PROPAGANDA D'ISTRUZIONE

BIBLIOTECA DEL POPOLO
CENTESIMI 80 IL VOLUME

DOMENICO RAVALICO

Calcolo Infinitesimale

PARTE SECONDA

CALCOLO INTEGRALE

Ogni volumetto consta di 64 pagine di fitta composizione e contiene un completo trattatello elementare di scienza pratica, di cognizioni utili ed indispensabili, dettato in forma popolare, succinta, chiara, alla portata di ogni intelligenza.

CASA EDITRICE SONZOGNO
della Società Anonima ALBERTO MATARELLI
Via Pasquirolo, 14 - MILANO

BATTAGLINI

OGNI VOLUME 80 CENTESIMI

VOLUME 647

Finito di stampare il 15 novembre 1936-XV.

Stabilimento Grafico Matarelli della Soc. An. ALBERTO MATARELLI
Milano - Via Passarella N. 15 - *Printed in Italy.* cc-36-a

CALCOLO INFINITESIMALE

PARTE II.

CALCOLO INTEGRALE.

CAPITOLO PRIMO.

Definizione d'integrale

1. — Sappiamo che per *calcolo differenziale,* di cui abbiamo parlato nella prima parte di questo lavoretto, s'intende quella parte dell'analisi matematica che ha per fine la ricerca delle derivate e dei differenziali delle funzioni, nonchè lo studio delle loro proprietà; inversamente, si dice *calcolo integrale* quell'altra parte dell'analisi stessa che ricerca invece le *funzioni integrali.* Con tal nome si determinano quelle funzioni alle quali corrispondono per derivate delle altre date funzioni analitiche. Con ciò è manifesto che al calcolo integrale, di cui ora ci occuperemo, corrisponde il problema inverso di quello che interessa il calcolo differenziale.

Possiamo determinare l'oggetto del calcolo integrale nel modo seguente :

1.° — Data la derivata di una funzione di una o più variabili, trovare la funzione.

2.° — Date una o più equazioni tra due o più variabili x, y,... ed alcune delle derivate di talune variabili riguardate come funzioni delle altre, trovare delle equazioni fra x, y,..., di cui le equazioni date siano conseguenze.

Prima di procedere alla determinazione preliminare delle funzioni integrali, non ci sembra inutile richiamare alcune delle considerazioni più importanti per il nostro studio ed appartenenti al calcolo delle derivate.

2. — Per determinare l'andamento di una curva in prossimità ad uno dei suoi punti, conviene anzitutto determinare la tangente e la normale di questo punto.

Si sa che se è data l'equazione della curva rispetto a due assi coordinati cartesiani, dei quali si possono rappresentare con X le ascisse e con Y le ordinate, e che si individua con X', Y' le coordinate di un punto qualunque della tangente è

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) \tag{1}$$

Ora, se la curva in questione può essere determinata con un'equazione dalla forma esplicita

$$y = f(x)$$

si ha

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Quando invece tale equazione ha la forma implicita

$$f(x, y) = 0,$$

essendo il primo membro dell'equazione una funzione di due variabili dipendenti una dall'altra, la sua derivata è, come sappiamo, eguale a

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy.$$

Ma tale funzione riguardata come funzione di x, è sempre eguale a zero, qualunque sia il valore di x, quindi sarà pure eguale a zero anche la sua derivata.

Da cui

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0$$

dunque

$$dy = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}dx \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

Sostituendo quest'ultima espressione nell'equazione (2) e facendo le debite trasformazioni, si trova l'equazione

$$\frac{df}{dx}(X - x) + \frac{df}{dy}(Y - y) = 0$$

Si osservi che tale equazione, cambiando $X - x$ ed $Y - y$ in dx e dy, diviene l'equazione differenziale immediata di primo ordine dell'equazione della curva.

Per angoli di una retta cogli assi coordinati si sogliono intendere gli angoli che una retta parallela ad essa, condotta per l'origine, fa colle parti positive di tali assi. Gli angoli con l'asse delle x si sogliono riguardare come positivi quando sono contati nel senso positivo; sono considerati negativi quando invece sono contati in senso inverso a quello della freccia considerata.

Se gli assi sono rettangolari e, se si rappresentano con α e β gli angoli che fa con gli assi delle x e delle y la parte di tangente diretta verso le y positive, oppure quella diretta verso le y negative, si ha in questo caso particolare

$$\tang \alpha = \frac{dy}{dx} \text{ e } \tang \beta = \frac{dx}{dy}$$

da cui

$$\cos \alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \text{ e } \cos \beta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

purchè in queste formole al radicale si dia lo stesso segno, ed in modo tale che cos β sia positivo o negativo secondo che si considera la parte di tangente diretta verso le y positive o quella diretta verso le y negative.

Dal triangolo rettangolo MPT, in cui il cateto PT dicesi *sottangente* e si suole rappresentare con S_t, l'ipotenusa MT dicesi *tangente*, mentre il cateto MP è y, e l'angolo MTP ha per tangente $\frac{dy}{dx}$, si ha

$$St = y\frac{dx}{dy}$$

$$MT = \sqrt{y^2 + y^2\frac{dx^2}{dy^2}} = y = y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} \qquad (2)$$

Avendosi poi il valore di St per un punto M dato di una curva, sarà facile condurre la tangente alla curva di un tale punto. Inoltre la normale sarà data

$$MN = y\frac{ds}{dx} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ove ds figura l'arco elementare della curva in M, e che risulta

$$ds = \pm\sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

3. — Sia ora da determinarsi la superficie di una figura piana qualsiasi e costituita precipuamente da una curva arbitraria compresa tra due assi cartesiani e tra una retta perpendicolare ad uno qualunque degli assi. Sia CD la curva in questione, AC l'asse delle x. AB quello delle y, a noi interessa trovare l'area compresa tra questa curva, i suoi assi, ed il lato rettilineo BD. Per fare ciò occorre in primo

luogo, un'operazione geometrica, dividere il segmento AB dell'asse delle x, in un numero pari (2n) di parti, in modo tale che ogni parte sia eguale ad uno stesso valore h, si avrà cioè

$$AB = h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_{2n-1} + h_{2n} = 2n\,(h)$$

Dai punti $h_1, h_2, \ldots h_{2n-1}, h_{2n}$ s'innalzino delle perpendicolari alla retta AB sino al loro punto d'incontro con la curva CD, che in questo modo verrà suddivisa in $2n$ parti eguali, ed in modo analogo sarà pure divisa l'intera superficie. Si traccino ora le ordinate mediane $y_1, y_2, \ldots y_{2n-1}, y_{2n}$, e sieno $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{2n-1}\, \eta_{2n}$ le superfici corrispondenti ai singoli tratti.

Ciò posto, si avrà, indicando con A l'intera area cercata,

$$A = h\left(\frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{2n} - 1 + \frac{1}{2}y_{2n}\right) =$$

$$h\,\Sigma\,(\eta) = -\frac{1}{3}\,(h\,(y_1 + 4\,y_2 + 2\,y_3 + 4\,y_4 + \ldots +$$

$$+ y\,2_{n-1} + y\,2_{2n}) = h\,\Sigma\,(\eta + \frac{1}{12}\,(y_2 - \eta_1) +$$

$$+ \frac{1}{12}\,y\,2\,n + \eta\,2\,n$$

La superficie considerata è quindi la somma delle superfici elementari, $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta 2_{n-1}, \eta\, 2_n$, le quali sono comprese nell'intervallo (a, b), $(a < b)$ nel quale è finita e determinata la funzione $y = f(x)$ corrispondente alla curva data. Le superfici $\eta_1, \eta_2, \ldots$ prenderanno determinati valori in questo campo, e cioè si avrà

$$(a < a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n-1} < a_{2n} < b)$$

in ordine crescente; il coefficiente della progressione, che indicheremo con la lettera δ, e con il quale si potrà passare da un termine all'altro, è dato dalla differenza di due termini immediatamente vicini

$$\delta = a_1 - a = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots$$

Ora, se con Li, li indichiamo il limite superiore ed il limite inferiore corrispondenti al coefficiente di progressione, ossia all'intervallo tra un termine e l'altro, e che tende indefinitamente a zero, e se con yi indichiamo un valore qualunque compreso tra Li e li $(li \leq yi \leq Li)$ che corrisponde all'intervallo $\delta i = ai - ai_{-1}$ *il limite verso cui converge* $\Sigma\, y\, i\, \delta\, i$ *col crescere di n mentre tende indefini-*

tamente a zero il coefficiente di progressione, si chiama INTEGRALE DEFINITO *della funzione* $f(x)$ *nell'intervallo* (a, b) *e s'indica col simbolo*

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Ciò, ben s'intende, quando tale limite realmente esista e sia indipendente dal modo con cui si è fatta la divisione, e con cui si sono scelti i valori relativi ad y, in questo caso la funzione $y = f(x)$ è *possibile d'integrazione* o semplicemente è *integrabile* nell'intervallo considerato, intervallo che vien detto *cammino d'integrazione*, e che è compreso tra i limiti del campo nel quale rimane finita e determinata la funzione.

Per meglio chiarire, con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

intenderemo dire: *integrale della funzione* $f(x)$ *definito in un intervallo* (a, b) questo intervallo, come abbiamo detto, corrisponde a quello in cui rimane finita e continua e quindi integrabile in esso, la funzione data. Conchiudendo: *è condizione necessaria e sufficiente, affinchè una funzione* $f(x)$ *sia integrabile in un intervallo* (a, b), *che essa funzione sia finita e continua nel detto intervallo.*

La condizione enunciata è infatti necessaria e sufficiente, giacchè qualora si divida l'intervallo ad essa inerente in un numero arbitrario di intervalli minori, ma sempre tali che la differenza $D i = L i - l i$ che dicesi *oscillazione* sia minore di un valore arbitrario, piccolo a piacere.

In modo cioè che

$$\Sigma\, D i\, \delta l < \varepsilon\, (\Sigma\, \delta i) = \varepsilon\, (b - a)$$

e perciò

$$\lim \Sigma\, D i\, \delta i = 0$$

Dalla condizione di cui sopra si ricava la più semplice: *è condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione sia integrabile in un intervallo* (a, b), *che sia*

$$\lim \Sigma\, D i\, \delta i = 0$$

4. — La condizione espressa dall'ultima formola può adattarsi a qualunque funzione della quale si vuol determinare l'integrale, così da permettere di riconoscere in essa una funzione integrabile oppure no. Essa dimostra che se è necessario e sufficiente per l'integrabilità di una funzione, che sia eguale a zero il limite a cui tende il sommatorio

del prodotto della oscillazione della funzione nell'intervallo δi. Se ora con $f i$ indichiamo un qualunque valore della funzione nell'intervallo δi non solo ma anche il limite superiore od inferiore dei valori che la funzione assume in δi, potremmo dire che qualora sia

$$\lim \Sigma D i S i = 0$$

dovrà anche esistere il limite

$$\lim \Sigma f i \delta i.$$

Per cui considerando un altro intervallo δr della funzione sarà pure, necessariamente,

$$\lim \Sigma f r \delta r$$

ove fr rappresenta in questo caso un qualunque valore della funzione nell'intervallo δr e ove i limiti inferiore e superiore sono compresi. Con ciò siamo in grado di enunciare il teorema:

Una funzione converge ad un limite determinato e finito quando

$$\lim [\Sigma f i \delta i - \Sigma f r \delta r] = 0$$

Si può dimostrare l'enunciato teorema nel modo seguente:

Si scompongano in un numero qualunque di parti gl'intervalli δi e δr, in modo che si avrà

$$\delta i = \omega i_1 + \omega i_2 + \omega i_3 + \ldots + \omega i_n$$
$$\delta r = \omega r_1 + \omega r_2 + \omega r_3 + \ldots + \omega r_n$$

per cui

$$f i \delta i = f i (\omega i_1 + \omega i_2 + \omega i_3 + \ldots + \omega i_n)$$
$$f r d r = f r (\omega r_1 + \omega r_2 + \omega r_3 + \ldots + \omega r_n)$$

d'onde

$$f i \delta i = (f i_1 \omega i_1 + f i_2 \omega i_2 + f i_3 \omega i_3 + \ldots + f i_n \omega i_n) + $$
$$+ [(f i - f i_1) \omega i_1 + \ldots + (f i - f i_n) \omega i_n]$$
$$f r \delta r = (f r_1 \omega r_1 + f r_2 \omega r_2 + f r_3 \omega r_3 + \ldots + f r_n \omega r_n) +$$
$$+ [(f r - f r_1) \omega r_1 + \ldots (f r - f r_n) \omega r_n]$$

per cui, indicando con

$$\varphi i = [(f i - f i_1) \omega i_1 + \ldots + (f i - f i_n) \omega i_n]$$
$$\varphi r - [(f r - f r_1) \omega r_1 + \ldots + (f r - f r_n) \omega r_n]$$

abbiamo

$$f i \delta i = (f i_1 \omega i_1 + f i_2 \omega i_2 + f i_3 \omega i_3 + \ldots + f i_n \omega i_n) + \varphi i$$
$$f r \delta r = (f r_1 \omega r_1 + f r_2 \omega r_2 + f r_3 \omega r_3 + \ldots + f r_n \omega r_n) + \varphi r$$

Ciò posto, si ricava in valore assoluto

$$| \varphi i | = | (f i_1 \omega i_1 + f i_2 \omega i_2 + f i_3 \omega i_3 + \ldots + f i_n \omega i_n) |$$
$$| \varphi r | = | (f r_1 \omega r_1 + f r_2 \omega r_2 + f r_3 \omega r_3 + \ldots + f r_n \omega r_n) |$$

Essendo però Di e Dr i valori delle oscillazioni δi, δr, possiamo scrivere

$$| \varphi i | = | D i \delta i |$$
$$| \varphi r | = | D r \delta r |$$

che possono essere trasformate nelle formole

$$| \Sigma \varphi i | \leq | \Sigma D i \delta i |$$
$$| \Sigma \varphi r | \leq | \Sigma D r \delta r |$$

esse costituiscono delle disuguaglianze tendenti a zero.

Dalle formole precedenti si deduce l'eguaglianza

$$\Sigma \varphi i - \Sigma \varphi r = \Sigma f i \delta i - \Sigma f r \delta r$$

da essa si ricava la formola che da ragione all'enunciato teorema

$$\lim [\Sigma f t \delta i - \Sigma f r \delta r] = 0$$

5 — Accenneremo ora alle prime proprietà degli integrali definiti che si deducono facilmente dal seguente teorema generale :

— *Se dato il sommatorio*

$$\sum_b^a f(x) \, dx$$

esiste il limite verso cui tale sommatorio tende quando tendono a zero gl'intervalli tra i quali si suppone diviso l'intervallo totale (a, b), *e se questo limite è indipendente dal modo con il quale quest'ultimo è diviso e dalla scelta dei valori che vengono assunti dalla funzione* $f(x)$ *nell'intervallo considerato* (a, b), *esso costituirà l'integrale della funzione data, definito nell'intervallo* (a, b). —

Iª Proprietà.

Se si invertono i limiti d'integrazione di un integrale definito, esso rimane eguale ma con il segno cambiato.

Sia

$$\int_b^a f(x) \, dx$$

l'integrale dato, esso come sappiamo è definito nell'intervallo (a, b) ; ora, se integriamo la funzione $f(x)$ anzichè nell'intervallo (a, b) *nell'altro* (b, a), che costituisce l'inverso del primo, e se immaginiamo scomposti i due intervalli in una serie d'intervallì minori, avremmo che i valori che assumerà la funzione $f(x)$ in ciascuno degli intervalli minori dati, saranno logicamente eguali sia per l'intervallo diretto che per quello inverso, con la sola differenza che i secondi si dovranno considerare di segno contrario. Dato quindi che i valori degl'intervalli minori sono tutti di segno contrario pur essendo gli stessi in valore assoluto, anche i limiti risulteranno di segno contrario, per cui rimane dimostrato che

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

IIª Proprietà.

Se nella funzione integrale

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx$$

c'è una costante, si ha

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Essendo la definizione senz'altro evidente, omettiamo la dimostrazione.

IIIª Proprietà.

Siano m, s, t, w, v, z, *delle grandezze arbitrarie, si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^r f(x)\,dx + \int_r^s f(x)\,dx + \int_s^t f(x)\,dx +$$

$$+\int_t^u f(x)\,dx + \int_u^v f(x)\,dx + \int_v^z f(x)\,dx + \int_z^b f(x)\,dx,$$

e ciò nel solo caso che la funzione $f(x)$ sia integrabile in ciascun cammino d'integrazione.

Possiamo semplificare di molto la definizione data, scrivendo

$$\int_a^r = \int_a^b + \int_b^r$$

da cui, per essere

$$\int_b^r = -\int_r^b$$

otteniamo

$$\int_a^b = \int_a^r + \int_r^b$$

IV^a Proprietà.

Sia dato l'integrale definito di una somma di funzioni integrabili

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,\ f_n(x)$$

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x)]$$

il valore di questo integrale è uguale a quello che assume la somma degli integrali di ciascuna funzione, cioè

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x)] =$$

$$= \int_a^b f_1(x) + \int_a^b f_2(x) + \int f_3(x) + \ldots + \int_a^b f_n(x).$$

Infatti, la proprietà partitiva dell'integrale di una somma di funzioni, può essere facilmente dimostrata; qualora si pensi che il sommatorio di tutta la somma corrisponde alla somma dei sommatori di ciascuna funzione, per cui facendo tendere al limite, sia la prima espressione sommatoriale, come pure la seconda, ciascuno dei termini diverrà l'integrale corrispondente a ciascuna funzione.

Riassumiamo qui in breve le regole generali alle quali obbediscono gl'integrali definiti

1) $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx,$

) $\int a\, du = a \int du = au + C,$

3) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx,$

4) $\int (u + v)\, dx = \int u\, dx + \int v\, dx,$

5) $\int u\, dx = ux - \int x\, du,$

6) $\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(y)]\, \varphi'(y)\, dy,$

7) $\int dy \int f(xy)\, dx = \int dx \int f(xy)\, dy.$

6. — *Teorema del valor medio.*

Sia dato un intervallo (a, b), supponiamo di scomporlo in un numero qualunque di parti eguali, prendiamo quindi uno di questi intervalli minori, che indicheremo, come abbiamo fatto più sopra, con δi. Ora, siano date due funzioni $f(x)$ e

$\varphi(x)$ ambedue integrabili nell'intervallo dato, alle quali corrispondano nell'intervallo parziale δi i valori fi e φi. Dato che ogni intervallo parziale è uguale alla formula

$$\frac{b-a}{n}$$

si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \frac{b-a}{n} \sum_1^n fi$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \frac{b-a}{n} \sum_1^n \varphi i$$

e perciò

$$\int_a^b f(x)\,.\,\varphi(x)\,dx = (b-a)\,.\,\lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n fi\,\varphi i}{n}$$

$$\frac{\int_a^b f(x)\,.\,\varphi(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} = \lim_{n=\infty} \mu$$

essendo μ un valore compreso tra il limite superiore h ed inferiore l di $\varphi i = \frac{fi\,\varphi i}{fi}$. Se nel rapporto $\frac{fi\,\varphi i}{fi}$ si fanno i sommatori del numeratore e del denominatore, l'ultima eguaglianza diviene

$$\int_a^b f(x)\,.\,\varphi(x)\,.\,dx = \mu\,.\int_a^b f(x)\,.\,dx.$$

Riassumendo: *Date due funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$ integrabili ambedue nello stesso intervallo (a, b), ponendo per μ un valore qualunque che la funzione $\varphi(x)$ può prendere nell'intervallo dato si ha*

$$\int_a^b f(x)\,.\,\varphi(x)\,dx\,\mu \int_a^b f(x)\,dx$$

Dall'enunciato teorema ne segue: *Il valore medio che corrisponde ai valori che una funzione prende in un dato intervallo, è dato dal rapporto tra il suo integrale ed il detto intervallo.*

Ciò può essere scritto nella formula

$$\frac{\int_a^b f(x)\,d\,x}{b-a} = \lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n f i}{n}$$

7. — Sin qui abbiamo trattato semplicemente degl'integrali definiti dal loro cammino d'integrazione in un dato intervallo, ora però, è opportuno soffermare la nostra attenzione anche su quegl'integrali che hanno un cammino di integrazione definito da un intervallo del quale si conosce solamente il limite inferiore o quello superiore od anche nessuno dei due. Ben s'intende che in questo caso non si ha che fare con un'unica funzione integrale, ma con infinite funzioni integrali, tutte legate tra loro in modo che la differenza tra due prossime sarà sempre una quantità che non varia con il cammino della funzione.

Volendo scrivere una di tali funzioni integrali si aggiungerà ad essa la *costante d'intpgrazione C*, così un integrale indefinito qualunque si scriverà

$$\int f(x)\,d\,x + C$$

Tutta l'importanza della costante d'integrazione sta nel fatto che essa distingue l'integrale da tutti quegli altri infiniti che si differenziano da esso per una costante; così che essendo l'integrale distinto, si può ricavare dall'integrale indefinito dato, il valore di un determinato integrale definito.

Sia

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,d\,x + C$$

un integrale indefinito dato, e si voglia ricavarne un integrale definito, sempre però della funzione $F(x)$. Siano α e β due valori numerici invariabili, ponendo α al posto di x avremo

$$F(d) = \int_a^\alpha f(x)\,d\,x + C$$

e quindi β

$$F(\beta) = \int_a^\beta f(x)\,d\,x + C$$

da cui

$$f(\alpha) - F(\beta) = \int_a^\alpha f(x)\,d\,x + C - \int_a^\beta f(x)\,d\,x + C =$$

$$= \int_\beta^\alpha f(x)\,d\,x + C$$

d'onde : *per avere da un integrale indefinito un integrale definito qualunque, basta sostituire in luogo di x, prima il limite superiore e quindi il limite inferiore dell'integrale definito, sottraendo quindi i risultati.*

Degli integrali indefiniti ne riparleremo in seguito.

8. — Oltre gl'integrali definiti ed indefiniti or ora considerati, dobbiamo esaminare una nuova sorta di funzione integrale : gli *integrali impropri.*

Per integrale improprio s'intende l'integrale definito della funzione $f(x)$ nell'intervallo (a, ∞) o nell'intervallo $(-\infty, b)$, il limite, nel caso che esista, di

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

quando b tende all'infinito positivo, oppure all'infinito negativo.

L'intervallo che costituisce il cammino d'integrazione dell'integrale definito dato, può anche essere della forma $(-\infty, \infty)$ in questo caso il limite superiore e quello inferiore tendono, indipendentemente l'uno dall'altro a

$$-\infty \text{ e a } +\infty.$$

Un integrale improprio si dirà *convergente*, qualora esista il limite che lo individua, si dirà *divergente* se invece tale limite non esiste.

È assai importante saper determinare la convergenza o la divergenza di un integrale improprio, per far ciò calcoliamo anzitutto il valore dell'espressione

$$\int_a^\infty f(x)\, dx$$

supponendo la funzione $f(x)$ integrabile in un intervallo preso ad arbitrio, di essere cioè una funzione continua dei limiti.

L'espressione (1) si può scrivere

$$\lim_{x=\infty} \int_a^x f(x)\, dx$$

per la quale esistenza reale occorre che dato un valore o piccolo a piacere, si possa trovare un punto ω tale che per due punti ω', ω'' presi arbitrariamente a destra di x, si abbia sempre

$$\left| \int_{\omega''}^{\omega'} \right| < \sigma$$

Ciò ci viene additato dalla teoria dei limiti, dato che tutto il problema si risolve nel verificare la sua esistenza o non esistenza.

Un integrale improprio è convergente anche quando, per essere integrabile in un intervallo preso ad arbitrio però a destra di a, si può trovare un valore γ maggiore di 1, e tale che l'eguaglianza

$$x^{\gamma}\, f(x) = \varphi(x)$$

abbia limite finito per $x = \infty$ oppure oscilli tra limiti infiniti.

Supponendo che la funzione $f(x)$ diventi infinita nel punto C compreso nell'intervallo $(a,\ b)$, ed indicando quindi con $F(x)$ l'integrale indefinito, si ha

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

La dimostrazione è facile e evidente da per sè,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\vartheta = 0}\ [F(b) - F(a)] + [F(c - \vartheta) - Tc + \vartheta)] =$$

$$= F(b) - F(a) \lim_{\vartheta = 0}\ [Fc - \vartheta) - F(c + \vartheta)$$

se, come per definizione, $F(x)$ è funzione continua nell'intervallo $(a,\ b)$, passando al limite si ottiene come si desiderava

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Può avvenire però che tale limite non esista, lasciando il tutto in sospeso, può anche darsi che allora abbia ad esistere ponendo

$$\vartheta' = \vartheta$$

non si può però determinare esistente l'integrale improprio, ma soltanto può assumersi a sostituirlo il valore del limite stesso, che non potrà più apparire quale integrale improprio, e che quindi per distinguerlo lo chiameremo *integrale improprio singolare*.

CAPITOLO SECONDO.

Metodi d'integrazione.

9. — Nel capitolo precedente abbiamo considerato le proprietà generali che derivano dalla definizione d'integrale, in questo vedremo con quali metodi si possa risolvere il problema generale del Calcolo Integrale. Dopo avere studiato il Calcolo Differenziale, una questione ci si presentò spon-

tanea alla mente: Conoscendo la derivata di una data funzione analitica, come si può conoscere la derivata stessa, od in altri termini, come si può calcolare la funzione della quale si conosce la derivata?

A questa domanda non si può rispondere con una regola, come si può fare nel caso inverso, giacchè regole d'integrazione non esistono, si conoscono soltanto dei metodi con i quali si può, in certo qual modo, risolvere il problema. Noi ora indicheremo cotesti metodi, ma sta nell'abilità del calcolatore scegliere un metodo piuttosto che un altro, abbreviando così le operazioni spesso molto lunghe.

Come al solito incominceremo con le funzioni elementari, per poi passare alle irrazionali e quindi a quelle trigonometriche, logaritmiche ed esponenziali, in via generale, esse tutte si possono considerare funzioni pure continue.

Premettiamo alcune formule d'integrazione che ci sembrano più importanti ed utili a ricordarsi.

Integrali per alcune funzioni razionali:

1) $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (Per n diverso da -1)

2) $\int \frac{1}{x} \, dx = \frac{d}{dx} \log_e x + C$

3) $\int \frac{1}{x^n} \, dx = \frac{-1}{(n-1)\, x^{n-1}} + C$

4) $\int e^x \, dx = \frac{d}{dx} e^x + C$

5) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log_e a} + C$

6) $\int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} + C$

7) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc. tang } x + C$

8) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} + C$

9) $\int \text{sen } x \, dx = -\cos x + C$

10) $\int \cos x \, dx = \text{sen } x + C$

11) $\int \text{tang } x\, d\, x = \frac{1}{\cos^2 x} + C$

12) $\int \cot x\, d\, x = -\frac{1}{\text{sen}^2 x} + C$

13) $\int \sec x\, d x = \frac{\text{sen}\, x}{\text{con}^2 x} + C$

14) $\int \text{coscc}\, x\, d\, x = -\frac{\cos x}{\text{sen}^2 x} + C$

15) $\int \text{arc. sen}\, x\, d\, x = \frac{d\, x}{\sqrt{1 - x^2}} + C$

16) $\int \text{arc. cos. } x\, d\, x = -\frac{d\, x}{\sqrt{1 + x^2}} + C$

17) $\int \text{arc. tang } x\, d\, x = \frac{d\, x}{1 + x^2} + C$

18) $\int \text{arc. cot}\, x\, d\, x = -\frac{d\, x}{1 + x^2} + C$

19) $\int \text{arc. sec } x\, d\, x = \frac{d\, x}{x\sqrt{x^2 - 1}} + C$

20) $\int \text{sen } h\, x\, d\, x = \cos h\, x + C$

21) $\int \cos h\, x\, d\, x = -\,\text{sen}\, h\, x + C$

22) $\int \text{tang}\, h\, x\, d x = \frac{d\, x}{\cos h^2\, x} + C$

23) $\int \text{tot } h\, x\, d\, x = -\frac{d\, x}{\text{sen}\, h^2\, x} + C$

Integrali per alcune funzioni irrazionali:

1) $\int \sqrt{a + h\, x}\, d\, x = \frac{2}{3\, b}(\sqrt{a + h\, x})^3 + C$

2) $\int \sqrt[n]{x}\, d\, x = \frac{n}{n + 1} \sqrt[n]{x^{n+1}} + C$

3) $\int \frac{d\, x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = +\,\text{arc. sen}\, \frac{x}{a} + C$

4) $\int \frac{d\, x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \log\,(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$

$$5) \int \sqrt{a^2 + x^2}\, d x = \sqrt{a^2 + x^2} +$$

$$+ \frac{a^2}{2} \log \left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$$

$$6) \int \sqrt{a^2 - x^2}\, d x = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} +$$

$$+ \frac{a^2}{2} \text{arc. sen} \frac{x}{a} + C$$

Una gran parte di funzioni integrali si possono ricondurre alle formole fondamentali qui sopra esposte, in maniera di avere una pronta soluzione, parecchi integrali però non si possono ricondurre alle dette formole, per essi occorre quindi conoscere dei metodi speciali o *artifici d'integrazione.*

10. — Esporremo qui alcuni metodi d'integrazione. Essi sono :

1.° Integrazione per parti,
2.° Integrazione per serie,
3.° Integrazione per sostituzione.

Un primo metodo, molto pratico, è quello d'integrazione per parti, esso è sintetizzato nella formola 5 dell'articolo quinto e che qui trascriviamo

$$\int u\, d x = u(x) - \int x\, d u$$

ove la funzione $p\,(x)$ è derivabile.

La prima operazione che conviene eseguire quando si vuole calcolare un dato integrale con questo metodo, è di scomporre la sua funzione in un prodotto di due funzioni, in modo che si renda applicabile la formola d'integrazione. Dopo ciò è facile ridurre l'integrale dato in un altro integrale più semplice, la cui risoluzione, che può essere anche data dal soprascritto quadro per funzioni integrali, potrà essere considerata quale soluzione dell'integrale dato.

Un esempio chiarirà la questione.

Sia dato

$$\int \text{arc. tang}\; x\; dx.$$

Ponendo $\quad x = u$

sarà $\quad dx = du$

chiamando poi ancora con

$$v = arc.\; \text{tang}\; x$$

$$d v = \frac{d x}{1 + x^2}$$

ed integrando per parti, si ha

$$\int \text{arc. tan}\, x\, dx = x \text{ arc tang}\, x - \int \frac{x, dx}{1+x^2} =$$

$$= x \text{ arc. tang}\, x - \frac{1}{2} \text{l}\lambda\text{g}_e\,(1+x^2) + C$$

Sia dato ancora

$$\int x \cos x\, dx.$$

Operando come sopra, si ha

$$x = u$$
$$dx = du$$
$$v = \text{sen}\, x$$
$$dv = \cos x$$

da cui

$$\int x \cos x\, dx = x \text{ sen}\, x - \int \text{sen}\, x\, dx = x \text{ sen}\, x + \text{coe}\, x.$$

Codesto primo metodo è molto pratico, ma non è detto che sempre il secondo integrale ottenuto sia più semplice del primo, chè spesso accade che esso sia molto più complesso ed assai più difficile a risolversi, con ciò intendiamo dire che detto metodo non è applicabile a tutte le funzioni integrali, dipende dall'esperienza del calcolatore intravedere quest'ultime ed ovviare così dei calcoli molto lunghi ed inutili.

Con ciò passiamo al secondo metodo.

11. — *Metodo d'integrazione per serie.*

Il metodo d'integrazione per serie è simile a quello di derivazione per serie, già da noi trattato nella prima parte di questo lavoretto.

Abbiamo visto più innanzi come si possa considerare una funzione integrale quale somma di una serie infinita di funzioni, su questo fatto si basa appunto il metodo d'integrazione per serie, che cercheremo di svolgere in questo articolo.

Anzitutto diciamo quale premessa generale:

Se è data una serie di potenze della variabile x, entro il suo cerchio di convergenza, si può sviluppare in serie la sua funzione integrale, che viene calcolata quindi facendo la somma degli integrali corrispondenti a ciascun termine, si ha cioè

$$\int f(x)\, dx = \sum_{0}^{\infty} - \varphi\, n \frac{x^{n-1}}{n+1} + C$$

È facile dimostrare quanto si disse, giacchè possiamo scrivere

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi_1(x)\,dx + \int \varphi_2(x)\,dx + \ldots + \int R_n(x)\,dx$$

ove $\varphi_1(x), \varphi_2, (x), \ldots$ sono le infinite funzioni in cui può venir scomposta la funzione $f(x)$, e ove Rn rappresenta il resto di questa serie dopo il suo ennesimo termine, dopo di che sappiamo er la quarta proprietà dell'atricolo 5, che la scritta eguaglianza è vera.

È importante, per quanto evidente, notare che una funzione è necessariamente e sufficientemente integrabile quando la serie in cui è stata svolta è convergente. I criteri per la convergenza di una serie sono stati esposti nella prima parte di questo nostro studio, ragione per la quale rimandiamo ad essa il lettore, non volendo nè potendo intrattenerci nuovamente su di essa.

Diamo alcuni esempi.

1. *Sia da calcolarsi con il metodo d'integrazione per serie, il valore della funzione integrale*

$$\int \operatorname{sen} x\, dx$$

Svolgendo in serie la funzione sen x, abbiamo

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^7}{1,2,3,4,5,6,7} + - \ldots$$

Integrando il primo ed il secondo membro otteniamo

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = \int \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{5}{1.2.3.4.5} + + \frac{7}{1.2.3,4.5.6.7} + \ldots dx = 1 + \frac{x^2}{1.2} + + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots - \cos x$$

2. *Sia dato da calcolarsi con il metodo d'integrazione per serie il valore della funzione integrale*

$$\int \frac{\cos x}{x}\, dx$$

Procedendo come nel primo esempio, svilupperemo quindi prima in serie la funzione cos x, cioè

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1,2.3.4.5.6} + \ldots$$

da cui

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 , 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots$$

quindi, integrando ambedue i membri

$$\int \frac{\cos x}{x} \, d\, x = \log x - \frac{x^2}{(1 \cdot 2) 2} + \frac{x^4}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) 4} +$$

$$+ \frac{x^6}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) 6} + \ldots + C$$

Gl'integrali di questa specie vengono detti *funzioni integrali trigonometriche*, ecco i tre principali:

Integral - seno =

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, d\, x = x - \frac{x^3}{(1 \cdot 2 , 3) 3} + \frac{x^5}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) 5} -$$

$$- \frac{x^7}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7) 7} + C$$

Integral - coseno =

$$\int \frac{\cos x}{x} \, d\, x = \log x - \frac{x^2}{(1 \cdot 2) 2} + \frac{x^4}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) 4} + \ldots C$$

Integral - tangente

$$\int \frac{\operatorname{tang} x}{x} \, d\, x = x + \frac{x^3}{3 \cdot 3} + \frac{2}{3} \frac{x^5}{5 \cdot 5} + \frac{17}{3^2} \frac{x^7}{(5 \cdot 7) 7} + \ldots + C$$

Oltre a queste ultime funzioni integrali dobbiamo classificare anche le cosidette *funzioni integral - logaritmiche*. Eccone alcune:

$$1. \int \frac{1}{x} \, d\, x = \log x$$

$$2, \int \frac{l^x}{x} \, d\, x = \operatorname{lon} x + x + \frac{x^2}{(1 \cdot 2) 2} +$$

$$+ \frac{x^3}{(1 \cdot 2 \cdot 3) 3} + \frac{x^4}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) 4} + \ldots$$

12. — Sia data la funzione integrale

$$\int_a^b f(x) \, d\, x$$

potremo calcolare con metodo approssimato il suo valore operando come segue. Anzitutto dobbiamo supporre che il campo d'integrazione considerato nell'intervallo $(a,\ b)$ si possa scomporre in un numero finito n di parti eguali, in modo da avere

$$\frac{h-a}{n}=h$$

ove quindi h sarà il valore di ciascun intervallo minore, cioè

$$h-a=h_1+h_2+h_3+\ldots+h_n \quad .$$

Si calcolino ora i valori che la variabile indipendente assumerà nei punti

$$a,\ a+h_1,\ a+h_2,\ a+h_3,\ \ldots,\ a+h_n,$$

ed i corrispondenti valori della funzione $f(x)$

$$a=y_0,\ =a+h_1=y_1,\ a+h_2=y_2,\ \ldots,\ a+h_n-y_n$$

allora si avrà

$$\int_a^b f(x)\,dx=h\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right)-$$

$$-\frac{B_1 h^2}{1\,.\,2}[f'(b)-f'(a)]+\frac{B_2 h^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}[f'''(b)-f''''(a)]-$$

$$-\ldots+\frac{B_n h^{2n}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}[f^{(n)}(b)-f^{(n)}(a)]$$

ove B_1, B_2, B_3 ... si chiamano numeri Bernoulliani, ai quali corrispondono i valori

$$B_1=\frac{1}{6},\ B_2=\frac{1}{30},\ B_3=\frac{1}{42},\ B_4=$$

$$=\frac{1}{30},\ B_5=\frac{5}{66},\ B_6=\frac{691}{2730}$$

Qui si avrebbe potuto fare anche uso della formola di Simpson

$$\int_b^a f(x)\,dx=\frac{h}{3}(y_0+4\,y_1+2\,y_2+4\,y_3\,2\,y_4+4\,y_5+\ldots$$

$$+4\,y_{n-1}+2\,y_n)-\frac{5}{288}\ \rho\ \frac{(b-a)_5}{n^4}M$$

In cui n deve essere pari, ρ una frazione maggiore di zero e minore di 1, M una grandezza assoluta di $f^{(4)}(a)$ nel cammino d'integrazione compreso nell'intervallo $(a,\ b)$.

13. — *Integrazione per sostituzione.*

Il procedimento usato per integrare mediante sostituzione e, che può rendere molti servigi quando trattasi d'integrali indefiniti, si basa sulla sostituzione della variabile di una funzione con una nuova variabile, come nel caso

$$\int f(d)\,dx=\int f[\varphi(y)]\,\varphi'(y)\,dy.$$

È evidente che si può supporre la variabile x funzione di una nuova variabile z, purchè la funzione scelta sia tale da poter assumere valori corrispondenti a quelli assunti dalla x nella integrazione.

Si ponga quindi

$$x = f(z)$$

e siano a' e b' i valori di z che rendono $f(z)$ o x eguale ad a e b rispettivamente; così

$$a = f(a') \text{ e } b = f(b).$$

Si supponga ora che $\psi(x)$ sia la funzione di cui $\varphi(x)$ è derivata, cioè si supponga

$$\varphi(x) = \frac{d\psi(x)}{dx};$$

allora

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \psi(b)\, \psi(a)$$
$$= \psi\{f(b')\} - \psi\{f(a')\}.$$

Essendo però

$$\frac{d\psi\{f(z)\}}{dz} = \varphi\{f(z)\}\, f'(z)$$

quindi

$$\psi\{f(b')\} - \psi\{f(a')\} = \int_{a'}^{b'} \varphi\{f(z)\}\, f'(z)\, dz$$
$$= \int_{a'}^{b'} \varphi(x) \frac{dx}{dz}\, dz$$

per cui

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \int_{a'}^{b'} \varphi(x) \frac{dx}{dz}\, dz$$

infine possiamo scrivere

$$\int \varphi(x)\, dx = \int \varphi(x) \frac{dx}{dz}\, dz.$$

14. — Dopo aver esposto i metodi generali con i quali si cerca di risolvere le questioni che rappresentano lo scopo del calcolo integrale, non crediamo di far cosa inutile soffermandoci nel presente articolo su alcune formole di riduzione che spesso giovano molto, particolarmente poi tornano utili quando l'integrale deve essere preso fra certi limiti.

Si suppongano $\varphi(x)$, $\chi(x)$ e $\psi(x)$ delle funzioni di x tali che

$$\int \varphi(x)\, d x = \chi(x) + \int \psi(x)\, d x$$

allora

$$\int_a^b \varphi(x)\, d x = \chi(b) - \chi(a) + \int_a^b \psi(x)\, d x.$$

Possiamo dimostrare ciò con un esempio, sia cioè

$$\int (c^2 - x^2)^{\frac{n}{2}} d x = \frac{x\,(c^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{n\, c^2}{n+1} \int (c^2 - x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx.$$

si supponga $\frac{n}{2}$ una quantità positiva, allora per $x = 0$ e per $x = c$ la

$$x\,(c^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}$$

s'annulla, si ha quindi

$$\int (c^2 - x^2)^{\frac{n}{2}} d x - \frac{n\, c^2}{n+1} \int (c^2 - x^2)^{\frac{n}{2}-1} d x.$$

Similmente abbiamo

$$\int \varphi(\operatorname{sen} x, \cos x)\, d x = \int \varphi \left\{ z, \sqrt{(1 - z^2} \right\} \frac{d z}{d z}\, d z$$

$$= \int \varphi \left\{ z, \sqrt{(1 - z^2)} \right\} \frac{d z}{\sqrt{(1 - z^2)}}$$

ove $\varphi(\operatorname{sen} x, \cos x)$ dinota una funzione di sen x e cos x e ove sen x si è supposto eguale a z.

CAPITOLO TERZO.

Integrazione delle funzioni razionali ed irrazionali.

15. — Il calcolo per l'integrazione delle funzioni razionali spesso richiede la riduzione ad una parte intera di una funzione razionale fratta, parte intera che sarà sempre il quoziente delle due funzioni intere considerate ciascuna per sè.

In linea generale si abbia la forma semplice

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

ove $f(x)$ e $\varphi(x($ per ipotesi, sono funzioni razionali intere, e ove $f(x)$ *è maggiore numericamente di* $\varphi(x)$, sarà sempre possibile ridurne ad essa una qualunque funzione razionale fratta. Il suo calcolo si semplifica se, come abbiamo detto, cerchiamo di trasformarla in una parte intera, dividendo il suo numeratore per il denominatore. Bisogna ricordare che la parte intera non sempre potrà considerarsi quale unica, giacchè spesso ad essa dovrà essere aggiunta una seconda funzione fratta, nella quale la $f(x)$ sarà minore della $\varphi(x)$.

Per le ipotesi fatte, siamo in grado di eseguire la divisione delle due espressioni che costituiscono gli addendi della funzione razionale fratta, con questa operazione si ottiene una parte intera pi, in caso generale, un resto. Indicheremo con $A(x)$ il primo, e con $R(x)$ il secondo, e se con r e con s *si* rappresentano rispettivamente i gradi delle funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$, essendo, per definizione, r maggiore di s, avremo

$$r - s = \nu$$

ove ν è il grado che deve attribuirsi alla parte intera $A(x)$.

La funzione razionale fratta più sopra accennata deve essere aggiunta alla parte intera, per cui

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{\varphi(x)} \tag{1}$$

essendo il grado di $R(x)$ minore di ν.

Integrando la (1), si ottiene

$$\int \frac{f)x)}{\varphi(x)} = \int A(x) + \int \frac{R(x)}{\varphi(x)}$$

dalla quale, essendo facile l'integrazione di $\int A(x)$, si ha un primo metodo per calcolare la funzione integrale

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

mediante il calcolo della funzione più semplice

$$\int \frac{R(x)}{\varphi(x)}.$$

Ed ora possiamo tirar oltre, immaginando che la funzione $f(x)$ abbia una radice $(x - a)$ di grado z.

In questo caso, otterremo

$$f(x) = f_1(x) \, . \, (x - a)^z$$

ove $f_1(x)$ sarà necessariamente

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{(x-a)^z}.$$

Da ciò risulta

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)}{(x) - a^z f_1(x)}$$

e se con c s'indica una costante, tale che $c = \frac{f(a)}{f_1(a)}$, sarà

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{c}{(x-a)^z} + \frac{f(x) - c f_1(x)}{(x-a)^z f_1(x)}$$

essendo però $(x-a)$ fattore della funzione $f(x) - c f_1(x)$, abbiamo che la funzione data

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

può essere scomposta nella

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{c}{(x-a)^z} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{z-1} f_1(x)}.$$

Ponendo ora

$$x - a = y,$$

si avrà

$$c \int \frac{y\, dy}{(x^2 + \beta^2)^n} \qquad (1)$$

che per $n = 1$ diviene

$$\frac{c}{2} \log (y^2 + \beta^2)$$

con la trasformazione di y, si ha quindi

$$\frac{1}{\beta} \text{arg tang} \frac{y}{\beta}.$$

Nel secondo caso in cui > 1 sarà invece (1) eguale a

$$-\frac{C}{2n^{-2}(} \frac{1}{(y^2 + \beta^2)^{n-1}}$$

per cui essendo

$$\int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^{n-1}} = \int \frac{(y^2 + \beta^2)}{(y^2 + \beta^2)^n} dy =$$

$$= \int \frac{y^2\, dy}{(x^2 + \beta^2)^n} + \beta^2 \int \frac{(y^2 + \beta^n)^n}{dy}$$

e facendo l'integrazione per parti dei due membri, abbiamo

$$\int \frac{y^2\, d\, y}{(y^2+\beta^2)^n} = - \frac{y}{(2_n-2)\,(y^2+\beta^2)^{n-1}} + $$
$$+ \frac{1}{2_n-2} \int \frac{d\, y}{(y^2+\beta^2)^{n-1}}$$

combinando le due formole assieme

$$\int \frac{d\, y}{(y^2+\beta^2)^n} =$$
$$= \frac{y}{(2_n-2)\,\beta^2\,(y^2+\beta^2)^{n-1}} + \frac{2_n-3}{(2_n-2)\,\beta^2} \int \frac{d\, y}{(y^2+\beta^2)^{n-1}}$$

Per mezzo di questa formula di riduzione dopo avere espresso $\int (x)^n$ con $\int (x)^{n-1}$

potremo anche continuare, e scrivere
$\int (x)^{n-1}$ con $\int (x)^{n-2}$ e così via.

16. — Ecco alcuni esempi d'integrazione delle funzioni razionali.

1. Calcolare
$$I = \int \frac{x^2\, d\, x}{x^4-1}$$

Le radici del denominatore sono $1, -1, \pm i$; per cui si trova
$$\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{1}{4}\left[\frac{x-1}{1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1}\right]$$

quindi
$$I = \frac{1}{4} \log \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2} \text{ arc tang } x$$

2. Calcolare
$$I = \int \frac{x^3 - 3\, x^2}{x^2-4}\, d\, x.$$

Osserviamo che I può anche essere scritta
$$I = \int x - 3 + \frac{4\, x - 12}{x^2-4}\, d\, x =$$
$$= \int x - 3 - \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x+2}$$

per cui si ha
$$I = \int (x-3)\, d\, x - \int \frac{d\, x}{x-2} + 5 \int \frac{x+2}{d\, x} =$$
$$= \frac{x^2}{2} - 3\, x + \text{long} \frac{(x+2)^5}{x-2}.$$

3. Calcolare

$$I = \int \frac{x^2\, d\, x}{(x^2 + 1)^2}$$

Osserviamo che la I può essere anche scritta

$$I = \int \frac{d\, x}{x^2 - 1} - \int \frac{d\, x}{(x^2 - 1)^2}$$

per cui

$$I = \frac{x}{2\,(x^2 - 1} + \frac{1}{2} \text{ arc tang } x.$$

17. — Dopo averci intrattenuto sull'integrazione delle funzioni razionali, passiamo ora sull'integrazione di quelle irrazionali.

Intanto sappiamo che è irrazionale una funzione del tipo

$$f\left(\sqrt{x}\right)$$

sarà quindi irrazionale l'integrale

$$\int f\left(\sqrt{x}\right) d\, x.$$

Per funzioni integrali di questa forma non vale la regola della trasformazione atta invece a ricavare da una funzione razionale ad esponente maggiore, una simile funzione ad esponente minore. O almeno, se vale, lo è per pochissimi casi.

Come si può effettuare la detta trasformazione nelle funzioni razionali, così vale anche per le funzioni irrazionali una regola di trasformazione per la quale una funzione integrale della forma

$$\int f\left(\sqrt{x}\right) d\, x$$

può essere sempre mutata nella più semplice

$$f\,(x)\; d\, x,$$

ossia, in altri termini per la quale *una funzione integrale irrazionale può sempre essere sostituita con una funzione integrale razionale.*

Veramente non esiste un metodo fisso di trasformazione per la qualcosa noi cercheremo ora di indicare alcuni casi di trasformazione, dai quali lo studioso potrà dedurre altri casi svariati, che gli si potranno eventualmente presentare.

18. — Consideriamo un integrale irrazionale, sia per es.

$$F\,(x) = \int f\,(\sqrt{x}\; d\, x$$

e supponiamo che x sia eguale al trinomio

$$x = a\, x^2 + b\, x + c = 0$$

si avrà cioè

$$F(x) = \int f\left(\sqrt{a x^2 + b x + C}\right) d x.$$

Rimane ora da sostituire lo scritto integrale irrazionale in un altro razionale, tale cioè da poter essere calcolato.

Supponiamo in primo luogo che siano reali le radici dell'equazione

$$a x^2 + b x + c = 0$$

e se con α chiamiamo la prima e con β la seconda, avremo da studiare un primo caso in cui x ha un valore compreso tra le due radici, sarà cioè

$$\alpha < x < \beta$$

da cui deriva che il polinomio dato avrà segno contrario a quello di a.

Per le ipotesi fatte si ha

$$b^2 - 4 a c > 0$$

da cui si ricava l'eguaglianza

$$a x^2 + b x + C = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

e qui può darsi il caso che sia negativo o positivo. Supponiamo che a sia positivo, allora

$$\left.\begin{array}{l} b^2 - 4 a c > 0 \\ b^2 - 4 a c < 0 \end{array}\right\} a > 0$$

$$\alpha < \beta < x$$

all'equazione data si potrà allora sostituire

$$a x^2 + b x + C = (\gamma - x)^2 a,$$

d'onde

$$\sqrt{a x^2 + b x + C} = \gamma - x \sqrt{a},$$

da cui, risolvendo rispetto ad x la precedente eguaglianza si ottiene

$$x = \frac{\gamma^2 - C}{b + 2 \gamma \sqrt{a}},$$

sostituendo si ha quindi

$$\sqrt{a x^2 + b x + C} = \gamma - \frac{\sqrt{a}(\gamma^2 - C)}{b + 2 z \sqrt{a}} =$$

$$= \frac{\gamma^2 \sqrt{a} + b \gamma + C \sqrt{a}}{b + 2 \gamma \sqrt{a}}$$

sarà quindi

$$d x = \frac{2\left[\gamma^2 \sqrt{a} + b \gamma + C \sqrt{a}\right]}{(b + 2 \gamma \sqrt{a})} d \gamma$$

che risulta razionale, essendo razionali rispetto a γ sia x che dx.

19. — Potrà anche darsi il caso che si presenti un integrale del tipo

$$F(x) = \int f\left(x, \sqrt{y}\right) dx$$

ove x ed y sono due variabili della medesima funzione.

Anche in questo caso può applicarsi la regola di trasformazione, e l'integrale irrazionale può essere sostituito con un integrale razionale.

Sia

$$\sqrt{y} = p + \sqrt{q}\, x$$

da cui

$$y = p^2 + 2\sqrt{q}\, x p + q x^2 = a + 2 b x + q x^2$$

sarà cioè

$$x = \frac{p^2 - a}{2\left(b - \sqrt{q}\, p\right)}$$

d'onde

$$\sqrt{y} = p + \frac{\sqrt{q}\,(p^2 - a)}{2\left(b - \sqrt{q}\, p\right)} = -\frac{\sqrt{q}\, p^2 - 2 b y + a\sqrt{q}}{2\left(b - \sqrt{q}\, p\right)}$$

ne risulta

$$d x = \frac{2 p\left(2 b - 2\sqrt{q}\, p\right) + 2\left(p 2 - a\right)\sqrt{q}}{2\left(b - \sqrt{q}\, y\right)^2}\, d p$$

Da quest'ultima formola si ha come per l'esempio precedente da calcolare non più un integrale irrazionale, ma bensì uno razionale rispetto a p.

20. — Diamo alcuni esercizi per integrali di funzioni irrazionali.

1.° $\int \sqrt{a + b x}\, d x$

Ris. $\frac{2}{3 b}\left(\sqrt{a + b x}\right)^3 + C$

2.° $\int \frac{d x}{\sqrt{a + b x}}$

Ris. $\frac{2}{b}\sqrt{a + b x} + C$

3.° $\int \frac{d\,x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Ris. $+ \text{arc. sen} \frac{x}{a} + C$

4.° $\int \frac{d\,x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

Ris. $\log \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} + C\right.$

5.° $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, d\,x$

Ris. $\frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \log\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$

6.° $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, d\,x$

Ris. $\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\, \text{arc. sen} \frac{x}{a} + C$

7.° $\int \frac{d\,x}{\sqrt{x^2 + C}}$

Ris. $\log \left[x + \sqrt{x^2 + C}\right] + C$

8.° $\int \frac{d\,x}{\sqrt{a\,x^2 + b\,x + C}}$

Ris. $-\frac{1}{\sqrt{a}} \log \left[b + 2\,a\,x - 2\sqrt{a}\,\sqrt{a\,x^2 + b\,x + C}\right] + C$

9.° $\int \frac{x^5\, d\,x}{\sqrt{x^3 - 1}}$

Ris. $\frac{2}{3}(x^3 + 2)\sqrt{x^3 - 1} + C$

10.° $\int \frac{d\,x}{x + \sqrt{x^2 - 2\,x - 3}}$

Ris. $-\frac{z}{2} - \log. \left[(z + 3)^{\frac{3}{2}} (z + 1)^{-\frac{1}{2}}\right] + C$

per $z = \sqrt{x^2 - 2\,x\,3} - x$

CAPITOLO QUARTO.

Integrali speciali.

21. — Oltre agli integrali delle funzioni sin'ora considerate, altri ancora ve ne sono da considerare, e che noi studieremo in questo capitolo.

Tra i primi di questi integrali speciali ci intratterremo ora sugl'*integrali delle funzioni ellittiche,* e ciò perchè essi non rappresentano altro che un caso speciale degl'integrali irrazionali studiati nel capitolo precedente.

Sia quindi la funzione integrale

$$F(x) = \int f\left(x, \sqrt{y}\right)$$

sino a che y rappresenta un polinomio di 2° grado, la funzione integrale è calcolabile, potendola trasformare in una simile ma razionale, quando però il grado del polinomio in questione aumenta di grado, la funzione non è più trasformabile in una funzione razionale.

Così, mentre si chiamano *integrali irrazionali semplici* quegl'integrali che comprendono una funzione del primo o del secondo grado, si dicono invece *ellittici* quelli di 3° e 4° grado, e *iperellittici* quelli di grado superiore al quarto. Su quest'ultimi noi non ci possiamo soffermare, cercheremo solamente di chiarire la questione in relazione ai primi.

Senza entrare in troppi dettagli, accenneremo subito la *regola generale:*

Sia

$$F(x) = \int f\left(x, \sqrt{y}\right) dx$$

ove supponiamo y un polinomio di grado maggiore del 2° ma non superiore al 4°, si può sempre esprimere l'integrale della funzione data mediante uno dei tre tipi fondamentali

$$1.^\circ \int \frac{dx}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}}$$

$$2.^\circ \int \frac{y^2 d^2}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}}$$

$$3.^\circ \int \frac{dy}{(y^2-a)\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}}$$

ove k è una costante che vien detta *modulo.*

I tre tipi d'integrali ellittici vengono detti *forme canoniche di Legendre*, esse si possono facilmente ricavare l'una dall'altra.

Se si pone $x = \operatorname{sen} \varphi$

e quindi $dx = \cos \varphi \, . \, dy$

per cui, i tre integrali diventano

$$1.^\circ \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$2.^\circ \int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \, . \, d\varphi$$

$$3.^\circ \int \frac{d\varphi}{(1 + p \operatorname{sen}^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

ove p è una costante.

Si ricava che se con $F(\varphi)$ indichiamo il primo di essi, abbiamo

$$F(\varphi),\ F\left(\sqrt{1 - x^2}\right),\ F\sqrt{(1 - k^2 x^2)},$$

funzioni di una medesima variabile u

$$u = F(\varphi).$$

22. — Possiamo ora seguitare a studiare gl'integrali speciali, prendendo in considerazione un'altra specie d'integrali, detti *integrali binomi*, essi furono calcolati da *Eulero* per la prima volta.

Sia dato il differenziale binomio

$$x^n (a x^p + b)^m \, dx$$

ove n, m, p, sono numeri razionali fartti, maggiori o minori di zero.

Qui supponiamo che gli esponenti siano dei numeri frazionali solamente perchè se tali non fossero, ma bensì rappresentassero numeri interi, l'espressione integrale non avrebbe più alcuna ragione di dirsi speciale, essendo razionale. Può però presentarsi anche il caso nel quale solamente parte di essi siano frazionari, così, se, per es., m è un numero intero, mentre n e f sono due numeri frazionari, allora potremo sempre scrivere

$$m = \frac{m'}{m''}$$

ove m' ed m'' son due numeri interi.

Il differenziale binomio dato sarà allora

$$x^n \; a x^p + b^{\frac{m'}{m''}}$$

nel quale tutt'e quattro gli esponenti sono interi, in modo cioè, che può venir integrato nei due casi seguenti

$$\frac{n+1}{p} > 0, \quad \frac{n+1}{p} + \frac{m'}{m''} > 0.$$

Ed ora, sia

$$a + b x^m = y$$

d'onde

$$x = \left(\frac{y-a}{h}\right)^{\frac{1}{m}-1} d y$$

$$d x = \frac{1}{m b}\left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{m}-1} y^m \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{m}-1} d y.$$

Da cui, integrando

$$\frac{1}{m b}\int\left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} y^p \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{m}-1} d y =$$

$$= \frac{1}{n b}\int y^p \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} d y.$$

Ponendo

$$a + b x^{-p} = y^n$$

si ricava egualmente

$$x = \left(\frac{y^n - a}{b}\right)^{-\frac{1}{p}}$$

da cui pure

$$d x = -\frac{1}{p}\left(\frac{y^n - a}{b}\right)^{-\frac{1}{p}-1} . \frac{1}{b} . n . y^{n-1} . d y$$

d'onde

$$d x = -\frac{n}{p h}\left(\frac{y^n - a}{b}\right)^{-\frac{1}{n}-1} . y^{n-1} . d y.$$

Se quest'ultima espressione viene sostituita con l'equazione data, s'ottiene

$$x\,(a x^p + b)^{\frac{m'}{m''}} d x =$$

$$= \left(\frac{y^n - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}\left(q + p\frac{m'}{m''}\right)} y^p \left(-\frac{n}{h}\right)\left(\frac{y^n - a}{b}\right)^{-\frac{1}{p}-1} \cdot$$

$$\cdot\, y^{n-1}\, d\,x = -\frac{n}{p\,b}\, y^{m+p+1} \left(\frac{y^n - a}{b}\right)^{-\frac{q+1}{p} - \frac{m'}{m''} - 1} d\,y$$

Come per il caso precedente, anche qui si presentano due possibili questioni, in cui cioè

$$\frac{n+1}{p} \text{ è un numero intero,}$$

$$\frac{n+1}{p} + \frac{m'}{m''} \text{ è un numero intero,}$$

essendo solamente in questi due casi riducibile a funzione razionale l'integrale binomio dato.

Sia da calcolarsi l'integrale

$$F(x) = \int \frac{x^m\, d\,x}{\sqrt{a\,x - x^2}}$$

che può essere scritto

$$\int x^{m-\frac{1}{2}} (a - x)^{-\frac{1}{2}} d\,x$$

Riferendoci ai due casi precedenti otteniamo

$$\frac{n+1}{p} = \frac{m+1}{2}$$

$$\frac{n+1}{p} + \frac{m'}{m''} = \frac{m}{2}$$

in cui

$$\frac{m+1}{2},\ \frac{m}{2}$$

sono due numeri interi.

Calcolando s'ottiene

$$\int \frac{x^m\, d\,x}{\sqrt{a\,x - x^2}} = -\sqrt{a\,x - x^2} + \text{arc. tang} \sqrt{\frac{x}{a - x}} + C$$

23. — Oltre alle due forme speciali d'integrali irrazionali ora considerate, hanno grande importanza anche gl'*integrali delle funzioni trascendenti*, che noi tratteremo in questo articolo.

Anche per detti integrali ci si giova della possibilità di trasformarli in funzioni razionali, come per gl'integrali irrazionali, già studiati in precedenza.

È una funzione trascendente, a modo d'esempio, la seguente

$$f(a^x)\,d\,x$$

per cui

$$\int f(a^x)\,d\,x$$

sarà un integrale trascendente.

Per calcolare un simile integrale occorre anzitutto, come già si disse, poterlo sostituire con una funzione integrale razionale, per far ciò poniamo

$$a^y = y$$
$$a^x\,d\,x = d\,y$$
$$d\,x = \frac{d\,y}{y}$$

così facendo, si riduce l'integrale trascendente dato a quello di una funzione razionale di y.

Avremo cioè

$$\int f(y)\,d\,x$$

da cui, sarà

$$y' = \varphi(y)$$

cioè

$$\int f(y)\,d\,x = \int \frac{f(y)}{y'}\,.\,y'\,.\,d\,x = \int \frac{f(y)}{\varphi(y)}\,d\,y$$

quest'ultimo integrale è, come sappiamo, calcolabile essendo funzione razionale od irrazionale nota, ossia corrispondente ad una delle forme canoniche del Ledendre

Riprendendo il nostro esempio, sarà

$$y = a^x$$
$$y' = a^y \log a$$
$$\int f(a^x)\,d\,x = \frac{a^{\ x}}{\log a} + C$$

Similmente si potranno calcolare gl'integrali

$$\int e^{-x}\,d\,x\ 1$$

$$\int e^{-x2}\,d\,x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

24. — Lo stesso metodo di sostituzione vale anche per le **funzioni** integrali trigonometriche, così si ha

$$\int f(\text{sen}\, x)\, d\, x = \int \frac{f(y)}{\sqrt{1-x^2}}\, d\, y$$

$$\int f(\cos x)\, d\, x = \int \frac{f(y)}{-\sqrt{1-x^2}}\, d\, y$$

$$\int f(\text{tang}\, x)\, d\, x = \int \frac{f(y)}{1+y^2}\, d\, y$$

$$\int f(\text{cotang}\, x)\, d\, x = \int \frac{f(y)}{-(1+y^2)}\, d\, y$$

$$\int f(\sec x)\, d\, x = \int \frac{f(y)}{y\sqrt{y^2-1}}\, d\, y$$

$$\int f(\text{cosec}\, x)\, d\, x = \int \frac{f(y)}{-y\sqrt{y^2-1}}\, d\, y$$

come si vede s'ottiene la trasformazione per sostituzione di un qualunque integrale irrazionale di funzione trigonometricca, in un integrabile più facilmente calcolabile.

Accade però spesso anche di dover calcolare un integrale della forma

$$\int \text{sen}^m\, x\, .\, \cos x\, .\, d\, x.$$

Applicando il metodo indicato, poniamo

$$\text{sen}\, x = y$$

s'ottiene allora

$$\int y^m\, x\, .\, \cos x\, .\, d\, x = ^{\frac{n-1}{2}}\, d\, y$$

che rappresenta l'integrale di un differenziale binomio, che abbiamo già imparato a calcolare.

Svolgendo le operazioni s'ottiene

$$\int \text{sem}^m\, x\, .\, \cos x\, .\, d\, x = \frac{\text{sen}^{\,m+1}\, x}{m+1} + C$$

Può darsi anche il caso che si presenti il problema di calcolare un integrale irrazionale trascendente della forma

$$f(\text{sen}\, x,\, \cos x)\, d\, x,$$

si ponga allora

$$\text{tang}\, \frac{x}{2} - y$$

sarà

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tang} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2y}{1+y^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \operatorname{tang} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tang} \frac{x}{2}} = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

da cui

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1+y^2}{2}$$

Prima di chiudere questo articolo, citiamo alcuni esempi d'integrazione di funzioni trascendenti.

1.° Sia

$$F(x) = \int f(\operatorname{sen}^n x)\, dx$$

debbasi cercare il valore dell'integrale $F(x)$.

$$\int f(\operatorname{sen}^n x)\, dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} . \cos x +$$

$$+ \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \,.\, dx$$

2.° Sia

$$F(x) = \int f(\cos^n x)\, dx$$

debbasi calcolare il suo valore.

$$\int f(\cos^n x)\, dx = \frac{1}{n} \operatorname{sen} x \,.\, \cos^{n-1} x +$$

$$+ \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \,.\, dx$$

3.° Sia

$$F(x) = \int f(e^{ax} \operatorname{sen} x)\, dx$$

si cerchi il valore di $F(x)$.

$$\int (e^{ax} \operatorname{sen} x)\, dx = \frac{e^{ax} \operatorname{sen} x}{a} - a \int f(e^{ax} \cos^x)\, dx$$

da cui essendo

$$\int f(e^{ax} \cos x)\, dx = \frac{a \cos x + \operatorname{sen} x}{a^2} e^{ax} + C$$

sarà anche

$$\int f(e^{ax} \operatorname{sen} x)\, dx = \frac{a \operatorname{sen} x + \cos x}{v^2} e^{ax} + C$$

4.° Sia

$$F(x) = \int_{o}^{\frac{\Pi}{2}} (\text{sen}^n x)\, dx$$

abbiasi a calcolare il suo valore.

$$\int_{o}^{\frac{\Pi}{2}} . f(\text{sen}^n x)\, dx = \frac{(m-1)(m-3)\ldots\ldots 4 . 2}{m . (m-2)\ldots\ldots 5 . 3 .}.$$

25. — Sia dato un piano qualunque, in rapporto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, scomponiamo il detto piano in un numero qualunque di parti, e consideriamo una zona del piano parallela all'asse delle x *ed* un'altra parallela all'asse delle y, allora se con x ed y indichiamo le coordinate cartesiane del piano, potremo supporre che le rette di scomposizione del detto piano siano parte tutte parallele all'asse delle x e parte tutte parallele all'asse delle y.

Con ciò il nostro piano risulterà scomposto in un numero più o meno grande di piani minori e che chiameremo piani parziali, per distinguerli dal piano totale.

Ora se con

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n,$$

indichiamo codesti piani parziali, tutti interni al piano totale dato, l'area di esso piano totale sarà data dal prodotto della somma dei piani parziali che costituiscono una linea parallela all'asse delle x per quella di un'altra linea parallela all'asse delle y. Possiamo quindi immaginare un punto qualunque in ciascun intervallo parziale, e calcolare il valore che in esso assume la funzione $f(x)$. Prendendo a considerare uno solo dei tanti intervalli, e scrivendolo con δr δs il valore che in esso assumerà la funzione $f(x)$ potrà a sua volta essere indicato con f, r, s.

Con ciò formiamo il sommatorio doppio

$$\sum_{rs} f\, r\, s\ \delta r\, \delta s$$

che sarà finito per qualunque valore della funzione fr, s.

Da cui

$$\lim \sum_{rs} f \cdot s\ \delta r\ \delta s = \int_{s}^{r} f\, r\, s\, .\, dy = \varphi(x)$$

quando il piano parziale $\delta r\ \delta s$ è preso sulla prima linea parallela all'asse delle y.

Egualmente si avrà

$$\text{ltm} \sum_{rs} \delta r\ \delta s\, .\, \varphi(x\, r, s) = \int_{s}^{r} \varphi(x)\, dx$$

d'onde estendendo la considerazione a tutto il piano totale

$$\int\int_P f\,r,s\,(x,y)\,dx\,dy =$$

$$\int_P dx \left[\int_P f\,r,s\,(a,y)\,dy\right] =$$

$$= \int_P dx \int z\,(x,y)\,dy.$$

queste espressioni rappresentano l'*integrale doppio definito dalla funzione* f r, s *in tutta l'area* P *del piano dato.*

Un piano può però essere considerato sotto forme diverse, e dar luogo ad argomentazioni speciali, sino qui noi abbiamo supposto di avere un piano limitato da quattro rette, può però anche darsi il caso che esso sia limitato da linee curve.

Questo fatto non modifica sostanzialmente le nostre precedenti argomentazioni, giacchè anche una superficie curva può scomporsi in un numero grande a piacere di aree parziali, le quali potranno venir considerate tutte come le precedenti.

Ciò posto, noteremo che ad es. la formola

$$\int\int dx\,dy$$

vale per le aree di qualunque specie siano, giacchè codesto integrale doppio può estendersi a tutte le aree indistintamente.

Si può facilmente riconoscere per vera la nostra argomentazione, giacchè si può sempre, per un'area limitata da una curva, estendere prima l'integrazione rispetto alla variabile y, e quindi, per un valore di x determinato,

$$\int f(x)\,dx$$

si può estendere l'integrazione della x di minimo valore alla x di massimo valore.

Sia

$$z = f\,(x,\ y)$$

una funzione di x ed y, definita nell'area P.
consideriamo in primo luogo, contemporaneamente a questa prima funzione una seconda

$$u = f\,(x,\ y)$$

che per punti analoghi a quelli assunti dalla z avrà anche valori eguali, mentre per qualunque altro punto non compreso nell'area P sia eguale a 0.

Da ciò, la funzione u sarà integrabile nell'area P quando la funzione z sarà integrabile in una superficie piana qualunque A, e tale da comprendere l'area P, quindi risulta

$$\iint_P u \, . \, d\sigma = \int d x \int u(x, y)\, d y$$

Data però la nostra ipotesi, per la quale in punti esterni all'area P la funzione u acquista valori sempre eguali a zero, si ha

$$\iint_P u \, . \, d\sigma = \iint_A u \, . \, d\sigma = \iint_A z \, . \, d\sigma$$

d'onde, indicando rispettivamente con

$$y = \alpha(x),\ y = \beta(x)$$

si ottiene ancora

$$\int u(x, y)\, d y = \int_{(\alpha\, x)}^{(\beta\, x)} z(x, y)\, d y$$

perciò

$$\iint_A z \, . \, d\sigma = \int d x \int_{\alpha(x)}^{\beta(y)} z(x, y)\, d y.$$

Nella medesima guisa, indicando con

$$x = \gamma(y),\ x = \delta(y)$$

si ricava

$$\iint_P z \, . \, d\sigma = \int d y \int_{\gamma(y)}^{\beta(y)} z(x, y)\, d x.$$

26. — Sia

$$f\, \mathrm{J}x,\ y\mathrm{I}$$

una funzione delle due variabili indipendenti x ed y, supponiamo che sia integrabile, il suo integrale sarà eguale a

$$\int_a^b d y \int_c^d d x\, f(x, y)$$

ove a, b, c, d sono limiti costanti, sia rispetto ad x che rispetto ad y, però essa è pure eguale a

$$\int_a^b d x \int_c^d d y\, f(x, y)$$

qualora si suppongono a, b le ascisse, e c, d le ordinate nella cui area compresa, si eseguisce la doppia integrazione.

Oltre agli integrali doppi or ora considerati vi sono anche degli *integrali tripli, quadrupli,* ecc. che vengono detti con un termine generale — *integrali multipli.*

Ecco un esempio d'integrale triplo :

$$F(x) = \int\int\int dx\, dy\, dz$$

ponendo

$$x = P \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$$
$$y = P \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$$
$$z = P \cos \theta$$

s'ottiene sostituendo e facendo le dovute operazioni

$$F(x) = \int\int\int P^2 \operatorname{sen} \theta\, dP\, d\theta\, d\varphi\,.$$

Una delle tre integrazioni si possono eliminare calcolandola immediatamente, in modo che ne risulta un integrale doppio.

Chiudiamo questo capitolo con un esempio.

Sia

$$F(x,y) = \int_a^b \int_\alpha^\beta \varphi(x,y)\, dx\, dy - \int_a^b \left\{ F(x,\beta) - F(x,d) \right\} d\alpha$$

$$= \int_a^b F(x,\beta)\, dx - \int_a^b F(x,\alpha)\, dx$$

$$= f(b,\beta) - f(a,\beta) - f(b,a) + f a, \alpha) + \ldots \qquad (1)$$

Qui abbiamo supposto $F\ (x,\ y$ı la funzione integrale di $\varphi(x,y)$ rispetto ad x costante; ed $f\ (x,y)$ l'integrale di $F\ (x,y)$ rispetto ad x supposto y costante. Integrando ora $\varphi\ (x,y)$ prima rispetto ad x, considerando y costante, e poi integrando il risultato rispetto ad y, supponendo x costante, si ha

$$\int_\alpha^\beta \int_a^b \varphi(x,y)\, dy\, dx - f_1(b,\beta) -$$
$$- f_1(b,\alpha) - f_1(a,\beta) + f,(a,\alpha) \ldots$$

ove $f_1(x,y)$ dinota il risultato finale, che può venir scritto

$$f_1(x,y) = f(x,y) + \psi(y) + \chi(x)$$

ove $\psi\ (y)$ è una funzione di y senza x, e $\chi\ (x)$ è una funzione di x senza y. Facendo uso di quest'ultima formola troveremo che il secondo membro della penultima espressione si riduce al secondo membro della (1).

CAPITOLO QUINTO.

Derivate parziali ed equazioni differenziali.

27. — Sia

$$z=f\ (x,\ y)$$

se si fa variare prima x di una quantità qualunque h e poi y di una quantità k, e se si rappresentano con $f'\ (x,y)$ la derivata che si ottiene quando si differenzia z rispetto alla variabile x considerando y come quantità costante, e con $f_1(x,y)$ la derivata che si ottiene quando si differenzia z rispetto ad y riguardando x come costante, si ha successivamente

$$f\,(x+h,y)-f\,(x,y)\,h+\varkappa\,h$$
$$f\,(x+h,y+k)=f\,(x,y)+f_1\,(x,y)\,k+\beta\,k+$$
$$+[f'\,(x,y)+\gamma]+\alpha'\,h,$$

essendo α, β, γ funzioni che s'annullano quando gli incrementi h e k divengono nulli, ed α' ciò che diviene α quando ivi si cambia y in $y+k$.

Dalla seconda delle precedenti eguaglianze deriva, rappresentando con $\Delta\,z$ la differenza $f\ (x+h,\ y+k)-f\ (x,\ y)$ ossia l'incremento di z corrispondente agli incrementi h e k di x e di y

(1) $$\Delta\,z=f'\,(x,y)\,h\,f_1\,(x,y)\,k+\beta\,k+\gamma\,h.$$

28. — Quando x ed y non sono indipendenti una dall'altra ma sono funzioni di una medesima variabile t, se si rappresentano con $\varphi\ (t)$ e $\psi\ (t)$ queste funzioni e con h e k gli incrementi di x e di y corrispondenti all'incremento dt di t, si ha

$$\begin{cases} h=\varphi\,(t+d\,t)-\varphi\,(t)=\varphi'\,(t)\,d\,t+\delta\,d\,t \\ k=\varphi\,(t+d\,t)-\psi\,(t)=\psi'\,(t)\,d\,t+\varepsilon\,d\,t \end{cases}$$

essendo δ ed ε funzioni che s'annullano insieme a dt, e per conseguenza

$$\Delta\,z=[f'\,(x,y)\,\varphi'\,(t)+f_1\,(x,y)\,\psi'\,(t)]\,d\,t+\lambda\,d\,t,$$

essendo γ una funzione che s'annulla insieme a dt. Dunque nel caso che si considera, in cui z si può riguardare come funzione di t, la derivata di z è

$$\frac{d\,z}{d\,t}=[f'\,(x,y)\,\varphi'\,(t)+f_1\,(x,y)\,\psi'\,(t)]$$

ossia, poichè $\varphi'(t)\,d\,t = d\,x$ e $\psi'(t)\,d\,t = d\,y$

$$\frac{d\,z}{d\,y} = f'(x, y)\,d\,x + f_{,}(x, y)$$

Quest'eguaglianza sussiste qualunque sia la variabile indipendente e quindi anche quando questa sia x od y.

La derivata $f'(x, y)$ ed il prodotto $f'(x, y)\,d\,x$ chiamansi rispettivamente *derivata parziale rispetto ad x* e *coefficiente differenziale parziale rispetto ad x* della funzione $f(x, y)$.

Analogamente $f_{,}(x, y)$ ed $f_{,}(x, y)\,d\,y$ si chiamano *derivata parziale rispetto ad y* l'una e *coefficiente differenziale parziale rispetto ad y di $f'(x, y)$* l'altra. Le derivate $f'(x, y)$ ed $f_{,}(x, y)$ si sogliono rappresentare coi simboli

$$\frac{d\,y}{d\,x} \text{ e } \frac{d\,x}{d\,y}$$

Quindi

$$d\,z = \frac{d\,y}{d\,z}\,d\,x + \frac{d\,x}{d\,y}\,d\,y.$$

Teorema. — *La derivata di una funzione di due variabili non indipendenti una dall'altra è uguale alla somma delle derivate parziali che risultano dalla derivazione della funzione rispetto ad ognuna delle due variabili riguardando l'altra come costante.*

29. — Questo teorema lo si può in alcuni casi applicare con vantaggio alla derivazione di funzioni di una sola variabile.

Ecco un esempio. *Debbasi derivare la funzione x^x.*

Se si deriva la funzione riguardando l'esponente come costante e poi riguardando come costante invece la x sottoposta all'esponente, e se si fa la somma delle due derivate ottenute, questa somma, in virtù del teorema precedente, è appunto la derivata richiesta. Eseguendo i calcoli, si trova che

$$d\,x^x = x\,.\,x^{x-1}\,d\,x + x^x \log x\,d\,x = x^x\,(1 + \log x)\,d\,x$$

come già si è trovato con altro procedimento.

30. — Applicando il precedente teorema si può anche facilmente trovare la derivata di una funzione implicita di una variabile senza risolvere l'equazione che la lega a questa quantità.

Abbiasi tra due variabili x ed y l'equazione

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

e vogliansi la derivata di y riguardata come funzione di x.

Il primo membro dell'equazione (1) essendo una funzione di due variabili dipendenti una dall'altra, la sua derivata, in virtù del precedente teorema, è $= \frac{dy}{dx} + \frac{dx}{dy}$. Ma tale funzione, riguardata come funzione di x, è sempre $=0$ qualunque sia il valore di x, da cui anche il suo differenziale è sempre $=0$. Dunque

$$\frac{dy}{dx} + \frac{dx}{dy} = 0 \tag{2}$$

e quindi

$$\frac{dy}{dy} = - \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dy}}$$

L'equazione (2) dicesi *equazione differenziale immediata di primo ordine* dell'equazione (1).

Ecco un altro esempio, con il quale speriamo chiarire quanto fu enunciato or ora.

Sia data l'equazione $y^3 - 3axy + x^3 = 0$. La sua equazione differenziale immediata di primo ordine è

$$(3x^2 - 3ay)\, dx + (3y^2 - 3ax)\, dy = 0,$$

che somministra

$$dy = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} dx \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

In questo caso ad un determinato valore di x possono corrispondere tre valori reali di y e per conseguenza tre valori reali di $\frac{dy}{dx}$. Se si considerasse y come variabile indipendente, si avrebbe

$$dx = \frac{y^2 - ax}{dy - x^2} dx \quad ; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y^2 = ax}{ay - x^2}$$

31. — Sia ancora

$$z = f\ (x, y)$$

e le variabili x ed y siano legate tra loro dall'equazione

$$\varphi\ (x, y) = 0$$

sarà (102)

$$da = \frac{dy}{dx} + \frac{dx}{dv}$$

da cui (104)

$$\frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{dy}\,dy = 0$$

Per cui rappresentando con $\psi\,(x, y)$ una funzione arbitraria di x ed y, si avrà anche

$$dz = \left[\frac{dy}{dx} + \psi\,(x, y)\,\frac{d\varphi}{dx}\right] + \left[\frac{dx}{dy} + \psi\,(x, y)\,\frac{d\varphi}{dy}\right]$$

Questa equazione dimostra che: *Quando $z = f\,(x,y)$ e le variabili x ed y non sono indipendenti una dall'altra, dz si può mettere un'infinità di modi diversi sotto la forma*

$$\psi\,(x, y)\,dx + \chi\,(x, y)\,dy$$

Le funzioni $\psi\,(x, y)$ e $\chi\,(x, y)$, che risultano prendendo ad arbitrio la funzione $\varphi\,(x, y)$, non sono sempre le derivate parziali rispetto ad x e ad y di una funzione di queste variabili.

Un esempio chiarirà la questione. Sia $z = x^2 - y^2$ ed $x - y + 1 = 0$. In questo caso l'equazione (1) è

$$dx = [2x + \varphi\,(x, y)]\,dx - [2y + \varphi\,(x, y)]\,dy.$$

Se si prende $\varphi\,(x, y) = y - 2x$, si ha

$$dz = y\,dx + (2x - 3y)\,dy,$$

espressione in cui i coefficienti dx e dy non sono le derivate parziali rispetto ad x e ad y di una funzione di x ed y; giacchè le funzioni di x ed y, che hanno la derivata parziale rispetto ad x eguale ad y, sono della forma $yx + \xi\,(y)$, e la derivata parziale rispetto ad y di quest'espressione è $x + \xi'\,(y)$, derivata che, qualunque sia la funzione $\xi\,(y)$, non è mai $= 2x - 3y$.

Se, ora si prende $\varphi\,(x, y) = 2y - 2x$, si ha

$$dz = 2y\,dx + (2x - 4y)\,dy$$

Le funzioni di x ed y, che hanno la derivata parziale rispetto ad x eguale a $2y$, sono della forma $2yx - \xi\,(y)$. La derivata parziale rispetto ad y di quest'espressione è $2x + \xi'\,(y)$. Questa derivata è $= 2x - 4y$ quando $\xi\,(y) = -2y^2 + C$ essendo C una costante.

Dunque nella precedente espressione di dz i coefficienti di dx e dy sono le derivate parziali rispetto ad x e ad y della funzione $2yx - 2y^2 + C$.

32. — Quando nella funzione $f\,(x, y)$ le variabili x ed y sono ambedue indipendenti, si ha come sappiamo

$$h = dx;\ k = dy,$$

da cui, l'equazione (1) dell'articolo 101 prende la forma

$$\Delta z = f'(x, y)\, d x + f_{,}(x, y)\, d y + \mu\, d x + \nu\, d y$$

essendo μ e ν funzioni che divengono infinitesime insieme a dx e dy.

Il binomio $f(x, y)\, dx + f_{,}(x, y)\, dy$, che si è dimostrato (102) essere eguale a dz quando x ed y non sono indipendenti una dall'altra, si rappresenta con dz anche nel caso che ora si considera, e lo si chiama *differenziale totale* di z. Le derivate parziali $f'(x, y)$ ed $f_{,}(x, y)$ si vogliono rappresentare con i simboli

$$\frac{d z}{d x} \text{ e } \frac{d z}{d y}\ .$$

Quindi si può dire che, quando x ed y sono indipendenti, *per definizione* si ha

$$d z = \frac{d z}{d x}\, d x + \frac{d z}{d y}\, d y$$

Illustriamo la questione con un esempio. Abbiasi la funzione

$$z = \log \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}}\ ,$$

di due variabili indipendenti, e se ne voglia il differenziale totale. Qui, per agevolare i calcoli, è bene osservare prima che alla funzione si può dare la forma

$$\log \frac{(x + \sqrt{x^2 - y^2})^2}{x^2 - (x^2 - y^2)} = \log (x + \sqrt{x^2 - y^2}) - 2 \log y$$

Derivando quest'ultima espressione rispetto alle prime variabili, ed addizionando i risultati, si ha

$$d z = \frac{2\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right)}{x + \sqrt{x^2 - y^2}}\, d x + 2\left(\frac{\frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}}{x = \sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{2}{y}\right) d y =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x^2 - y^2}}\, d x - \frac{2 x}{y \sqrt{x^2 - y^2}}\, d y.$$

33. — Sia ora in generale

$$z - f(x, y, \ldots w).$$

Con ragionamenti analoghi a quelli fatti negli articoli 101, 102, 105, 106, si dimostra

1.° che, rappresentando con Δz l'incremento di z corrispondente agli incrementi $h, k, \ldots$, e di $x, y, \ldots, W$ e con $\frac{dy}{dx}, \ldots \frac{dy}{dw}; \frac{dx}{dy}, \ldots, \frac{dx}{dw}; \ldots; \frac{dw}{dx}, \frac{dw}{dy} \ldots$ le derivate parziali risultanti dalla derivazione di $f(x, y, \ldots w)$ rispetto ad $x, y, \ldots w$, si ha

$$\Delta z = \frac{dh}{dx} + \frac{dk}{dy} + \ldots + \frac{de}{dw} + \alpha h + \beta k + \ldots + \varepsilon l,$$

essendo $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ funzioni che divengono nulle insieme ad $h, k, \ldots l$;

2.° che, quando $x, y, \ldots w$ sono funzioni di una medesima variabile indipendente, si ha

$$dz = \left(\frac{dy}{dx} + \ldots + \frac{dw}{dx}\right) + \left(\frac{dx}{dy} + \ldots + \frac{dw}{dy}\right) + \ldots + \\ + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dy} + \ldots\right).$$

Teorema: *La derivata di una funzione di più variabili, le quali siano funzioni di una medesima variabile indipendente, è uguale alla somma delle derivate parziali che risultano dalla derivazione della funzione rispetto a ciascuna delle variabili riguardando le altre come costanti;*

3.° che, quando le variabili $x, y, \ldots, w$, sono indipendenti si ha

$$\Delta z = \left(\frac{dy}{dx} + \ldots + \frac{dw}{dx}\right) + \left(\frac{dx}{dy} + \ldots + \frac{dw}{dy}\right) + \ldots + \\ + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dy} + \ldots\right) + \mu\, dx + \nu\, dx + \ldots + \chi\, dw,$$

essendo $\mu, \nu, \ldots, \chi$ funzioni che divengono infinitesime insieme a $dx, dy, \ldots, dw$. Si noti che quest'ultima espressione potrebbe essere molto semplificata scrivendo

$$\left(\frac{dy}{dx} + \ldots + \frac{dw}{dx}\right) = \frac{df}{dx} dx, \quad \left(\frac{dx}{dy} + \ldots + \frac{dw}{dy}\right) = \\ = \frac{df}{dy} dy, \quad \left(\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dy} + \ldots\right) = \frac{df}{dw} dw.$$

Di questa annotazione terremo conto in seguito.

4.° che, quando le variabili $x, y, \ldots, w$ non sono tutte indipendenti, dz si può mettere sotto la forma

$$\varphi(x, y, \ldots w)\, dx + \psi(x, y, \ldots, w)\, dx + \ldots + \\ + \xi(x, y, \ldots, w)\, dw,$$

dove le funzioni φ, ψ, ..., ξ non sono sempre le derivate parziali rispetto ad x, y, ..., w di una funzione di queste variabili.

Quando le variabili x, y, ..., w sono indipendenti, le derivate parziali soglionsi rappresentare con $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{dz}{dw}$, e la somma dei differenziali parziali

$$\frac{dz}{dx}dx, \frac{dz}{dy}dy, \ldots, \frac{dx}{dw}dw$$

dicesi *differenziale totale* di z e la si rappresenta con dz.

Quindi *per definizione* si ha

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy + \ldots + \frac{dz}{dw}$$

Ecco un esempio. Sia

$$y = u\,v\,w\ldots$$

essendo u, v, w, ... variabili indipendenti

Derivando si ha

$$dy = vw\ldots du + uw\ldots dv + uv\ldots dw + \ldots$$

$$\frac{dy}{du\,dv\,dw\ldots} = vw\ldots + uw\ldots + uv\ldots + \ldots$$

34. — Dall'articolo precedente risulta che se

$$z = f\,(x, y, \ldots w)$$

e le variabili x, y, ... w sono indipendenti, si ha

$$\Delta z = dz + \mu\,dz + \nu\,dy + \ldots + \chi\,dw$$

essendo μ, ν, ... χ funzioni che divengono infinitesime insieme a dx, dy, ... dw. Quest'eguaglianza dimostra che se dx, dy, ..., dw sono quantità infinitesime e dz non è nullo, Δz differisce da dz di una quantità infinitesima rispetto a dz, ossia il rapporto $\frac{\Delta z}{dz}$ converge verso il limite 1, quando dx, dy, ... dw si approssimano indefinitamente a zero.

35. — Quando fra tre variabili x, y, z si hanno due equazioni

$$f(x, y, z) = 0 \quad ; \quad \varphi\,(x, y, z) = 0$$

se una delle tre variabili si riguarda come indipendente, le altre sono funzioni implicite di questa Sia x la variabile che si riguarda come indipendente. Se le equazioni fossero risolute rispetto ad y e z, cioè se si avessero y e z espresse esplicitamente in funzione di x, sostituendo queste espressioni nei primi membri delle loro equazioni, questi diverrebbero identicamente eguali a zero. Ma il differenziale di un'espressione in x, la quale sia$=0$ per qualunque valore di x, è anch'esso sempre$=0$. Dunque (107)

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dx}dx + \dfrac{df}{dy}dy + \dfrac{df}{dz}dz = 0 \\ \dfrac{d\varphi}{dx}dx + \dfrac{d\varphi}{dy}dy + \dfrac{d\varphi}{dy}dz = 0 \end{cases}$$

In generale, quando fra n variabili x, y, z, ... si hanno $n-1$ equazioni, se anche una sola delle variabili, per esempio x, si riguarda come indipendente, le altre sono funzioni implicite di questa, e per determinare le derivate dei primi membri, basta eguagliare a zero le derivate di esse funzioni variabili, ricavare quindi dy, dz,... dalle equazioni risultanti, le quali chiamansi *equazioni differenziali di primo ordine* delle equazioni proposte.

Poniamo, per esempio, che siano date le equazioni.

$$x^2+y^2+z^2=r^2\,;\quad Ax+By+Cz=D$$

e si ricerchino le derivate di y e z riguardate come funzioni di x.

Le equazioni differenziali immediate di primo ordine sono

$$2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz=0\,;$$
$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0\,;$$

da cui s'ottiene

$$dy=\frac{Az-Cx}{Cy-Bz}dz\quad;\quad dz=\frac{Bx-Ay}{Cy-Bz}dx\,;$$

onde

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Az-Cx}{Cy-Bz}\quad;\quad \frac{dz}{dx}=\frac{Bx-Ay}{Cy-Bz}\,.$$

36. — Considerando ora funzioni implicite di più variabili, abbiasi fra tre variabili x, y, z l'equazione

$$f\,(x,\ y,\ z)=0$$

Se due variabili si riguardano come indipendenti, la terza è funzione di queste. Supposte x ed y indipendenti, s'immagini l'equazione risoluta rispetto az, e sia $z=\varphi\,(x,y)$. Se si sostituisce $\varphi\ (x,\ y)$ in luogo di z nel primo membro della equazione questo diviene identicamente eguale a zero. Ma il differenziale totale di una funzione di due variabili indipendenti, la quale sia$=0$ qualunque siano i valori delle variabili, è anch'esso sempre$=0$.

Dunque (art. 107)

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz=0$$

Da quest'eguaglianza, la quale dicesi essere *l'equazione differenziale immediata di primo ordine* dell'equazione (1), deriva

$$dz=-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}}dx-\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}}dy$$

In generale, quando fra n variabili si hanno $n-p$ equazioni, se p variabili si riguardano come indipendenti, le altre $n-p$ sono funzioni implicite di queste, ed i loro differenziali totali si possono ricavare dalle equazioni che risultano eguagliando a zero i differenziali totali dei primi membri, le quali chiamansi, come sappiamo, equazioni differenziali immediate di primo ordine delle equazioni date.

Sia data ora l'equazione $x+y^2+z^2=r^2$, e si domandi il differenziale totale di z riguardata come funzione di x ed y.

L'equazione differenziale immediata di primo ordine, o semplicemente, come useremo dire in seguito, l'equazione derivata è

$$2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz=0$$

da cui deriva

$$dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy,$$

che è il differenziale totale ricercato.

Qui osserveremo che la derivata parziale di z rispetto ad x è $=-\dfrac{x}{z}$, e quella rispetto ad y è $=-\dfrac{y}{z}$. La prima di queste derivate si poteva pure ottenere derivando l'equaizone data riguardandovi y come quantità costante, e l'altra derivando l'equazione stessa riguardandovi x come costante.

Ecco un altro esempio: Date l'equaizoni

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+u^2+v^2-10=0, \\ 2y^2z+3yv^2-5u^3+7z^2-8=0, \end{cases}$$

si cerchino i differenziali totali di u e v riguardate come funzioni di x, y, z.

L'equazioni derivate sono

$$\begin{cases} 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz + 2u\,du + 2v\,dv = 0 \\ (4yz + 3v^2)\,dy + (2y^2 + 14z)\,dz - 15u^2\,du\, b y v\,dv = 0 \end{cases}$$

che hanno

$$\begin{cases} du = -\dfrac{2xy}{2yu + 5u^2}dx + \dfrac{4yz + 3v^2 - 6y^3}{6yn + 15u^2}dy + \\ \qquad + \dfrac{14z + 2y^2 - 6yz}{6yu - 15u^2}dz \\ dv = -\dfrac{5xy}{2yv + 5uv}dx - \dfrac{4yz + 3v^2 + 15yu}{6yv + 15uv}dy - \\ \qquad - \dfrac{14z + 2y^2 + 15zu}{6yv - 15uv}dz \end{cases}$$

In queste formule le funzioni che moltiplicano dx, dy, dz sono rispettivamente le derivate parziali

$$\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dz}, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy}, \frac{du}{dz}, \frac{dv}{dz}.$$

37. — Sia

$$z = f\,(x, y, u, \ldots)$$

ed x, y, u, ... siano variabili indipendenti.

Se si derivano le derivate parziali $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{dz}{du}, \ldots$ rispetto ad una qualunque delle variabili x, y, u, ... le derivate che si ottengono diconsi *derivate parziali di secondo ordine di z*, o brevemente seconde derivate parziali di z, e si rappresentano con i simboli

$$\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}, \frac{d^2z}{dx\,du}, \ldots, \frac{d^2z}{dy\,dx}, \frac{d^2z}{dy^2}, \frac{d^2z}{dy\,dn}, \ldots$$

i cui denominatori indicano le derivazioni parziali che si eseguirono per ottenerle. I differenziali corrispondenti a tali derivate, i quali, in conseguenza delle notazioni precedenti, sono rappresentati da

$$\frac{d^2z}{dx^2}dx^2, \frac{d^2z}{dx\,dy}dx\,dy, \frac{d^2z}{dx\,du}dx\,du, \ldots$$

$$\frac{d^2z}{dy\,dx}dy\,dx, \frac{d^2z}{dy^2}dy^2, \frac{d^2z}{dy\,du}dy\,du, \ldots$$

che si dicono *differenziali parziali di secondo ordine di z.*

Se si derivano ulteriormente le derivate parziali di secondo ordine rispetto ad x, y, u, ... le derivate che ne risultano si denominano *terze derivate parziali di* x, y, u, ..., ossia *derivate parziali di secondo ordine rispetto ad* x, y, u, ..., e si rappresentano con i simboli.

$$\frac{d^3 z}{d x^3}, \frac{d^3 z}{d z^2 d y}, \frac{d^3 z}{d x^2 d u}, \ldots \frac{d^3 z}{d x\, d y\, d x}, \frac{d^3 z}{d x\, d y^2}, \frac{d^3 z}{d x, d y, d u}, \ldots,$$

ed i differenti corrispondenti sono

$$\frac{d^3 z}{d x^3} d x^3, \frac{d^3 z}{d x^2 d y} d x^2 d y, \frac{d^3 z}{d x^2 d u} d x, d y, d x, \ldots$$

$$\frac{d^3 z}{d x\, d y\, d x} d x, d y, d x, \frac{d^3 z}{d x, d y^2}, \frac{d^3 z}{d x, d y, d u}, \ldots,$$

e si dicono *terzi differenziali parziali di* z, ossia *differenziali parziali di terzo ordine di* z.

In generale, se si eseguiscono n successive derivazioni della funzione z, la derivata che si ottiene infine, dicesi *ennesima derivata parziale di* z, o anche, *derivata parziale di ordine* n *esimo di* z, e la si rappresenta con un simbolo di forma frazionaria come per le precedenti, avente per numeratore $d^n z$ e per denominatore il prodotto delle derivate delle variabili rispetto a cui furono eseguite le derivazioni parziali scritte nell'ordine con cui furono fatte. Il differenziale corrispondente a tale n esima derivata sarà *l'ennesimo differenziale parziale di* z.

Così, a cagione d'esempio, la derivata che risulta da cinque derivazioni successive di z, delle quali la prima rispetto ad x, la seconda rispetto ad y, così pure la terza, la quarta e l quinta invece rispetto ad u, dicesi *quinta derivata parziale di* z, e si rappresenta

$$\frac{d^5 z}{d x\, d y^2\, d u},$$

ed il differenziale corispondente,

$$\frac{d^5 z}{d x\, d y^2\, d u^2} d x\, d y^2\, d u^2,$$

dicesi *quinto differenziale parziale di* z.

Diamo qui un esempio. Abbiasi da trovare le seconde e terze derivate parziali della funzione

$$z = \text{arc tang} \frac{y}{x}.$$

Le prime derivate parziali sono

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Derivandole rispetto ad x e y si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 z}{dx^2} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, & \dfrac{d^2 z}{dx\,dy} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\[2ex] \dfrac{d^2 z}{dy\,dx} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, & \dfrac{d^2 z}{dy^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

che sono le seconde derivate parziali di z.

Derivando ancora queste derivate sia rispetto ad x che rispetto ad y, si ha

$$\begin{cases} \dfrac{d^3 z}{dx^3} = \dfrac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}, & \dfrac{d^3 z}{dx^2\,dy} = \dfrac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \\[2ex] \dfrac{d^3 z}{dx\,dy\,dx} = \dfrac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}, & \dfrac{d^3 z}{dx\,dy^2} = \dfrac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \\[2ex] \dfrac{d^3 z}{dy\,dx^2} - \dfrac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}, & \dfrac{d^3 z}{dy\,dx\,dy} = \dfrac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \end{cases}$$

che sono le terze derivate parziali di z.

38. — Osservando le derivate dell'esmpio precedente si vede che

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = \frac{d^2 z}{dy\,dx}, \quad \frac{d^3 z}{dx^2\,dy} = \frac{d^3 z}{dx\,dy\,dx} = \frac{d^3 z}{dy\,dx^2},$$

$$\frac{d^3 z}{dx\,dy^2} = \frac{d^3 z}{dy\,dx\,dy} = \frac{d^3 x}{dy^2\,dx}.$$

Si ricava da ciò il seguente teorema.

Se si eseguiscono più derivazioni parziali successive di una funzione di più variabili indipendenti, la derivata risultante è la stessa qualunque sia l'ordine con il quale si fanno le derivazioni.

Il detto teorema è facilmente dimostrabile.

Sia z la funzione, e siano x, y, u ... le variabili indipendenti da cui essa dipende.

Incominceremo con il dimostrare che, se si deriva z prima rispetto ad una variabile, per esempio x, e poi rispetto ad un'altra, per esempio y, si ottiene la stessa derivata come quando si deriva z prima rispetto ad y e poi rispetto ad x, ossia che

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = \frac{d^2 z}{dy\,dz},$$

Per dimostrare ciò si può rappresentare z con $f\ (x,\ y)$, poichè si considerano come variabili solamente x ed y. Se in $f\ (x,\ y)$ si fa variare prima x di una quantità qualuqnue h e poi y di una quantità qualunque k, e se, ritenute le notazioni dell'articolo 101, si rappresentano con

$$f'(x,y)+\frac{df'(x,y)}{ey}k+\alpha' K$$

e con $\alpha\ +\ \alpha''\ k$ ciò che divengono $f'\ (x,\ y)$ ed α quando vi si cambia y in $y+k$, si ha

$$f(x+h,y+K)=f(x,y)+f_{,}(x,y)K+\beta K+$$
$$+\left[f'(x,y)+\frac{df'(x,y)}{dy}K+(\alpha+\alpha'' K)h.\right]$$

Se nella medesima funzione $f\ (x,\ y)$ si fa variare prima y della quantità k e poi x della quantità h, e se, ritenute le precedenti notazioni, si rappresenta con

$$f_{,}(x,y)+\frac{df_{,}(x,y)}{dx}h+\beta' h$$

e con $\beta+\beta''\ h$ ciò che divengono $f_{,}\ (x,\ y)$ e β quando vi si cambia x in $x+h$, si ha

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+f'(x,y)h+\alpha h+$$
$$+\left[f_{,}(x,y)+\frac{df_{,}(x,y)}{dx}h+\beta' h\right]K+(\beta+\beta'' h)K.$$

Eguagliando quest'ultima espressione di $f\ (x+h,\ x+k)$ alla precedente e semplificando l'eguaglianza risultante, si ottiene

$$\frac{df'(x,y)}{dy}+\alpha'+\alpha''=\frac{df.(x,y)}{dx}+\beta'+\beta''.$$

Quest'eguaglianza deve essere soddisfatta qualunque siano i valori di h e di k. Ma per $h=k=0$ si ha

$$\alpha'=\alpha''=\beta'=\beta_{,}'=0.$$

Dunque

$$\frac{df'(x,y)}{dy}=\frac{df_{,}(x,y)}{dx}\ \text{ossia}\ \frac{d^2 z}{dx\,dy}=\frac{d^2 z}{dy\,dx}.$$

Dimostrato così il teorema per due derivazioni successive, è facile dimostrare che le derivata risultante da parecchie derivazioni parziali successive di z non varia se si varia l'ordine di due derivazioni consecutive qualunque, e quindi che non varia neppure quando si varia comunque l'ordine delle derivazioni.

Diamo un esempio per miglior chiarezza.

$$\frac{d^3 z}{dx\,dy\,du} = \frac{d\,\dfrac{d^2 z}{dx\,dy}}{du} = \frac{d\,\dfrac{d^2 z}{dy\,dx}}{du} = \frac{d^3 z}{dy\,dx\,du};$$

$$\frac{d^3 z}{dx\,dy\,du} = \frac{d^2\,\dfrac{dz}{dx}}{du\,du} = \frac{d^3 z}{dx\,du\,dy}.$$

Ragionando analogamente si prova che

$$\frac{d^3 z}{dx\,dy\,du} = \frac{d^3 z}{du\,dx\,dy}$$

$$\frac{d^3 z}{dy\,dx\,du} = \frac{d^3 z}{dy\,du\,dx} = \frac{d^3 z}{du\,dy\,dx}.$$

Dunque

$$\frac{d^3 z}{dx\,dy\,du} = \frac{d^3 z}{dy\,dx\,du} = \frac{d^3 z}{dx\,du\,dy} =$$

$$= \frac{d^3 z}{du\,dx\,dy} = \frac{d^3 z}{dy\,du\,dx} = \frac{d^3 z}{du\,dy\,dx}.$$

39. — Chiamansi derivata di una funzione della forma

$$f\left(x + y\sqrt{-1}\right)$$

dove le variabili x ed y sono quantità reali, il limite verso cui tende il rapporto

$$\frac{f\left[x + h + (y + k)\sqrt{-1}\right] - \left(f\left(x + y\sqrt{-1}\right)\right)}{h + k\sqrt{-1}}$$

quando le quantità h e k, variando indipendentemente una dall'altra, si approssimano indefinitamente a zero.

Affinchè tale limite non sia indeterminato è necessario che sia indipendente dal limite verso cui tende il rapporto $\dfrac{h}{k}$ quando h e k tendono a zero. Ora questa condizione è soddisfatta per tutte le funzioni della forma

$$f\left(x + y\sqrt{-1}\right)$$

che vengono studiate dall'Algebra.

Poichè si è trovato che ognuna delle funzioni ora menzionate è irreducibile alla forma

$$a + h\sqrt{-1}$$

essendo a e b quantità reali i cui valori dipendono dai valori di x ed y, sia

$$f(x+y\sqrt{-1})=\varphi(x,y)+\psi(x,y)\sqrt{-1}$$

essendo le funzioni $\varphi(x,y)$ e $\psi(x,y)$ quantità reali. Allora si ha

$$f[x+h+(y+k)\sqrt{-1}]-f(x+y\sqrt{-1})$$
$$=\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y)+[\psi(x+h,y+k-\varphi x,y)]\sqrt{-1}=$$
$$=\frac{d\varphi}{dx}h+\frac{d\varphi}{dy}k+\left(\frac{d\psi}{dx}h+\frac{d\psi}{dy}k\right)\sqrt{-1}+\alpha h+\beta k,$$

essendo e β funzioni che tendono a zero insieme ad h e k, per conseguenza

$$\lim\frac{f[x+h+(y+k)\sqrt{-1}]-f(x+y\sqrt{-1}]}{h+k\sqrt{-1}}$$

$$=\lim\frac{\dfrac{d\varphi}{dx}+\dfrac{d\varphi}{dy}\cdot\dfrac{k}{h}+\dfrac{d\psi}{dx}\sqrt{-1}+}{}$$
$$\frac{+\dfrac{d\psi}{dy}\cdot\dfrac{k}{h}\sqrt{-1}+\alpha+\beta\dfrac{k}{h}}{1+\dfrac{k}{h}\sqrt{-1}}=$$

$$=\lim\frac{\dfrac{d\varphi}{dx}+\dfrac{d\psi}{dx}\sqrt{-1}+\dfrac{k}{h}\left(\dfrac{d\varphi}{dy}+\dfrac{d\psi}{dy}\sqrt{-1}\right)}{1+\dfrac{k}{h}\sqrt{-1}},$$

e finalmente, rappresentando con m il limite verso cui tende $\dfrac{k}{h}$,

$$\lim\frac{f[x+h+(y+k)\sqrt{-1}]-f(x+y\sqrt{-1})}{h+k\sqrt{-1}}=$$
$$=\frac{\dfrac{d\varphi}{dx}+\dfrac{d\psi}{dx}\sqrt{-1}+m\left(\dfrac{d\varphi}{dy}+\dfrac{d\psi}{dy}\sqrt{-1}\right)}{1+m\sqrt{-1}}$$

Questo limite, per $m=0$, è $=\dfrac{d\varphi}{dx}+\dfrac{d\psi}{dx}\sqrt{-1}$. Dunque, affinchè l'anzidetta condizione venga soddisfatta, deve sussistere l'eguaglianza

$$\frac{\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\psi}{dx}\sqrt{-1}+m\left(\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\psi}{dy}\sqrt{1-}\right)}{1+m\sqrt{-1}}=\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\psi}{dx}\sqrt{-1}$$

per qualunque sia il valore di m.

Moltiplicando i due membri di questa eguaglianza per $1+m\sqrt{-1}$ e semplificando l'eguaglianza risultante, si ottiene

$$\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\psi}{dy}\sqrt{-1}=-\frac{d\psi}{dx}+\frac{d\varphi}{dx}\sqrt{-1},$$

la quale eguaglianza equivale alle due

$$\frac{d\varphi}{dy}=-\frac{d\psi}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{d\psi}{dy}=\frac{d\varphi}{dx},$$

Ora si può facilmente verificare che queste due eguaglianze sono soddisfatte per tutte le suddette funzioni.

40. — Da quanto precede risulta che, essendo

$$f(x+y\sqrt{-1})=\varphi(x,y)+\psi(x,y)\sqrt{-1},$$

la derivata di $f(x+y\sqrt{-1}$ è

$$\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\psi}{dx}\sqrt{-1}.$$

Quindi, per cercare la derivata di $f(x+y\sqrt{-1})$, si potrebbe ridurre questa funzione alla forma

$$\varphi(x,y)+\psi(x,y)\sqrt{-1}$$

e poi differenziare parzialmente rispetto ad x i due termini di questa espressione e fare la somma delle derivate ottenute. Ma è facile dimostrare che, per la differenziazione delle funzioni di cui si tratta, si possono adoperare le regole che per le funzioni reali.

Se si rappresentano rispettivamente con x ed h le espressioni immaginarie $x+y\sqrt{-1}$ ed $h+k\sqrt{-1}$, e si rappresenta con $f'(x)$ la derivata di $f(x)$, si ha che, come per le funzioni reali, $f(x)$ è eguale al limite verso cui tende il rapporto

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

quando h si approssima indefinitamente a zero. Il prodotto

$f'(x)\,h$ dicesi differenziale della funzione $f(x)$ e lo si rappresenta anche con $df(x)$.

Se $f(x) = x^m$ essendo m un numero intero e positivo, si si ha dall'algebra che

$$f(x+h) = x^m + m\,h\,x^{m-1} + \\ + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} h^2 x^{m-2} + \ldots . + h^m,$$

quindi

$$f'(x) = \lim \frac{m\,h\,x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} h^2 x^{m-2} + \ldots .}{h} = m\,x^{m-1}$$

$$\text{Se } f(x) = e^x \,.\, e^{-h} = e^x \left(1 + h + \frac{h^2}{1\,.\,2} + \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots .\right)$$

da cui

$$f'(x) = \lim e^x \frac{h + \frac{h^2}{1\,.\,2} + \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots .}{h} = e^x.$$

Se $f(x) = a^x$ essendo a una costante qualunque, reale o della forma $\alpha + \beta \sqrt{-1}$, si ha anche $f(x) = e^{\log a}$ onde, differenziando

$$f'(x) = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

Se $f(x) = x^m$ essendo l'esponente m della forma $a + b \sqrt{-1}$, si ha anche $f(x) = e^{m \log x}$ e quindi, differenziando,

$$f'(x) = e^{m \log x} \frac{m}{x} = x^m \,.\, \frac{m}{x} = m\,x^{m-1}$$

Se $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f'(x)$ è eguale alla derivata della serie

$$x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

e perciò è uguale a

$$1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \ldots = \cos x$$

Se $f(x) = \cos x$, $f'(x)$ è uguale alla derivata della sua serie

$$1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \ldots .$$

da cui è $x - x + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} - \ldots = -\operatorname{sen} x.$

41. Chiudiamo questo capitolo con una serie d'esercizi.

1.° Data la funzione $z = x^y$, trovare dz

Ris. $dz = y x^{y-1} . dx + x^y \log x . dy.$

2.° Data

$$z = \frac{a x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

trovare dz.

Ris. $dz = a y (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} (y dx - x dy).$

3.° Data

$$z = (x^2 - \sqrt{y}) \log (u - v,$$

trovare dz.

Ris. $dz = 2 x \log (u - v) . dx - \frac{1}{2\sqrt{x}} \log (u - v)$

$$dy + \frac{x^2 - \sqrt{y}}{u - v} du - \frac{x^2 - \sqrt{y}}{u - v} dv.$$

4.° Data $z = e^x y^4$, trovare dz e d^2 quando x ed y sono indipendenti.

Ris. $dz = \frac{y dx - x dy}{y^2}$, $d^2 z = \frac{2 x dy^2 - 2 y dx^2}{y^3}$

5.° Data $z = e^x\ y^4$, trovare dz e d^2z quando x ed y sono indipendenti.

$$\text{Ris.} \begin{cases} dz = e^x y^4 . dx + 4 e^x y^4 . dy \\ d^2 2 = e^x y^4 . dx^2 + 8 e^x y^3 dx\, dy + \\ \quad + 12 e^x y^2 . dy^2. \end{cases}$$

6.° Data $z = x^3 \operatorname{sen} y$, trovare dz, d^2z e $d^3 2$ quando x ed y sono indipendenti.

Ris. $dz = 3 x^2 \operatorname{sen} y\, dx + x^3 \cos y , dy,$

$d^2 z = 6 x \operatorname{sen} y\, dx^2 + 6 x^2 \cos y . dx\, dy -$
$- x^3 \operatorname{sen} y . dy^2.$

$d^3 z = 6 \operatorname{sen} y . dx^3 + 18 x \cos y . d^2 x\, dy -$
$- q x^2 \operatorname{sen} y . dx\, dy^2 - x^3 \cos y . dy^3$

7.° Data $z = xyt$, trovare d^2z, d^3z, e d^4z, quando x, y e t sono indipendenti.

Ris. $d^2z = 2t\,dx\,dy + 2y\,dx\,dt + 2x\,dy\,dt$,

$d^3z = 6\,dx\,dy\,dt$,

$d^4z = 0$.

8.° Data l'equazione

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b = 0,$$

trovare le sue differenziali immediate di 1°, 2°, 3° e 4° ordine riguardando come indipendente la variabile x, e trovare le derivate

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}. \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^4y}{dx^4}.$$

Ris. $b^2x\,dx + a^2y\,dy = 0$

$$b^2dx^2 + a^2dx^2 + a^2y\,d^2y = 0$$

$$3dy\,d^2y + y\,d^3y = 0$$

$$3(d^2y)^2 + 4\,dy\,d^3y + y\,d^4y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3b^6x}{a^4y^5}, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{3b^8(a^2+4x^2)}{a^6y^7}$$

9.° Data l'equazione

$$y^2 - 2px = 0,$$

trovare le sue differenziali immediate di 1°, 2°, 3° e 4° ordine riguardando x come indipendente, e trovare le derivate

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^4y}{dx^4}.$$

Ris. $y\,dy - p\,dx = 0$, $dy^2 + y\,d^2y = 0$,

$$3\,dy\,d^2y + y\,d^3y = 0,$$

$$3(d^2y)^2 + 4\,dy\,d^3y + y\,d4y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 1\,.\,3\,\frac{p^4}{y^5},$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -1\,.\,3\,.\,5\,\frac{p^4}{y^7}.$$

10.° Trovare le equazioni differenziali immediate di 1° 2° e 3° ordine dell'equazione dell'esempio precedente, riguardando y come indipendente.

$$\text{Ris. } y\,dy - p\,dx = 0, \quad dy^2 - p\,d^2x = 0,$$
$$d^3x = 0.$$

11.° Svolgere in serie la funzione

$$e^{x+y}$$

$$\text{Ris. } e^{x+y} = 1 + x + y + \frac{1}{1\,.\,2}(x\,y)^2 +$$
$$+ \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}(x+y)^3 + \ldots$$

INDICE

PARTE SECONDA. — *Calcolo integrale.*