle nuove geometrie.* - Da quanto esponemmo nei precedenti capitoli, si vede che se è stato possibile spingere fin dove si è voluto e senza nessun impedimento logico l'analisi delle figure geometriche non-euclidee, pure qualcuna di esse presenta delle proprietà assai strane quando vengano paragonate alle proprietà delle figure analoghe della geometria ordinaria.

Per esempio, nella geometria lobacefskiana e bolyaiana esistono una perpendicolare e un'obliqua a una stessa retta che non s'incontrano; di più, due rette parallele hanno un comportamento asintotico; e ancora: due rette di un piano aventi una perpendicolare in comune divergono nei due sensi. Le parallele che si possono condurre per un punto ad una retta data sono quindi infinite. Invece, nella geometria riemanniana non esistono parallele, e due rette di un piano aventi una perpendicolare comune si segano in due punti separati dalla perpendicolare stessa.

Tali proprietà, senza alcun dubbio paradossali e contrarie alla natura delle forme geometriche, hanno dato luogo a diverse ed ingegnose obiezioni da parte di alcuni geometri, allo scopo di concludere sulla verità assoluta del quinto postulato, indimostrabile per via diretta.

Ed invero alcuni hanno enunciato il seguente principio: che una scienza geometrica, anche intesa nel senso più vasto nella parola, non ha diritto di modificare la natura degli enti che studia, a meno che non si avverta esplicitamente a priori che tali enti sono suscettibili di deformazione. Ora Lobacefski, Bolyai e Riemann non hanno fatto alcuna dichiarazione a tale riguardo; essi, al prinpipio delle loro opere, mantengono alla retta e al piano il carattere e le proprietà euclidee, per giungere poi ad attribuire alle forme stesse proprietà che, come abbiamo visto, sono così contrarie alla loro natura da ammettere necessariamente una deformazione nelle medesime.

5. — *La forma geometrica nel nostro universo.* - Tuttavia si possono opporre, agli oppositori della nuova dottrina, argomenti altrettanto giusti e non meno persuasivi.

Cominciamo col dire che il torto principale di questi contradditori sta nel considerare la forma geometrica del nostro universo come *obiettivamente* euclidea, e conseguentemente nell'attribuire alle figure geometriche proprietà non suscettibili di modificazioni e non diverse da quelle che ci rivelano l'esperienza dei sensi. Ed infatti, si può affermare senz'altro che il nostro universo sia veramente euclideo? e bisogna unicamente attribuire all'imperfezione dei nostri strumenti di misura le differenze, per quanto piccole, che noi constatiamo sempre fra i risultati teorici e quelli dell'esperienza? È lecito dubitarne.

Dal fatto che il sistema cercato di geometria non presenta alcun carattere di necessità a priori, la più completa riserva non può che imporsi riguardo alle conclusioni da trarre dalle nostre misure.

Secondo il filosofo Reid, un uomo ridotto al semplice senso della vista e che non potesse concepire che lo spazio a due dimensioni, prenderebbe per delle rette ciò che in realtà sarebbero degli archi di cerchio massimo tracciati su una sfera della quale egli occupasse il centro; per un tal uomo, evidentemente, il mondo fisico sarebbe costruito secondo la concezione riemanniana.

Immaginiamo con Poincaré, una sfera S, limitante un mezzo il cui indice di rifrazione e la temperatura siano variabili; e in questo mezzo degli oggetti mobili, i cui spostamenti siano troppo lenti e i calori specifici troppo deboli, perchè essi possano mettersi immediatamente in equilibrio colla temperatura ambiente. Se questi oggetti hanno lo stesso coefficiente di dilatazione, la lunghezza d'uno qualunque fra essi può definire la temperatura.

Ammettiamo che indicando con R il raggio della sfera, e φ la distanza di un punto del mezzo al centro, la temperatura assoluta e l'indice di rifrazione siano rispettivamente misurati in questo punto da

$$R^2 - \rho^2 \quad e \quad \frac{1}{R^2 - \rho^2}$$

Se degli esseri intelligenti (1) abitassero un mondo simile, essi crederebbero necessariamente:

I. - che le dimensioni degli oggetti mobili non hanno variato, perchè hanno cambiato nello stesso rapporto;

II. - che la sfera *S* ha un raggio infinito, perchè più gli oggetti si avvicineranno alla periferia, e più i loro movimenti saranno lenti in seguito al raffreddamento che proveranno;

III. - che le circonferenze ortogonali alla sfera *S* sono delle rette perchè sono le traiettorie dei raggi luminosi, e d'altra parte gli oggetti fuori della sfera *S* rimangono invisibili;

IV. - che in un triangolo rettilineo la somma degli angoli è minore di due retti, perchè questa è una proprietà dei triangoli curvilinei formati da tre cerchi ortogonali a *S*.

In conseguenza, questi esseri non potrebbero adottare che la geometria di Lobacefski.

(1) Purchè dotati di psiche analoga alla nostra; se non si suppone questo non è lecito trarre le conseguenze che seguono.

CONCLUSIONE

Ma la realtà dei fatti concorda tanto con un sistema fisico riemanniano o lobacefskiano di parametro grandissimo, quanto col sistema euclideo. Abbiamo visto che quest'ultimo può esser considerato come un caso particolare della geometria non-euclidea. La quale è compresa in un'unica relazione generale esprimente il concetto di distanza fra i punti dei due sistemi; ed abbiamo anche visto come per ottenerli separatamente, basta attribuire alla costante ε i due valori 1, o —1.

Questi dati analitici mettono felicemente in evidenza il carattere filosofico della Metageometria, cioè della metafisica della geometria; e spiegano l'inevitabile insuccesso di tutti gli sforzi tesi a provare direttamente la verità del quinto postulato.

L'esperienza sola dovrebbe togliere i dubbî, ma a condizione assoluta che le sue operazioni avessero la precisione teorica. Dunque, a supporre il nostro universo esattamente euclideo, ci sarebbe impossibile di provarlo sperimentalmente.

Al contrario, se le nostre determinazioni di rette, di lunghezze, di angoli, finissero con l'effettuarsi con una esattezza sufficiente, forse un giorno avremmo il mezzo di sapere se il nostro mondo fisico è riemanniano o lobacefskiano.

Ma è evidente che questo giorno non potrà mai giungere, per il fatto che le nostre misure non avranno mai un'esattezza teorica. Per cui è logico, ed anche più prudente, concludere che il nostro universo obiettivamente non è euclideo, nè riemanniano, nè lobacefskiano; ma che può considerarsi come appartenente *separatamente* ad uno di questi tre sistemi.

Segue immediatamente che:

Lo spazio non è una forma obiettivamente assoluta, ma suscettibile di diverse manifestazioni, ad ognuna delle quali corrisponde un sistema geometrico che lo interpreta.

Ed a mostrare la relatività delle diverse geometrie, termineremo colle parole di Poincaré:

NON VI SONO GEOMETRIE PIU' O MENO VERE, MA SOLTANTO GEOMETRIE PIU' O MENO COMODE.

INDICE

648. Elementi di costruzione in cemento armato.
649. La patria dell'uomo.
659. Compendio di letteratura italiana.
651. I motori d'aviazione.
652. Malattie e rimedi.
653. Formulario per il tornitore meccanico.
654. Esercizi sulla resistenza dei materiali.
655. Federico Mistral e «Mirella».
656. Galileo Galilei.
657. Sunti di didattica.
658. Gli ingranaggi.
659-660. I Promessi Sposi esposti al popolo.
661. Misure elettriche pratiche.
662. I motori a scoppio nell'agricoltura.
663. I contatori elettr. a induzione.
664-665. Costruzioni navali in ferro.
666-667. Piccolo vocabolario commerciale.
668. Breve corso di geografia economica. — Vol. I. — Nozioni generali.
669. Id. - Vol. II. - Dell'Italia.
670. Id. Vol. III - L'Europa.
671. Id. Vol. IV - L'America.
672. Breve corso di geografia economica. - Vol. V - L'Asia.
673. Id. Vol. VI - L'Africa.
674. Corso Elementare d'Algebra Vol. I.
675. Id. - Vol. II.
676. Id. - Vol. III.
677. Id. - Vol. IV.
678. Id. - Vol. V.
679-680. Geometria Elementare Vol. I.
681-682. Id. - Vol. II
683-684. Id. - Vol. III.
685. La tenuta dei libri in scrittura semplice e doppia. - Vol. I.
686. Id. - Vol. II.
687. Antologia della vita moderna - Vol. I - Vita commerciale.
688. Id. - Vol. II - Vita industriale.
689. Id. - Vol. III - Vita economica.
690. Id. - Vol. IV - Vita sociale.
691-692. Codice Civile - Libro I - Relazione Ministeriale.
693-694. Codice Civile - Libro I - Delle Persone.

VOLUMI RINNOVATI O SOSTITUITI:

37. Il Poker.
73-74. Tesi di storia della musica.
75. Storia della Russia.
112. Emanuele Filiberto.
155. Sant'Antonio di Padova.
159. Umberto Biancamano.
170. San Carlo Borromeo.
213-214. Benito Mussolini.
226. La Carta del lavoro.
229-230. Sant'Ambrogio.
260. Diritto Corporativo Sindacale.
264. Televisione.
276. Cultura militare.
300. Compendio di pedagogia.
302. La meccanica ondulatoria.
318-319. Pio XI.
329. La nuova chimica.
341. I principii del disegno architettonico.
348. Storia degli Ebrei.
350-351. Repertorio di parole difficili.
358. Guglielmo Marconi.
361. Navi mercantili e da guerra.
363-364. Le grandi religioni della terra.
366. Il petrolio.
371. Canti del soldato.
75. Riassunto della storia della terra.
377. La circolazione Automobilistica. (Codice della strada).