1 Cardinali

Ricordiamo che due insiemi X, Y si dicono equipotenti quando esiste una biiezione $\varphi : X \to Y$. Due insiemi equipotenti si dice anche che hanno lo stesso cardinale. Cioè il cardinale di un insieme è un simbolo che si "attacca" alla classe di tutti gli insiemi fra loro equipotenti. Se X è un insieme, indicheremo il suo cardinale con il simbolo $|X|$.

Ricordiamo che se ξ, η sono cardinali, con $\xi = |X|$, $\eta = |Y|$, allora, per definizione:

$$\xi + \eta = |X \cup Y| \quad \text{se} \quad X \cap Y = \emptyset$$

$$\xi \eta = |X \times Y|$$

$$\xi^{\eta} = |X^{Y}|$$ dove X^{Y} è l'insieme di tutte le funzioni di dominio Y e codominio X.

I seguenti risultati sull'aritmetica dei cardinali sono di dimostrazione elementare.

Se ξ, η, ζ sono cardinali, allora:

1) $\xi + (\eta + \zeta) = (\xi + \eta) + \zeta$
2) $\xi + \eta = \eta + \xi$
3) $\xi(\eta + \zeta) = \xi\eta + \xi\zeta$
4) $\xi(\eta\zeta) = (\xi\eta)\zeta$
5) $\xi\eta = \eta\xi$
6) $\xi^{\eta + \zeta} = \xi^{\eta}\xi^{\zeta}$
7) $(\xi\eta)^{\zeta} = \xi^{\zeta}\eta^{\zeta}$
8) $(\xi^{\eta})^{\zeta} = \xi^{\eta\zeta}$

Le 1) ÷ 5) sono assolutamente triviali. Le 6) ÷ 8) sono di dimostrazione lievemente più complicata, ma senza alcuna difficoltà concettuale.

Tra i cardinali si introduce un ordinamento, nel seguente modo: se ξ, η sono cardinali, con $\xi = |X|$, $\eta = |Y|$, allora $\xi \leq \eta$ significa che esiste una applicazione <u>iniettiva</u> $\psi: X \to Y$.

Si può dimostrare che

1) (Schröder - Bernstein) Se $\xi \leq \eta$ e $\eta \leq \xi$, allora $\xi = \eta$ (in altre parole se esiste una iniezione $\psi: X \to Y$ ed una iniezione $\chi: Y \to X$, allora esiste una biiezione $\omega: X \to Y$)

2) Dati due cardinale ξ, η, allora $\xi = \eta$, oppure $\xi \lneq \eta$, oppure $\eta \lneq \xi$. (Cioè, l'ordinamento dei cardinali è totale. La dimostrazione di tale proposizione richiede l'uso dell'assioma della scelta)

3) Un insieme A di cardinali è bene ordinato dal suo ordinamento naturale (ricordiamo che un insieme ordinato A si dice <u>bene ordinato</u> se ogni suo sottoinsieme <u>non vuoto</u> ha un minimo)

Esercizio - 1) Sia $\varphi: X \to Y$ un'applicazione suriettiva. Si provi che $|Y| \leq |X|$

2) Sia X un insieme, e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Si provi che $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$, e che $2^{|X|} \gneq |X|$.

3) Si provi: $\xi \leq \eta \Rightarrow \underline{\xi + \zeta \leq \eta + \zeta}$; $\xi\zeta \leq \eta\zeta$; $\zeta^{\xi} \leq \zeta^{\eta}$; $\xi^{\zeta} \leq \eta^{\zeta}$

Il cardinale di $\emptyset$, $|\emptyset|$, si indica con il numero ~~naturale~~ intero 0. Il cardinale di $\{1, \dots, n\}$ si indica con n. Tali cardinali si chiamano cardinali finiti e la loro aritmetica è quella dei numeri naturali.

Il primo cardinale infinito è quello dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Esso si indica con $\aleph_0$. Si prova facilmente che $2\aleph_0 = \aleph_0$ e che $\aleph_0^2 = \aleph_0$.

Quindi, già per il primo cardinale infinito, l'aritmetica dei numeri naturali non è più valida.

Passeremo subito a considerare l'aritmetica dei cardinali infiniti. Prima, abbiamo bisogno di un lemma:

Lemma - Se η è un cardinale infinito tale che $\eta^2 = \eta$, allora $\eta = 2\eta = 3\eta$.

Dim. Si ha: $\eta \leq 2\eta \leq 3\eta \leq \eta\eta = \eta^2 = \eta$ //

Teorema. Per ogni cardinale infinito ξ, $\xi^2 = \xi$.

<u>Dim</u>. Sia X un insieme tale che $|X| = \xi$. ~~Vogliamo dimostrare~~ ~~che~~ Si vuole costruire una biiezione di X su $X \times X$. Non arriveremo a questo; però dimostreremo che esiste un sottoinsieme B di X, con $|B| = \xi$, e una biiezione $\psi : B \to B \times B$, il che dimostrerà ugualmente il teorema. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia delle coppie (E, φ) dove $E \subseteq X$ e φ è una biiezione di E su $E \times E$.

Osserviamo che $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Infatti X contiene sottoinsiemi E di cardinale $\aleph_0$, e, per quanto osservato sopra, esisterà una biiezione $\varphi : E \to E \times E$, se $|E| = \aleph_0$.

Diamo a $\mathcal{F}$ un ordinamento parziale $\leq$, convenendo di scrivere $(E, \varphi) \leq (F, \psi)$ se $E \subseteq F$ e ψ estende φ (i.e., $\psi(x) = \varphi(x)$ per ogni $x \in E$). L'insieme semiordinato $(\mathcal{F}, \leq)$ è induttivo (i.e., ogni suo sottoinsieme totalmente ordinato (catena) ha un maggiorante in $\mathcal{F}$)

Sia infatti $((E_i, \varphi_i))_{i \in I}$ una catena di $\mathfrak{F}$. Si ponga $E = \bigcup_{i \in I} E_i$, e si definisca $\varphi : E \to E \times E$ ponendo $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ se $x \in E_i$ per un certo $i \in I$. Si vede subito che φ è ben definita (gli E_i sono "inscatolati") e le φ_i sono l'una l'estensione dell'altra) ed è una biiezione.

Quindi in $(\mathfrak{F}, \leq)$ vi è almeno un elemento massimale, diciamolo (B, ψ). Si tratta di provare che $|B| = \xi$.

Supponiamo che questo non sia vero, sia cioè $|B| = \eta \lneqq \xi$. Per "costruzione", $\eta^2 = \eta$. Si ha poi $X = B \cup (X \setminus B)$, quindi $\xi = \eta + |X \setminus B|$. Questo implica $\zeta = |X \setminus B| \gneqq \eta$, perché se così non fosse, si avrebbe $\xi = \eta + \zeta \leq 2\eta$, da cui, per il lemma, $\xi \leq \eta$, contrariamente a quanto supposto. ~~E~~ Quindi $X \setminus B$ contiene un sottoinsieme C tale che $|C| = \eta$. Proveremo ora che ψ si estende ad una biiezione $\omega : B \cup C \to (B \cup C)^2$, il che contraddice la massimalità di (B, ψ).

Si ha infatti $(B \cup C)^2 = (B \times B) \cup (B \times C) \cup (C \times B) \cup (C \times C)$.

Si tratta di ~~costruire~~ mostrare che esiste una biiezione $\gamma : C \to (B \times C) \cup (C \times B) \cup (C \times C)$, cioè di provare che $|(B \times C) \cup (C \times B) \cup (C \times C)| = \eta$. Si ha ora, per il lemma, $\eta^2 + \eta^2 + \eta^2 = \eta + \eta + \eta = 3\eta = \eta$. Quindi γ esiste. Definendo ora ω mediante: $\omega(x) = \psi(x)$ se $x \in B$, $\omega(x) = \gamma(x)$ se $x \in C$, ω è una biiezione di $B \cup C$ su $(B \cup C)^2$ //

Corollari – 1) Se ξ, η sono cardinali non nulli, uno dei quali infinito, si ha $\xi + \eta = \xi\eta = \max\{\xi, \eta\}$

2) Se ξ è infinito, si ha $\xi^\xi = (2^\xi)^\xi = 2^{\xi^2} = 2^\xi$

~~3) $(\xi + \eta)^\eta$ [illegible] se $\xi, \eta \neq 0$ e uno almeno infinito.~~

[illegible]

3) Siano $\xi \underset{\neq}{>} 1$ ed η cardinali, uno almeno dei quali infinito. Si ha $\xi^\eta = (\xi+\eta)^\eta = (\xi\eta)^\eta = (\max\{\xi,\eta\})^\eta$.

<u>Dim.</u> 1) Sia $\xi \leq \eta$, cioè $\eta = \max\{\xi,\eta\}$.

Si ha $\eta \leq \xi + \eta \leq \eta + \eta \leq \eta\eta = \eta$

2) Ricordiamo che $2^\xi \underset{\neq}{>} \xi$. Allora:

$$2^\xi \leq \xi^\xi \leq (2^\xi)^\xi = 2^{\xi^2} = 2^\xi \text{ da cui } \xi^\xi = 2^\xi$$

3) Si ha $\xi^\eta \leq (\xi+\eta)^\eta = (\max\{\xi,\eta\})^\eta =$

$$= (\xi\eta)^\eta = \xi^\eta\eta^\eta = \xi^\eta 2^\eta \underset{\eta}{=} \max\{\xi^\eta, 2^\eta\} = \xi^\eta \,//$$

Questo corollario è di grande importanza e ha svariate applicazioni. Prima di procedere a qualcuna di queste, diamo due altre definizioni.

Definizioni - Sia $(\xi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di cardinali, e sia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di insiemi tali che $|X_\lambda| = \xi_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Il cardinale $\sum_{\lambda\in\Lambda} \xi_\lambda$ è il cardinale dell'insieme $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda \times \{\lambda\})$. (Cioè, è il cardinale della "unione disgiunta" degli insiemi X_λ)

Ricordiamo che $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ è l'insieme di tutte le applicazioni $x : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ tali che $x(\lambda) \in X_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. (Il fatto che $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$ se $X_\lambda \neq \emptyset$, $\forall \lambda \in \Lambda$, si chiama "assioma del prodotto" ed è equivalente all'assioma della scelta).
Detto ciò, si pone, per definizione, $\prod_{\lambda\in\Lambda} \xi_\lambda = |\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda|$.

Proposizione - Siano $f: X \to Y$ un'applicazione suriettiva. Se $|Y| \geq \aleph_0$ e $|f^\leftarrow[y]| \leq |Y|$ per ogni $y \in Y$, allora $|Y| = |X|$

(Nota. Se $B \subseteq Y$, $f^\leftarrow[B]$ indica l'immagine inversa di B tramite f.)

<u>Dim.</u> Gli insiemi $\{f^\leftarrow[y] : y \in Y\}$ costituiscono una partizione di X. Si ha quindi $|X| = \sum_{y\in Y} |f^\leftarrow[y]| \leq |Y||Y| = |Y|$. //

Proposizione 2. Se X è un insieme infinito, e $\mathcal{F}(X) (\subset \mathcal{P}(X))$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di X, allora $|\mathcal{F}(X)| = |X|$.

Dim. Sia $\mathcal{F}_n(X)$ l'insieme dei sottoinsiemi di X aventi n elementi ($n = 0, 1, 2, \dots$). È chiaro che $|\mathcal{F}_n(X)| = |X|$ (si provi che esiste un'iniezione di $\mathcal{F}_n(X)$ in X^n). Si ha $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(X)$, e gli $\mathcal{F}_n(X)$ sono a due a due disgiunti. Quindi $|\mathcal{F}(X)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{F}_n(X)| = \aleph_0 |X| = |X|$ //

Esercizi. 4) Nel dimostrare le proposizioni 1), 2) è stato implicitamente usato il seguente fatto: Se $(X_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ è una famiglia di insiemi a due a due disgiunti, e $|X_\lambda| = \xi$ per ogni $\lambda \in \Delta$, allora $|\bigcup_{\lambda \in \Delta} X_\lambda| = |\Delta| \xi$ (in altre parole, $\sum_{\lambda \in \Delta} \xi = \xi |\Delta|$). Si provi questo fatto.

5) Il cardinale di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $2^{\aleph_0}$, si indica con $\mathbf{c}$ e si chiama <u>cardinale del continuo</u> (si sa che $\mathbf{c} = |\mathbb{R}|$, dove $\mathbb{R}$ = reali, ma lo dimostreremo di nuovo in seguito). Si provi che l'insieme $\mathcal{N}$ dei sottoinsiemi numerabili di $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ ha cardinalità $\mathbf{c}$.

6) Sia $C(\mathbb{R})$ la totalità delle funzioni continue sui reali $\mathbb{R}$ (con la topologia usuale) a valori reali. Si osservi che se $f, g \in C(\mathbb{R})$ e $f|\mathbb{Q} = g|\mathbb{Q}$, allora $f = g$ (NB: $\mathbb{Q}$ = razionali, $f|\mathbb{Q}$ = restrizione di f a $\mathbb{Q}$). Si provi quindi che $|C(\mathbb{R})| = \mathbf{c}$ (ricordando che $|\mathbb{R}| = \mathbf{c} = 2^{\aleph_0}$).

7) Sia V uno spazio vettoriale sopra un corpo commutativo K (NB. ciò che diremo vale però anche per corpi qualsiansi), e sia B una base di V su K. Sappiamo che se B_1 è un'altra base per V su K, allora $|B_1| = |B|$. Pertanto $|B|$ è un invariante di V, la <u>dimensione</u> di V su K, che si indica

con $\dim_K(V)$. Si provi che se $|K|$ oppure $\dim_K(V)$ sono infiniti, allora $|V| = |K| \dim_K(V)$. Pertanto, ogni volta che $|V| \gneqq |K|$, $|V| \geq \aleph_0$, si ha $\underline{\dim_K(V) = |V|}$.

8) Siano K, V come all'esercizio 7). Sia V' il duale di V (spazio delle forme lineari su V). Si provi che

$$|V'| = |K|^{\dim_K(V)}$$

9) Sia A un anello commutativo con unità, x una trascendente su A. Si provi che $|A[x]| = \max\{\aleph_0, |A|\}$. Se ne deduca che se A è per di più un corpo, la chiusura algebrica K di A ha cardinalità $\max\{\aleph_0, |A|\}$.

10) Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, e sia D un sottoinsieme denso di X. Si provi che $|X| \leq \exp(\exp(|D|))$ (NB. $\exp \xi = 2^{\xi}$ per definizione, quando $\xi \geq \aleph_0$) Suggerim: si costruisca un'iniezione di X in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(D))$.

11) Tale esercizio vuole mostrare che nell'esercizio precedente può aversi $|X| = \exp(\exp(|D|))$. Sia $X = [0,1]^{[0,1]}$ con la topologia prodotto delle topologie usuali su $[0,1]$. Si provi che X è separabile, cioè che esiste $D \subset X$, $|D| = \aleph_0$, D denso in X. Se ne deduca che X <u>non</u> soddisfa al primo assioma della numerabilità.

12) Si provi che quanto asserito all'esercizio 10) può essere falso se X, anzichè T_2, è soltanto T_1.

Ordinali e Cardinali.

1. Ricordiamo che un insieme (parzialmente) ordinato $(X, \leq)$ si dice <u>bene</u> <u>ordinato</u> se ogni suo sottoinsieme <u>non</u> <u>vuoto</u> ha un minimo.

Evidentemente, un insieme bene ordinato è totalmente ordinato, e ogni sottoinsieme di un insieme bene ordinato è bene ordinato (dall'ordine indotto).

Esempi di insiemi bene ordinati: 1) l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali (con l'ordine naturale).

2) l'insieme vuoto

3) l'insieme I dei numeri razionali della forma $m - \frac{1}{n}$, con m, n interi positivi, considerato con l'ordine indotto dall'ordine naturale dei razionali $\mathbb{Q}$.

Gli insiemi $\mathbb{Z}$ (interi relativi), $\mathbb{Q}$ (razionali), $\mathbb{R}$ (reali) <u>non</u> sono bene ordinati dai loro ordini naturali.

Ricordiamo che un'applicazione f tra due insiemi ordinati $(X, \leq)$, $(Y, \leq)$ è detta crescente (risp. strettam. crescente) se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$ (risp: $f(x_1) < f(x_2)$).

Se X, Y sono insiemi bene ordinati (N.B.: tralasceremo d'ora in poi di scrivere esplicitamente l'ordinamento accanto all'insieme) e f è una applicazione biiettiva crescente di X su Y, allora f si dice un <u>isomorfismo</u> dell'insieme bene ordinato X sull'insieme bene ordinato Y.

. È immediato verificare che se $f: X \to Y$ è un isomorfismo di insiemi bene ordinati, allora l'applicazione inversa $f^{\leftarrow}$ è un isomorfismo di Y su X.

Due insiemi bene ordinati isomorfi sono detti avere lo stesso tipo d'ordine, o anche lo stesso <u>ordinale</u>.

Esercizi. I) Ogni sottoinsieme inferiormente limitato e infinito dell'insieme ordinato $\mathbb{Z}$ è un insieme bene ordinato isomorfo a $\mathbb{N}$.

II) Si aggiunga un elemento ω all'insieme dei numeri naturali, e si ordini l'insieme $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ ponendo $n < \omega$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, lasciando invariato l'ordine su $\mathbb{N}$. Allora $\mathbb{N}^+$ è bene ordinato, e <u>non</u> è isomorfo a $\mathbb{N}$. Si trovi un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ isomorfo a $\mathbb{N}^+$

Teorema 1 - Sia X un insieme bene ordinato, e sia $f: X \to X$ un'applicazione strettamente crescente. Risulta allora $x \leq f(x)$ per ogni $x \in X$.

<u>Dim</u>. Si ponga $I = \{x \in X : f(x) < x\}$. Si tratta di provare che I è vuoto. Se I non è vuoto, I ha un minimo m; poiché $m \in I$, $f(m) < m$; e poiché f è strettamente crescente, $f(f(m)) < f(m)$, che implica $f(m) \in I$. Ma era $f(m) < m$, contraddicendo il fatto che m è minimo di I //.

Corollario 1 - L'identità è l'unico isomorfismo di un insieme bene ordinato in sé. Quindi, se $\varphi: X \to Y$ è un isomorfismo dell'insieme bene ordinato X sull'insieme bene ord. Y, φ è l'unico isomorfismo di X su Y.

(La dimostrazione è banale) (il min. va nel min., ecc.)

I Parte Sia $f: X \to X$, isom. $\neq 1$. Sia $I = \{x \mid x < f(x)\}$, $L = \{x \mid x = f(x)\}$. Per il T. prec., $X = I \cup L$; $L \neq \emptyset$, perché, x minimo $\in L$. Sia $i = \min I$. Allora: per $x < i$, $x = f(x)$; per $x \geq i$, $x < f(x)$. Ora, $i \notin f(X) = X$, assurdo; $\Rightarrow f = 1$

Intuitivamente parlando, il teorema precedente dice che il grafico di un'applicazione strettamente crescente di un insieme bene ordinato X in sè si trova tutto al di sopra della diagonale di $X \times X$. Ciò non accade per insiemi che siano soltanto totalmente ordinati (ad es., $\mathbb{R}$ e l'applicazione $x \longmapsto x^3$)

Esercizio - Il teorema precedente resta vero se si toglie l'avverbio "strettamente"?

2. Sia X un insieme bene ordinato, e sia a un elemento di X. L'insieme $W(a) = \{x \in X : x < a\}$ si chiama segmento iniziale determinato da a.

Il teorema 1 mostra immediatamente che:

Proposizione 1. Se X è un insieme bene ordinato, e $a \in X$, allora X e $W(a)$ hanno ordinali diversi.

e quindi:

Proposizione 2. Se X è un insieme bene ordinato e $a, b \in X$, $a \neq b$, allora $W(a)$ e $W(b)$ hanno ordinali distinti.

Teorema (Tricotomia) Siano X e Y insiemi bene ordinati. Si considerino le proposizioni:

(a) X è isomorfo ad Y

(b) X è isomorfo a un segmento iniziale di Y

(c) Y è isomorfo a un segmento iniziale di X.

Una delle (a), (b), (c) è vera; e ciascuna di esse esclude le altre due.

<u>Dim</u>. La proposizione 1 implica subito che una fra le (a), (b), (c) esclude le altre due.

Se $X = \emptyset$, il teorema è immediato (infatti, se $Y = \emptyset$, allora X e Y sono isomorfi; altrimenti, X è isomorfo a $W(m)$, dove m è il minimo di Y).

Sia ora $X \neq \emptyset$, e sia I l'insieme degli $x \in X$ per cui esiste un isomorfismo φ_x di $W(x)$ su un segmento iniziale $W(y_x)$ di Y. Se $Y \neq \emptyset$ (caso banale già discusso), allora $I \neq \emptyset$ $(m \in I)$; inoltre, per il Corollario 1 e la Prop. 2 si ha che, se $x \in I$, $y \in X$, $y < x$, allora $y \in I$ (P.2, C.1) e $f_y = f_x | W(y)$ (C.1) (= restrizione di f_x a $W(y)$). Cioè, I è un sottoins. iniziale di X

Si ponga $J = \bigcup_{x \in I} W(x)$, $L = \bigcup_{x \in I} f_x[W(x)]$. Le f_x, $x \in I$ definiscono un isomorfismo f di J su L (per ogni $y \in J$, esiste $x \in I$ tale che $y \in W(x)$; posto $f(y) = f_x(y)$, si verifica, per quanto sopra detto, che f è ben definita. Trivialmente, f è un isomorfismo di J su L).

Si osservi ora che, se $J \neq X$, allora J è un intervallo iniziale $W(x_0)$ di X (poiché $X \setminus J$ è un sottoins. di X, pertanto dotato di min.). Analogamente per L e Y. Pertanto, se $J = X$, o $L = Y$, o entrambi, l'asserto è provato. Se $L \neq Y$, e $J \neq X$, si ha $J = W(x_0)$, $L = W(y_0)$, e $X = J \cup \{x_0\}$ (se ciò non fosse, se cioè x_0 non fosse il massimo di X, x_0^+, successivo di x_0 in X, apparterrebbe ad I (perché si potrebbe prolungare la f con $f(x_0) = y_0$), e ciò implicherebbe $x_0 \in J$).

Ponendo $\bar{f}(x) = f(x)$ per $x \in I$, $\bar{f}(x_0) = y_0$ possiamo quindi prolungare la f ad un isomorfismo di $X = J \cup \{x_0\}$ in $L \cup \{y_0\}$, il quale o è Y, o è un segmento iniziale di Y.

<u>Def</u>. Siano X, Y insiemi bene ordinati. Diremo che X ha ordinale minore uguale dell'ordinale di Y (in simboli, $\mathrm{ord}(X) \leq \mathrm{ord}(Y)$)

se X è isomorfo ad Y, oppure ad un segmento iniziale di Y (nel secondo caso, $\mathrm{ord}(X) < \mathrm{ord}(Y)$).
Si noti che, fino ad ora, pur parlando di ordinali, non abbiamo mai detto cosa essi sono, e ci siamo limitati a dire quando due insiemi bene ordinati hanno lo stesso ordinale, oppure quando uno ha ordinale minore dell'altro.
Si intuisce da ciò che cosa è un ordinale: esso è un qualcosa che caratterizza la classe di tutti gli insiemi bene ordinati a due a due isomorfi. Potremmo quindi definirli scegliendo un elemento per ciascuna di tali classi. Ciò si può effettivamente fare (si veda, ad esempio, [D]), ma a noi sarà sufficiente il concetto, seppure vago, già definito intuitivamente. D'ora in poi parleremo quindi di ordinali (supponendo di sapere cosa siano!).

3. Se X è un insieme bene ordinato, ogni ordinale $\leq \mathrm{ord}(X)$, se non è $\mathrm{ord}(X)$ stesso, è $\mathrm{ord}(W(x))$, $x \in X$ (Tricotomia) def di minore
Pertanto gli ordinali $\leq$ di un ordinale dato sono un insieme. Si verifica facilmente che tale insieme, con l'ordinamento degli ordinali, è bene ordinato, e il suo ordinale è $\mathrm{ord}(X)$, se X ha un massimo, è $\mathrm{ord}(X^+)$ se X non ha massimo (X^+ è l'insieme bene ordinato che si ottiene da X aggiungendovi un massimo).

Teorema. Ogni insieme Φ di ordinali è bene ordinato dal suo ordinamento naturale.

<u>Dim</u> Basta dimostrare che Φ ha un minimo. Sia $\alpha \in \Phi$. Se α non è il minimo di Φ, si scelga un insieme bene ordinato X tale che $\mathrm{ord}(X) = \alpha$.

. Per ogni $\beta \in \Phi$, $\beta < \alpha$, esiste uno e un solo $x_\beta \in X$ tale che $\beta = \mathrm{ord}(W(x_\beta))$. Sia $x_{\beta_0} = \min\{x_\beta : \beta \in \Phi, \beta < \alpha\}$. È chiaro che β_0 è il minimo di Φ //.

4. Ricordiamo qui l'enunciato dell'assioma della scelta e delle più importanti proposizioni ad esso equivalenti. Anzitutto, definiamo il concetto di prodotto di una famiglia di insiemi (peraltro già usato nel cap. precedente).

<u>Def.</u> <u>Sia</u> $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ <u>una famiglia non vuota di insiemi.</u> <u>L'insieme</u> $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ <u>è l'insieme di tutte le applicazioni</u> $x : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ <u>tali che</u> $x(\lambda) \in X_\lambda$ <u>per ogni</u> $\lambda \in \Lambda$ –

L'elemento $x(\lambda)$ si indica spesso con x_λ e si chiama λ-<u>componente</u> dell'elemento $x \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Le applicazioni $\pi_{\lambda_0} : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to X_{\lambda_0}$ date da $\pi_{\lambda_0}(x) = x_{\lambda_0}$ si chiamano <u>proiezioni</u> <u>canoniche</u> e sono di importanza fondamentale. Se $X_\lambda = X$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, allora $\prod_{\lambda \in \Lambda} X = X^\Lambda$ e la λ_0-proiezione corrisponde alla valutazione della applicazione $x \in X^\Lambda$ nel punto $\lambda_0 \in \Lambda$.

Premesso ciò:

<u>Teorema.</u> <u>Sono equivalenti le proposizioni</u>:

a) <u>(Lemma di Zorn) Ogni insieme parzialmente ordinato induttivo ha almeno un elemento massimale</u>

b) <u>(Assioma del prodotto) Se $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia non vuota di insiemi non vuoti, allora $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$.</u>

c) <u>(Principio del buon ordinamento) Ogni insieme X si può bene ordinare</u>.

La dimostrazione di questa equivalenza si può trovare su

[K] o su [D]. Rileviamo solo che la dim. di a) $\Rightarrow$ b) è un argomento standard: si ordinano funzioni mediante estensione, e col lemma di Zorn si prova che un elemento massimale è un elem. di $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ - Inoltre, (c) $\Rightarrow$ (b) è banale.

Sia ora X un insieme. Per (c), X si può bene ordinare. Si consideri la classe $\mathcal{O}$ dei buoni ordinamenti che si possono dare ad X. Tale classe è un insieme: infatti gli ordinamenti su X sono particolari sottoinsiemi di $X\times X$, cioè $\mathcal{O}\subset\mathcal{P}(X\times X)$. Sia $\Phi(X)$ l'insieme degli ordinali così ottenuti (cioè, $\Phi(X)=\{\mathrm{Ord}(X,\leq):\ \leq\in\mathcal{O}\}$). L'insieme $\Phi(X)$ ha dunque un minimo (Teor. 3). Se $|X|=\xi$, tale minimo si indica con ω_ξ e si chiama <u>minimo ordinale di cardinalità</u> ξ, o anche <u>ordinale iniziale</u>. Tale ordinale gode delle seguenti proprietà:

a) <u>L'insieme degli ordinali</u> $<\omega_\xi$, $W(\omega_\xi)$, <u>ha cardinalità</u> ξ.

b) <u>Per ogni ordinale</u> $\alpha<\omega_\xi$, <u>l'insieme</u> $W(\alpha)$ <u>degli ordinali minori di</u> α <u>ha cardinalità</u> $\lneqq \xi$.

Se Y è un altro insieme, e $|Y|=\eta$, è chiaro che si ha $\omega_\xi=\omega_\eta$ <u>se e solo se</u> $\xi=\eta$.
Pertanto i cardinali possono essere identificati con certi particolari ordinali, gli ordinali iniziali.
Vediamo di chiarire meglio questo concetto. Se $\alpha=\mathrm{Ord}(X)$ (X insieme bene ordinato), il cardinale $\xi=|X|$ si indica anche con $|\alpha|$ e si chiama cardinale dell'ordinale α.
L'insieme $\Phi(X)$ sopra considerato non è altro che la totalità degli ordinali aventi un dato cardinale.

. Questo insieme di ordinali ha un minimo, quello che è stato chiamato ω_ξ. Sia Y un altro insieme, $|Y| = \eta$, e si consideri ω_η. Si prova subito che

$$|X| \leq |Y| \iff \omega_\xi \leq \omega_\eta$$

(La dimostrazione è banale, e si lascia come esercizio)

Dato quindi un insieme A di ordinali, la corrispondenza $\xi \to \omega_\xi$ è iniettiva e muta l'ordinamento dei cardinali nell'ordinamento degli ordinali iniziali ad essi corrispondenti. Da ciò discende il fatto annunciato a pag 2. : <u>Un insieme A di cardinali è bene ordinato dal suo ordinamento naturale.</u>

Se ξ è un cardinale (infinito) si sa che $2^\xi \gneq \xi$; l'intervallo di cardinali $]\xi, 2^\xi] = \{\eta : \eta \text{ cardinale}, \xi \lneq \eta \leq 2^\xi\}$ è bene ordinato ed ha un minimo ξ^+, che è il <u>cardinale successivo</u> di ξ.

Il cardinale successivo di $\aleph_0$ si indica con $\aleph_1$: esso è il <u>primo cardinale non numerabile</u>.

Trivialmente, un ordinale α ha sempre un successivo, che si indica con $\alpha+1$ (se $\alpha = \mathrm{Ord}(X)$, si aggiunga ad X un elemento più grande di tutti gli altri, ottenendo X^+, insieme bene ordinato; $\alpha + 1 = \mathrm{Ord}(X^+)$). Un ordinale può o meno avere un predecessore immediato, cioè può o meno essere il successivo di un altro ordinale. Un ordinale privo di predecessore immediato si chiama <u>ordinale limite</u>; gli altri, <u>ordinali non limite</u> (cioè, ordinali $\alpha = \beta + 1$, β ordinale).

Esercizio 1). Gli ordinali iniziali ω_ξ, $\xi \geq \aleph_0$, sono tutti ordinali limite.

2) L'ordinale iniziale $\omega_{\aleph_0}$ (primo ordinale infinito) si indica con ω_0 o più semplicemente con ω. Si provi che $\omega = \mathrm{Ord}(\mathbb{N})$.

3) L'ordinale iniziale $\omega_{\aleph_1}$ si indica con ω_1 - Esso è il primo ordinale non numerabile. L'insieme $W(\omega_1) = \{\alpha : \alpha$ ordinale, $\alpha < \omega_1\}$ (il cui ordinale è proprio ω_1!) sarà di fondamentale importanza per future applicazioni.

Si provi il seguente fatto: $W(\omega_1)$ è l'insieme degli ordinali numerabili o finiti.

4) Generalizzando l'esercizio precedente, si provi che $W(\omega_{\xi^+})$ è l'insieme degli ordinali aventi cardinale $\leq \xi$.

5) Un sottoinsieme G di un insieme (parzialmente) ordinato E si dice *cofinale* in E se per ogni $a \in E$ esiste $x \in G$ tale che $x \geq a$. Si provi che in $W(\omega_1)$ (cfr. eserc. 3)) nessun sottoinsieme numerabile è cofinale, e che ogni sottoinsieme I ~~[illegible]~~ non numerabile e infinito è cofinale, ed è isomorfo a $W(\omega_1)$ (su I si considera ovviamente l'ordine indotto).

Gli ordinali sono molto utili in Topologia generale, oltre che in vari altri rami della matematica. La loro importanza dal punto di vista applicativo risiede in due principi associati agli insiemi bene ordinati, il principio di *induzione transfinita* e quello della *costruzione transfinita*.

Il primo non è altro che un'estensione del ben noto "II° principio di induzione" valido per i numeri naturali $\mathbb{N}$ (primo ordinale infinito!), e si può così enunciare:

(Induzione transfinita). *Sia X un insieme bene ordinato, e sia $\{P(x) : x \in X\}$ un insieme di proposizioni. Sia 0 il minimo di X ($X \neq \emptyset$). Se* 1) $P(0)$ *è vera e* 2) $\forall x \in X$, $P(y)$ *vera per* ogni $y \in W(x)$ implica $P(x)$ vera, ~~[illegible]~~ allora $P(x)$ è vera per ogni $x \in X$. (Dim: evidente).

Questo principio di induzione si presenta molte volte nelle applicazioni; spesso, dimostrazioni che si fanno usando il lemma di Zorn possono essere fatte con l'induzione transfinita, a volte più semplicemente.

Il principio della costruzione transfinita, benchè estremamente importante, ha un enunciato generale assai complicato. Si veda, per questo, [D, pag 40]. Ne faremo fra poco un'applicazione topologica assai importante, il teorema di Čech-Pospíšil.

Ora definiamo alcuni invarianti cardinali collegati agli spazi topologici. In ciò che segue, X denota uno spazio topologico.

1) Peso. Sia $\mathfrak{B}$ l'insieme di tutte le basi $\mathcal{B}$ di aperti per X. Il cardinale $\min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \in \mathfrak{B}\}$ si indica con $w(X)$ e si chiama peso dello spazio topologico X. In altre parole, il peso di X è la minima cardinalità di una base di X.

2) Peso ad un punto $p \in X$. Sia p un punto di X. Ricordiamo che una famiglia $\mathcal{B}_p$ di sottoinsiemi di X è una base per gli intorni di p se 1) ogni $U \in \mathcal{B}_p$ è intorno di p, 2) ogni intorno V di p in X contiene $U \in \mathcal{B}_p$. Detto ciò, si pone

$$\chi(p, X) = \min\{|\mathcal{B}_p| : \mathcal{B}_p \text{ è base per gli intorni di } p\}$$

$\chi(p, X)$ si chiama peso di X a p, o anche carattere locale a p.

Si osservi che $w(X) \leq \aleph_0 \Leftrightarrow X$ ha una base numerabile, e $\chi(p, X) \leq \aleph_0$ per ogni $p \in X \Leftrightarrow X$ soddisfa al I° assioma della numerabilità. (per definizione)

3) Pseudopeso ad un punto $p \in X$. Supponiamo ora X spazio T_1, e sia $p \in X$. Allora p è intersezione degli aperti che lo contengono. Si ponga $\psi(p,X) = \min\{|\mathcal{a}| : \mathcal{a} \text{ famiglia di aperti, e } \bigcap \mathcal{a} = \{p\}\}$. $\psi(p,X)$ si chiama pseudopeso di X a p.

Esercizio. Sia X compatto di Hausdorff. Si provi che per ogni $p \in X$, $\psi(p,X) = \chi(p,X)$.

Risoluzione. Anzitutto, si osservi che si ha sempre $\psi(p,X) \leq \chi(p,X)$ per ogni spazio T_1. ~~Dunque~~ Se X è compatto T_2 e $\mathcal{a}$ è una famiglia di aperti tali che $\bigcap \mathcal{a} = \{p\}$, allora per ogni elemento $U \in \mathcal{a}$ si scelga un intorno V di p, la cui chiusura $\overline{V}$ sia contenuta in U. Sia $\mathcal{B}_p$ la famiglia di questi intorni. Si ha $|\mathcal{B}_p| \leq |\mathcal{a}|$.

Ora, $\mathcal{B}_p$ è una prebase per gli intorni di p. Sia infatti W un aperto contenente p, e si ponga $F = X \setminus W$. Si consideri la famiglia $\mathcal{F} = \{\overline{V} \cap F : V \in \mathcal{B}_p\}$; $\mathcal{F}$ è una famiglia di chiusi e si ha $\bigcap \mathcal{F} = \left(\bigcap\{\overline{V} : V \in \mathcal{B}_p\}\right) \cap F = \{p\} \cap F = \emptyset$. Pertanto esistono $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{B}_p$ tali che $\overline{V}_1 \cap \dots \cap \overline{V}_n \subseteq X \setminus F$, e l'esercizio è praticamente concluso: Si è infatti provato che $V_1 \cap \dots \cap V_n \subseteq W$, cioè che $\mathcal{B}_p$ è una prebase per il sistema degli intorni di p; quindi, prendendo la famiglia $\mathcal{B}'_p$ delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{B}_p$, queste sono una base per gli intorni di p. Per la Prop 2, pag 6, $|\mathcal{B}'_p| = |\mathcal{B}_p|$; poiché $|\mathcal{B}_p| \leq |\mathcal{a}|$, l'asserto è provato //.

Teorema (Čech - Pospišil). Sia X uno spazio compatto e di Hausdorff, e sia ξ un numero cardinale. Se $\chi(p,X) \geq \xi$ per ogni $p \in X$, allora $|X| \geq 2^{\xi}$.

<u>Dim</u>. Sia ω_ξ il minimo ordinale di cardinale ξ, $W(\omega_\xi)$ la totalità degli ordinali $< \omega_\xi$, S_ξ l'insieme delle "successioni transfinite" con valori in $\{0,1\}$ e lunghezza ω_ξ, cioè $S_\xi = \{0,1\}^{W(\omega_\xi)}$. Si scelgano in X due insiemi aperti V_0^0 e V_0^1, disgiunti, e per ogni $s \in S_\xi$ si ponga $W_{s,0} = V_0^0$ se $s(0)=0$, $W_{s,0} = V_0^1$ se $s(0)=1$ ~~disgiunti~~. Per ciascun V_0^i $(i=0,1)$ si scelgano ora due insiemi aperti $V_1^{i,j}$ $(i,j=0,1)$ tali che $\overline{V}_1^{i,0} \cap \overline{V}_1^{i,1} = \emptyset$ con $\overline{V}_1^{i,j} \subseteq V_0^i$ e si ponga $W_{s,1} = V_1^{i,j}$ se $s(0)=i$ e $s(1)=j$. (Per capire, si faccia un disegno)

Si intuisce come proceda la dimostrazione: si tratta di "trasportare all'infinito" questo procedimento usando il buon ordinamento di $W(\omega_\xi)$. Se $s \in S_\xi$, $\alpha < \omega_\xi$, $s|\alpha$ denota $s|W(\alpha)$. Sia α un ordinale, $\alpha < \omega_\xi$, e si supponga che per ogni $\beta < \alpha$ e per ogni $s \in S_\xi$ insiemi aperti $W_{s,\beta}$ siano stati definiti in modo tale che:

1) $\overline{W}_{s,\beta+1} \subseteq W_{s,\beta}$ (se $\beta+1 < \alpha$)

2) $\overline{W}_{s,\beta+1} \cap \overline{W}_{t,\beta+1} = \emptyset$, se $\beta+1<\alpha$, $s|\beta+1 = t|\beta+1$ e $s(\beta+1) \neq t(\beta+1)$

3) $\bigcap_{\gamma \leq \beta} W_{s,\gamma} \neq \emptyset \quad \forall\, s \in S_\xi$.

4) $W_{s,\beta} = X$ per ogni ordinale limite β, $\beta < \alpha$, e ogni $s \in S_\xi$

Dobbiamo ora definire $W_{s,\alpha}$ per ogni $s \in S_\xi$ in modo che le 1) ÷ 4) siano soddisfatte con α in luogo di β. Disting. 2 casi:

I) Se α è ordinale limite, si porrà ovviamente (per 4)), $W_{s,\alpha} = X$ qualunque sia $s \in S_\xi$. Si tratta di mostrare che $\bigcap_{\gamma \leq \alpha} W_{s,\gamma} \neq \emptyset$ per ogni $s \in S_\xi$. Tale intersezione contiene $\bigcap_{\gamma \leq \alpha} \overline{W}_{s,\gamma+1}$, in base a 1) e a 4). Ma i $\overline{W}_{s,\gamma+1}$ sono insiemi chiusi, e in base a 3), essi hanno la proprietà dell'intersezione finita. Essendo

X compatto, tale intersezione è non vuota, e quindi anche $\bigcap_{\gamma \leq \alpha} W_{s,\gamma} \neq \emptyset$.

II) Se α è non-limite, $\alpha = \beta + 1$, per 3), $I = \bigcap_{\gamma \leq \beta} W_{s,\gamma} \neq \emptyset$. Inoltre, questa intersezione I non può ridursi a un solo punto; poichè, se così fosse tale punto avrebbe pseudopeso $\leq$ di $|W(\alpha)|$, che è $\lneqq \xi$ (dato che ω_ξ è ordinale iniziale) e ciò è contro l'ipotesi fatta. Si prendano quindi due aperti A_0, A_1, tali che $\bar{A}_0, \bar{A}_1 \subseteq W_{s,\beta}$, e $\bar{A}_0 \cap \bar{A}_1 = \emptyset$, e $\bar{A}_0 \cap I \neq \emptyset$, $\bar{A}_1 \cap I \neq \emptyset$. Si ponga poi $W_{s,\alpha} = A_0$ se $s(\alpha) = 0$, $W_{s,\alpha} = A_1$ se $s(\alpha) = 1$. Si vede subito che le 1) ÷ 4) sono soddisfatte.

In tale modo si costruiscono insiemi $W_{s,\alpha}$, aperti, per ogni $s \in S_\xi$ e ogni $\alpha < \omega_\xi$ (Si applichi il principio di induzione transfinita a ogni $s \in S_\xi$). Tali aperti godono tutti delle proprietà 1), 2), 4); inoltre, se $t \in S_\xi$, e s, t differiscono su un ordinale non limite $\beta+1$, si ha certamente $W_{s,\beta+1} \cap W_{t,\beta+1} = \emptyset$.

È poi facile provare che $I_s = \bigcap_{\alpha < \omega_\xi} W_{s,\alpha} \neq \emptyset$ per ogni $s \in S_\xi$ (basta ripetere il ragionamento svolto ~~per~~ provare il caso I). Si scelga un punto p_s per ogni I_s, e si consideri l'applicazione $p: S_\xi \to X$ definita da $s \to p_s$. Per quanto sopra osservato, se $s, t \in S_\xi$ e $t(\beta+1) \neq s(\beta+1)$, allora $p_t \neq p_s$. Poichè gli ordinali non-limite sono cofinali in ω_ξ, essi sono in numero di ξ, quindi vi sono almeno 2^ξ sequenze transfinite che differiscono su qualche ordinale non-limite, e il teorema è provato //.

Corollario. Uno spazio compatto di Hausdorff privo di punti isolati ha cardinalità $\geq c$ (c = continuo). —

Il precedente teorema dice, grosso modo, che se uno spazio compatto ha "molti" aperti, allora esso è anche molto grande (per la ~~la~~ maggiore precisione, direbbe che se occorrono molti aperti per "raggiungere" un punto, allora lo spazio è grande).

Si noti che un altro corollario del teorema è: (contenuto nel cor. prec.)

Uno spazio compatto e di Hausdorff, soddisfacente al primo assioma della numerabilità, privo di punti isolati, ha cardinalità $\geq c$

Ci si è chiesti per lungo tempo se era possibile "invertire" il teorema di Čech-Pospišil, se cioè era possibile trovare una maggiorazione della cardinalità di un compatto mediante una potenza del suo peso locale. In particolare, Alexandroff, ~~attorno~~ attorno al 1928, formulò la seguente congettura:

Uno spazio compatto, di Hausdorff e C_I, ha cardinalità $\leq c$.

Tale congettura è stata provata da Arkhangel'skij nel 1969:

Teorema (Arkhangel'skij). Se X è uno spazio compatto e di Hausdorff, e $\chi(p, X) \leq \xi$ (ξ cardinale infinito) per ogni $p \in X$, allora $|X| \leq 2^{\xi}$.

La dimostrazione usa ancora costruzioni transfinite simili a quella da noi usata per il teorema di Čech-Pospišil, ma assai più complicate. Il risultato precedente è certo uno dei più formidabili della topologia generale nell'ultimo decennio.

5. Si è osservato più volte che per ogni cardinale ξ, $2^{\xi} \gneq \xi$. Si ha poi anche $\xi^{+} \gneq \xi$, e ξ^{+} è l'immediato successore di ξ, quindi si ha $\xi \lneq \xi^{+} \leq 2^{\xi}$. Si pone il problema di vedere se $\xi^{+} = 2^{\xi}$. In particolare, ci si può chiedere se $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ o meno, in altre parole, se tra il cardinale $|\mathbb{N}|$ e il cardinale $|\mathbb{R}|$ vi siano o meno altri cardinali. Questo problema è stato per lungo tempo, da Cantor in poi, uno dei più celebri

della teoria degli insiemi, e su di essa sono stati scritti interi volumi.
L'*ipotesi del continuo* è che $\aleph_1 = c$, e si è cercato a lungo di vedere se essa discendeva o meno dagli altri assiomi della teoria degli insiemi. Gödel (credo attorno al 1940) dimostrò che $\aleph_1 = c$ è compatibile con gli altri assiomi della teoria degli insiemi (costruendo un modello di teoria degli insiemi in cui tale assioma era valido), ma Cohen nel 1963 ha costruito un modello di teoria degli insiemi in cui tale assioma non è più vero (anzi, tra $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$ si possono inserire un numero finito di cardinali, a piacere, e anche una infinità numerabile) Quindi, nella usuale teoria degli insiemi, non si può né provare, né disprovare la proposizione $\aleph_1 = c$.

"Questo stato di cose è molto insoddisfacente. In generale, un matematico "sente„ che gli oggetti con cui lavora sono reali, e che problemi come l'ipotesi del continuo hanno un senso. Si pone quindi il problema di trovare un assioma che abbia certe caratteristiche di "evidenza„ per essere accettato, e che risolva la questione „ (condensato da Cohen, Set theory and the Continuum Hypotheses)

Tutto quanto detto si può ripetere per l'*ipotesi generalizzata del continuo*, cioè $\xi^+ = 2^\xi$ *per ogni cardinale infinito* ξ.

Varie altre questioni di cardinalità, che spesso si presentano spontaneamente in problemi di ricerca in topologia generale, teoria dei gruppi abeliani, analisi funzionale, ecc. conducono, o sono addirittura equivalenti a problemi di aritmetica dei cardinali che non sono dimostrabili con gli usuali assiomi di teoria degli insiemi; anzi, come l'ipotesi del continuo, sono indipendenti da questi.

. Ad esempio, consideriamo la implicazione:

(*) Se ξ, η sono cardinali infiniti, allora $2^{\xi} = 2^{\eta} \Rightarrow \xi = \eta$. ?

Per quanto ne sa lo scrivente, questa implicazione è <u>indipendente</u> dagli usuali assiomi della teoria degli insiemi, esattamente come lo è l'ipotesi del continuo (Non ho però riferimenti bibliografici: lo so per sentito dire). Ammettendo [GCH] (ipotesi generalizzata del continuo), tale implicazione è ovviamente vera, ma essa è più debole di tale ipotesi.

Vediamo su un esempio come l'implicazione di cui sopra si presenti in una naturale questione algebrica:

(**) <u>Siano</u> V, W <u>spazi vettoriali di dimensione infinita sul corpo</u> Q, <u>siano</u> V', W' <u>i duali</u> (<u>algebrici</u>) <u>di</u> V, W. <u>Se</u> V' è <u>isomorfo a</u> W', <u>è vero che allora</u> V, W <u>sono isomorfi</u>?

Discussione- Due spazi vettoriali sullo stesso corpo sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione. Sia $\xi = \dim_Q(V)$, $\eta = \dim_Q(W)$. Per l'eserc. 8, pag. 7 si ha $|V'| = |Q|^{\xi} = \aleph_0^{\xi} = (\xi + \aleph_0)^{\xi} = 2^{\xi}$ e analogamente $|W'| = 2^{\eta}$. Per l'eserc. 7, pag 6, 7 si ha $\dim_Q(V') = |V'| = 2^{\xi}$, $\dim_Q(W') = |W'| = 2^{\eta}$. Per l'ipotesi $V' \cong W'$, si ha $2^{\xi} = 2^{\eta}$, e noi vogliamo provare $\xi = \eta$.

Si vede quindi che l'implicazione (*) è <u>equivalente</u> (attesa l'arbitrarietà di ξ, η), alla implicazione descritta in (**).

Filtri e reti ("nets")

1. Nello studio dello spazio topologico $\mathbb{R}$ dei reali con la topologia usuale, il concetto di <u>successione</u> (applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$) e di <u>convergenza</u> di una successione si rivela spesso assai utile. Ciò che rende utili le successioni è il fatto che spesso è conveniente verificare la continuità di una applicazione definita in $\mathbb{R}$ mediante successioni, e varie altre cose, come il fatto che, dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, e un punto $p \in \bar{A}$, si può trovare una successione di punti di A che converge a p. In effetti, si vede facilmente che la topologia usuale di $\mathbb{R}$ è <u>completamente descritta dalle sue successioni convergenti</u>, cioè per individuare la topologia di $\mathbb{R}$ basta dire quali successioni convergono verso quali punti. Si pone quindi il problema di trovare un'analoga descrizione di uno spazio topologico qualsiasi (X, τ) in termini analoghi, di convergenza. ~~[illegible]~~

Si vede subito, anche con esempi semplici, che le successioni non sono sufficienti a descrivere tutti gli spazi topologici:

1) Sia S un insieme infinito non numerabile, e sia $s \in S$. Si ponga su S la topologia τ_s in cui una base di aperti è: la totalità dei $\{p\}$, con $p \in S$, $p \neq s$, e gli insiemi contenenti s il cui complementare è finito o numerabile. (in altre parole, tutti i punti di S sono isolati, ad eccezione di s, i cui intorni sono gli insiemi il cui complementare è finito o numerabile) Si può facilmente vedere che in (S, τ_s) una successione converge se e solo se è

definitivamente costante (i.e. costante da un certo indice in poi). In particolare, benchè s sia di accumulazione per $S \setminus \{s\}$, nessuna successione di $S \setminus \{s\}$ può convergere ad s. (Per esercizio, si provi anche che (S, τ_s) è T_4).

2) Quest'esempio è quello più classico. Sia $W^* = W(\omega_1 + 1)$ lo spazio degli ordinali $\leq \omega_1$ (ω_1 = primo ordinale non numerabile = ordinale iniziale di cardinale $\aleph_1$), munito della topologia dell'ordine (supposta qui nota; comunque sarà definita e studiata in un successivo esercizio). Allora ω_1 è di accumulazione per $W^* \setminus \{\omega_1\}$, ma una successione di $W^* \setminus \{\omega_1\}$ non converge ad ω_1

(Questi due esempi non sono essenzialmente diversi. Se $|S| = \aleph_1$, (S, τ_s) si può identificare con un sottospazio di W^*. Quale?)

Si possono dare esempi in cui si presentano fenomeni ancora più curiosi ([K], Problem 2E). Ma questi già sono sufficienti per comprendere la necessità di una teoria più generale.

La convergenza essendo un fenomeno locale, siamo portati a considerare le proprietà del sistema, $\mathcal{U}_p$, di tutti gli intorni di un punto p appartenente a uno spazio topologico X.

Esse sono

(i) se $U \in \mathcal{U}_p$, allora $p \in U$

(ii) se $U, V \in \mathcal{U}_p$, allora $U \cap V \in \mathcal{U}_p$

(iii) se $U \in \mathcal{U}_p$, $V \subseteq X$ e $V \supseteq U$, allora $V \in \mathcal{U}_p$

(iv) se $U \in \mathcal{U}_p$, allora esiste un aperto A tale che $p \in A \subseteq U$.

Di queste proprietà, ci interessano le prime 3 in modo particolare (la i) dice essenzialmente che nessun elemento di $\mathcal{U}_p$ è vuoto). Diamo la seguente definizione

<u>Definizione</u> 1.1 Un <u>filtro</u> $\mathcal{F}$ su un insieme non vuoto X è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(X)$ tale che: i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ ii) se $A, B \in \mathcal{F}$ allora $A \cap B \in \mathcal{F}$;

iii) Se $A \in \mathcal{F}$ e $B \supseteq A$, allora $B \in \mathcal{F}$.

Esempi di filtri sono: 1) $\{X\}$. Questo è il filtro banale.

2) Se X è un insieme infinito, l'insieme $\mathcal{O}_\infty(X)$ delle parti cofinite di X è un filtro su X, detto filtro dei cofiniti (un insieme è cofinito in X quando ha il complementare finito)

3) Sia $A \subseteq X$. L'insieme delle parti di X che contengono A è un filtro, detto filtro principale generato da A (i motivi della terminologia saranno più chiari in seguito).

Una famiglia $\mathcal{S}$ di sottoinsiemi di X è contenuta in qualche filtro $\mathcal{F}$ su X se e solo se $\mathcal{S}$ ha la proprietà della intersezione finita (f.i.p), cioè ogni sottofamiglia finita di $\mathcal{S}$ ha intersezione non vuota. Se ciò accade, esiste un <u>minimo</u> <u>filtro</u> $\mathcal{F}$ contenente $\mathcal{S}$, detto <u>filtro</u> <u>generato</u> <u>da</u> $\mathcal{S}$, che si può così descrivere: $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : A \supseteq S_1 \cap \ldots \cap S_n, \text{ con } S_i \in \mathcal{S},\ 1 \leq i \leq n\}$. Se $\mathcal{S}$ genera il filtro $\mathcal{F}$, $\mathcal{S}$ si dice anche una <u>prebase</u> per $\mathcal{S}$. Diamo ora il concetto di <u>base</u>.

Def. 1.2. <u>Sia</u> $\mathcal{F}$ <u>un</u> <u>filtro</u>, $\mathcal{B}$ <u>un</u> <u>sottoinsieme</u> <u>di</u> $\mathcal{F}$. <u>L'insieme</u> $\mathcal{B}$ <u>si dice una base per</u> $\mathcal{F}$ <u>se per ogni</u> $A \in \mathcal{F}$ <u>esiste</u> $B \in \mathcal{B}$, <u>con</u> $B \subseteq A$.

È immediato che, se $\mathcal{S}$ è una prebase per $\mathcal{F}$, il sistema $\mathcal{B}$ delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$ è una base per $\mathcal{F}$.

Si comprende ora il motivo dell'aggettivo "principale" dato al filtro dell'esempio 3, quì sopra. Quel filtro ha per base il singolo $\{A\}$, cioè è generato da un solo elemento. La terminologia è presa a prestito dalla teoria degli ideali, e ciò non è casuale, come si vedrà fra poco.

Tra filtri esiste una ovvia relazione di inclusione, quella indottavi dall'inclusione in $\mathcal{P}(X)$. Chiamiamo <u>ultrafiltro</u> un filtro massimale per tale relazione di inclusione. Il lemma di Zorn mostra subito che ogni filtro è contenuto in almeno un ultrafiltro. Vi sono ultrafiltri principali: essi sono precisamente quelli che hanno per generatori i singoli di X, in altre parole, il filtro $\mathcal{U}_p = \{A \subseteq X : p \in A\}$ è un ultrafiltro, per ogni $p \in X$. (la dim. è banale).

Vediamo ora di chiarire l'analogia tra filtri e ideali prima annunciata. Sia F_2 il corpo con due elementi, X un insieme. L'insieme F_2^X di tutte le applicazioni di X in F_2 ha una naturale struttura di anello $((f+g)(x) = f(x)+g(x),\ (fg)(x) = f(x)g(x))$ con unità (la costante 1) in cui ogni elemento è idempotente ($f^2 = f$, per ogni f). Cioè F_2^X è un' algebra di Boole (ricordiamo che un anello A si dice booleano quando ogni elemento di A è idempotente. Si vede subito che A è commutativo, ed ha caratteristica 2. Se A ha unità, A si dice algebra di Boole). L'algebra F_2^X è un'algebra "prototipo" per le algebre di Boole; ogni algebra di Boole si immerge in qualche F_2^X). Vediamo ora di stabilire una corrispondenza, che risulterà una biiezione, tra gli ideali propri di F_2^X e i filtri su X.

Per ogni $f \in F_2^X$, si ponga $Z(f) = f^{\leftarrow}[0] (= \{x \in X : f(x) = 0\})$; $Z(f)$ si chiama zero-insieme di f. È chiaro che l'applicazione $f \to Z(f)$ è una biiezione di F_2^X su $\mathcal{P}(X)$. Pertanto essa induce una biiezione $Z^*: \mathcal{P}(F_2^X) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, quella che associa ad ogni sottoinsieme A di F_2^X l'immagine $Z[A]$ $(\in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))$, mediante Z; Chiaramente Z^* è una biiezione e conserva le inclusioni; si tratta ora di far vedere che essa muta l'insieme degli ideali propri di F_2^X nell'insieme dei filtri su X.

Proposizione. (a) Se I è un ideale proprio di F_2^X, allora

$$Z[I] = \{A \subset X : A = Z(f) \text{ per qualche } f \in I\} \text{ è un filtro su } I.$$

(b) Se $\mathfrak{F}$ è un filtro su X, allora $Z^{\leftarrow}[\mathfrak{F}] =$

$= \{f \in F_2^X : Z(f) \in \mathfrak{F}\}$ è un ideale proprio di F_2^X.

Inoltre, se $I \subseteq J$, allora $Z[I] \subseteq Z[J]$; e $Z^{\leftarrow}[Z[I]] = I$ e $Z[Z^{\leftarrow}[\mathfrak{F}]] = \mathfrak{F}$, per ogni ideale I di F_2^X e per ogni filtro $\mathfrak{F}$ su X.

Dim. Le ultime asserzioni fatte sono conseguenza immediata del fatto che Z è biettiva. Si tratta di provare (a) e (b).

(a): $\emptyset \notin Z[I]$ poichè $1 \notin I$, essendo I proprio. Se poi $A = Z(f)$, $B = Z(g)$ con $f, g \in I$ si ha $A \cap B = Z(f+g+fg) \in Z[I]$; e se poi $C \subseteq X$, $C \supseteq A$, detta h una funzione di F_2^X tale che $Z(h) = C$ si ha $C = A \cup C = Z(f) \cup Z(h) = Z(fh) \in Z[I]$. Quindi $Z[I]$ è un filtro.

(b): $1 \notin Z^{\leftarrow}[\mathfrak{F}]$ poichè $\emptyset \notin \mathfrak{F}$. Siano $f, g \in Z^{\leftarrow}[\mathfrak{F}]$; si ha $Z(f+g) \supseteq Z(f) \cap Z(g) \in \mathfrak{F}$, cioè $Z(f+g) \in \mathfrak{F}$, i.e., $f+g \in Z^{\leftarrow}[\mathfrak{F}]$. Se poi $h \in F_2^X$, si ha $Z(fh) = Z(f) \cup Z(h) \supseteq Z(f) \in \mathfrak{F}$, che implica subito $fh \in Z^{\leftarrow}[\mathfrak{F}]$ //

Attesa la proposizione precedente, ultrafiltri su X corrispondono a ideali massimali, e viceversa. Vediamo ora come la proposizione ci sia di aiuto nel risolvere questioni sui filtri:

Teorema 1 Sia X un insieme, $\mathfrak{F}$ un filtro su X. Sono equivalenti le proposizioni:

1) $\mathfrak{F}$ è un ultrafiltro

2) $\forall A, B \subseteq X$, $A \cup B \in \mathfrak{F}$ implica $A \in \mathfrak{F}$ oppure $B \in \mathfrak{F}$

3) $\forall A \subseteq X$, $A \in \mathfrak{F}$ oppure $X \setminus A \in \mathfrak{F}$.

Dim. Tale teorema si può facilmente dimostrare per via diretta, e ciò viene lasciato come esercizio. Vediamo invece come esso si trasformi in una banale proposizione sulle algebre di Boole, mediante la corrispondenza Z:

Sia R un'algebra di Boole, I un ideale propio di R; sono equivalenti le proposizioni:

1') I è un ideale massimale di R

2') I è ideale primo in R

3') I è pseudoprimo in R (cioè $ab=0$, con $a, b \in R$, implica $a \in I$ oppure $b \in I$).

Dim. 1') $\Rightarrow$ 2') $\Rightarrow$ 3') è triviale. Proviamo che 3') $\Rightarrow$ 1').

Sia infatti $x \in R$; si ha $x(1-x)=0$, il che implica $x \in I$ oppure $1-x \in I$, cioè $R/_I \cong F_2 (= \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})$, e I è massimale //

Tornando indietro, con la Z, (e ricordando che $Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$) la proposizione sui filtri risulta provata.

Teorema 2. Ogni filtro $\mathcal{F}$ su X è intersezione degli ultrafiltri che lo contengono.

<u>Dim</u>. In altre parole, ogni ideale propio I di F_2^X è intersezione di ideali massimali, ciò che è lo stesso: nell'anello $F_2^X/_I$ l'intersezione degli ideali massimali è nulla.

Ciò è conseguenza del fatto generale: in un'algebra di Boole R, il radicale di Jacobson (intersezione degli ideali massimali) è nullo.

~~[illegible]~~ Infatti, l'unico nilpotente di R è 0 (tutti gli altri el. sono idempotenti.), e in un anello commutativo, l'intersezione degli ideali primi coincide con l'ideale dei nilpotenti. Ma qui i primi sono anche massimali //

In realtà, questa dualità tra filtri e ideali non ha grande importanza pratica: tutti i teoremi sui filtri fin qui detti si provano agevolmente anche per via diretta. Essa è stata molto più che altro perchè rappresenta un ordine di idee in cui lavoreremo spesso in seguito.

<u>Esercizio importante</u>. Sia K un corpo commutativo qualsiasi, K^X l'anello di tutte le applicazioni di X in K. L'applicazione $Z: K^X \to \mathcal{P}(X)$ ~~...~~ che associa ad ogni $f \in K^X$ il suo zero insieme $Z(f) = f^{\leftarrow}[0]$ <u>non</u> è più una biiezione. ~~Ma~~ <u>Tuttavia la Proposizione di pag 28 è ancora valida</u>, ~~...~~ <u>con K al posto di F_2</u>. Si usi poi il Teorema 1 per mostrare che <u>in K^X ogni ideale primo è massimale</u>. Si estenda questo ultimo risultato al caso di un prodotto diretto di corpi commutativi $\prod_{\lambda \in \Delta} K_\lambda$.

Diamo ora due altre nozioni che saranno utili in seguito:

Def. 1.3. Un filtro $\mathfrak{F}$ su X si dice *fisso* se $\bigcap \mathfrak{F} = \bigcap \{F : F \in \mathfrak{F}\} \neq \emptyset$. Altrimenti $\mathfrak{F}$ si dice *libero*.

Tutti i filtri principali sono fissi, ma non ogni filtro fisso è principale, a meno che X non sia finito (nel qual caso <u>ogni</u> filtro fisso è principale).

Esercizio – Si provi che X è finito se e solo se ogni ultrafiltro su X è principale (e perché? quindi fisso).

Nel seguito, gli ultrafiltri saranno di fondamentale importanza per noi. Pertanto insistiamo nel darne altre caratterizzazioni. Questa deriva dalla teoria della misura:

<u>Una misura discreta (o a due valori) finitamente additiva</u> su X è una applicazione $\mu : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$ ($\{0,1\}$ è qui considerato come sottoinsieme di $\mathbb{R}$) tale che $\mu(X) = 1$ e $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ ogniqualvolta $A \cap B = \emptyset$. Se poi μ è <u>numerabilmente additiva</u>, cioè se $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$ per ogni famiglia numerabile $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ di insiemi a due a due disgiunti ($A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$), allora μ si dice semplicemente una <u>misura discreta</u> su X, o più precisamente, una <u>misura</u>

a due valori su X.

Esercizio. Si verifichi che una misura (a 2 valori) finitamente additiva è monotona (cioè, $A \subseteq B$ implica $\mu(A) \leq \mu(B)$) e finitamente sub-additiva (cioè, $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$). Se μ è una misura, allora μ è numerabilmente sub-additiva ($\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$).
(ciò è vero in generale per ogni misura positiva);

Sia ora $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su X. Consideriamo la funzione caratteristica $\chi_{\mathcal{U}}$ di $\mathcal{U}$; cioè, $\chi_{\mathcal{U}}: \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$ è la funzione data da $\chi_{\mathcal{U}}(A) = 1$ se $A \in \mathcal{U}$, $\chi_{\mathcal{U}}(A) = 0$ altrimenti. Si vede subito che $\chi_{\mathcal{U}}$ è una misura finitamente additiva (si ricordi che $A \cup B \in \mathcal{U}$ se e solo se $A \in \mathcal{U}$ oppure $B \in \mathcal{U}$). Ogni misura a due valori finitam. additiva è di questo tipo.

Teorema 3. Sia $\mu: \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$ una misura finitamente additiva. Allora $\mu = \chi_{\mathcal{U}}$ per un unico ultrafiltro $\mathcal{U}$ su X. Inoltre, μ è una misura (numerabilmente additiva) se e solo se $\mathcal{U}$ ha la proprietà dell'intersezione numerabile. (c.i.p.)

Dim. Sia $\mathcal{U} = \{A \subseteq X : \mu(A) = 1\}$; $\mathcal{U} \neq \emptyset$, poichè $X \in \mathcal{U}$. Si tratta di provare che $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro. Anzitutto, $\emptyset \notin \mathcal{U}$, poichè, per l'additività, $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) \Rightarrow \mu(\emptyset) = 0$. Se poi $A, B \in \mathcal{U}$, si ha $\mu(X \setminus (A \cap B)) = \mu((X\setminus A) \cup (X \setminus B)) \leq \mu(X \setminus A) + \mu(X \setminus B)$ per la sub-additività prima dimostrata nell'Esercizio. Avendosi $1 = \mu(X) = \mu(X\setminus A) + \mu(A) = \mu(X \setminus A) + 1$, si ha $\mu(X \setminus A) = 0$ e analogamente, $\mu(X \setminus B) = 0$. Quindi $\mu(X \setminus (A \cap B)) = 0$, i.e., $\mu(A \cap B) = 1$ cioè $A \cap B \in \mathcal{U}$. Se poi $A \in \mathcal{U}$, $G \supseteq A$, la monotonia di μ (vedi esercizio), implica $\mu(G) = 1$, cioè $G \in \mathcal{U}$. Quindi $\mathcal{U}$ è un filtro.
Per ogni $A \subseteq X$ si ha poi $1 = \mu(X) = \mu(A) + \mu(X \setminus A)$, il che implica $\mu(A) = 1$ o $\mu(X \setminus A) = 1$, cioè $A \in \mathcal{U}$ oppure $X \setminus A \in \mathcal{U}$. Quindi $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro. L'unicità di $\mathcal{U}$ è ovvia.

Se ora μ è una misura (cioè è numerabilmente additiva) e $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è una famiglia di insiemi contenuta in $\mathcal{U}$ (dove $\mathcal{U}$ è quell'ultrafiltro per cui $\mu = \chi_{\mathcal{U}}$), si ha per ogni $i\in\mathbb{N}$, $\mu(X\setminus A_i)=0$ e quindi $0=\sum_{i\in\mathbb{N}}\mu(X\setminus A_i) \geq \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(X\setminus A_i)\right) = \mu\left(X\setminus\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}A_i\right)\right)=0$ (sub-additività), cioè $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}A_i\in\mathcal{U}$. Quindi non solo $\mathcal{U}$ ha la c.i.p., ma è addirittura chiuso per l'intersezione numerabile. Si vede poi subito che se un ultrafiltro $\mathcal{U}$ ha la c.i.p., allora è chiuso rispetto all'intersezione numerabile, e che allora $\chi_{\mathcal{U}}$ è in tal caso una misura//.

Per ogni ultrafiltro principale $\mathcal{U}_p$, $\mu_p = \chi_{\mathcal{U}_p}$ è ovviamente una misura (numerabilmente additiva), che si chiama anche misura fissa, o *massa concentrata* nel punto p. Chiamiamo una misura *fissa* o *libera* secondo che il corrispondente ultrafiltro (con c.i.p.!) $\mathcal{U}$ è fisso oppure libero.

Si pone ora il problema di vedere se su di un insieme X possono esistere misure μ a 2 valori *libere*, tali cioè che $\mu(\{p\})=0$ per ogni $p\in X$ o, ciò che è equivalente, se su di un insieme X esistano o meno *ultrafiltri liberi con la c.i.p.* È chiaro che in tali considerazioni la natura dell'insieme X non interessa: l'unica effettiva variabile è il *cardinale* di X.

Def. 1.3. *Un cardinale* ξ *si dice non-misurabile, o di misura nulla, se dato* X, *con* $|X| = \xi$, su X *non* esistono *misure* (numerabilmente additive!) *a due valori, libere*. *Altrimenti*, ξ *si dice misurabile*, *o di misura positiva*.

Non si sa ancora se cardinali misurabili esistano o meno. Tuttavia, grazie ad un teorema di Ulam, che fa poco vedremo, possiamo dimostrare che tali cardinali, se esistono, sono così immensamente grandi da non presentarsi mai in questioni che involvano oggetti matematici concreti (e.g., numeri reali, ecc.).

È ovvio anzitutto che $\aleph_0$ è non-misurabile, e così pure sono i cardinali finiti. La questione si presenta meno banale per cardinali più grandi ($\aleph_1$, $\mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}}$ ecc.) ed è stata risolta nel seguente modo:

(Tutte le misure di cui si parla si intende che sono con valori in $\{0,1\}$, anche se la ~~aggettivo~~ frase " a due valori," non viene aggiunta).

Se ξ è un cardinale, una misura si dice ξ-additiva ogni volta che $\mu(A_s) = 0$, per ogni $s \in S$, con $|S| = \xi$, implica $\mu(\bigcup_{s\in S} A_s) = 0$ (per $\xi = \aleph_0$, si verifichi che questo restituisce l'usuale definizione di numerabile additività).

Detto ciò:

Lemma. Una misura μ è ξ-additiva per ogni cardinale non-misurabile ξ.

Dim. Altrimenti, esiste una famiglia $(A_s)_{s\in S}$, con $|S| = \xi$ di insiemi tali che $\mu(A_s) = 0$, $\forall s \in S$, e $\mu(\bigcup_{s\in S} A_s) = 1$. Non è restrittivo supporre gli A_s a due a due disgiunti (perchè?) perchè se $\mu(A_{s_1}) = 0$ onde $\mu(A_{s_1} - A_{s_2} \cap A_{s_1}) = 0$. Si definisca $\nu : \mathcal{P}(S) \to \{0,1\}$ ponendo $\nu(E) = \mu(\bigcup_{s\in E} A_s)$ per ogni $E \subseteq S$. È chiaro che ν è una misura su S. Si ha poi $\nu(\{s\}) = \mu(A_s) = 0$, $\forall s \in S$. Quindi ν è libera, e $|S| = \xi$ è misurabile //.

Teorema 4. Un prodotto non-misurabile di cardinali non misurabili è non-misurabile. In altre parole, se $(\xi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ è una famiglia di cardinali non-misurabili, e $|\Lambda|$ è non misurabile, allora $\prod_{\lambda\in\Lambda} \xi_\lambda$ è non-misurabile.

Dim. Sia (X_λ) una famiglia di insiemi tali che $|X_\lambda| = \xi_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, e sia $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, e sia μ una misura su X. Proviamo che esiste $p \in X$ tale che $\mu(\{p\}) = 1$. (NB. Gli X_λ si suppongono ovviamente tutti non vuoti; altrimenti il Teorema è banale). Per ogni $\lambda \in \Lambda$, definiamo $\mu_\lambda : \mathcal{P}(X_\lambda) \to \{0,1\}$ ponendo $\mu_\lambda(A) = \mu(\pi_\lambda^{\leftarrow}[A])$ ($\pi_\lambda : X \to X_\lambda$ è la proiezione canonica). Si vede subito che μ_λ è una misura su X_λ. Pertanto esiste (ed è unico) $p_\lambda \in X_\lambda$ tale che $\mu_\lambda(\{p_\lambda\}) = 1$. Sia ora $p = (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in X$. Posto $B_\lambda = \pi_\lambda^{\leftarrow}[\{p_\lambda\}]$ si ha $\mu(B_\lambda) = 1$ (attesa la def. di μ_λ) e $\{p\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, cioè $X \setminus \{p\} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus B_\lambda)$. Poiché $\mu(X \setminus B_\lambda) = 0$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, e $|\Lambda|$ è non-misurabile, si ha $\mu(X \setminus \{p\}) = 0$, in base al lemma. Quindi $\mu(\{p\}) = 1$ //.

In particolare, ~~[illegible]~~ se ξ è non-misurabile, 2^ξ è non-misurabile. Da ciò la non-misurabilità di $c = 2^{\aleph_0}$, 2^c, 2^{2^c} ecc.

Teorema 5. Un cardinale minore di un cardinale non-misurabile è non-misurabile.

Dim. Sia X con $|X| = \xi$ non-misurabile, $Y \subseteq X$. Una misura ν su Y si estende ad una misura μ su X ponendo $\mu(A) = \nu(A \cap Y)$ per ogni $A \subseteq X$. Poiché X è non-mis., esiste $p \in X$ per cui $\mu(\{p\}) = 1$. Chiaramente $p \in Y$, e $\mu(\{p\}) = \nu(\{p\})$. //

Il teorema 4 e il teor. 5 assicurano la non misurabilità di cardinali quali $\aleph_1$, $\aleph_2$, ecc. e mostrano come, con le usuali operazioni di aritmetica dei cardinali (somma, prodotto, esponenziazione, formazione del successivo, ecc) non si possa uscire dalla classe dei cardinali non misurabili. Ciò per prima cosa mostra la difficoltà che si incontra nel provare l'esistenza eventuale di cardinali ~~[illegible]~~ misurabili (tutte le operazioni note per ottenere nuovi cardinali non fanno uscire dalla classe dei non-misurabili)

è in secondo luogo mostra che un cardinale misurabile, se esiste, deve essere veramente gigantesco (deve essere $\gneq$ exp c, exp(exp c), ecc. !). (Per maggiori chiarimenti sull'argomento, si veda [GJ], cap 12).
La questione della misurabilità dei cardinali si incontra abbastanza sovente in questioni algebriche concernenti prodotti infiniti, e la ritroveremo in seguito.

Esercizio – Sia X un insieme, $\mathcal{F}$ un ultrafiltro su X. Le seg. condizioni sono equivalenti:

i) $\mathcal{F}$ ha c.i.p.

ii) $\mathcal{F}$ è chiuso rispetto all'intersezione numerabile

iii) Se $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è una qualsiasi partizione numerabile di X, allora $A_i \in \mathcal{F}$ per un $i \in \mathbb{N}$

iv) Se $(A_s)_{s\in S}$ è una qualsiasi partizione di X, e $|S|$ è non-misurabile, allora $A_s \in \mathcal{F}$ per un $s \in S$.

v) $\mathcal{F}$ ha la proprietà dell'intersezione non-misurabile (i.e., ogni famiglia, ~~di~~ di cardinale non misurabile, di elem. di $\mathcal{F}$ ha interser. $\neq \emptyset$)

vi) $\mathcal{F}$ è chiuso rispetto all'intersezione non misurabile.

2. Ritorniamo ora a quello che era stato il proposito originario per l'introduzione dei filtri, cioè quello di dare una <u>teoria generale della convergenza</u>.

Def. 2.1 – <u>Sia</u> (X,τ) <u>uno spazio topologico</u> – <u>Un filtro $\mathcal{F}$ su X si dice che converge al punto</u> $p \in X$ <u>se</u> ~~[illegible]~~ $\mathcal{F}$ <u>contiene il filtro</u> ~~sistema~~ $\mathcal{V}_p$ <u>degli intorni di p in</u> (X,τ).

Per comprendere la ragione di questa definizione, si osservi che $\mathcal{F}$ converge a p se e solo se, per ogni $V \in \mathcal{V}_p$, esiste $F \in \mathcal{F}$ tale che $F \subseteq V$. Cioè, grossolanamente parlando, $\mathcal{F}$ contiene insiemi "arbitrariamente vicini" a p. Un'altra osservazione può essere d'aiuto per capire la definizione precedente: sia $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una

successione di punti di X, ~~convergente~~. Sia $\mathcal{G}^s$ il filtro generato dagli insiemi $A_n^s = \{ s_p : p \geq n \}$ $(n \in \mathbb{N})$. Si ha che $\mathcal{G}^s$ converge verso p se e solo se $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a p.
Se un filtro $\mathcal{F}$ converge a p, ogni filtro $\mathcal{G}$ contenente $\mathcal{F}$ converge pure a p. In particolare, ogni ultrafiltro contenente $\mathcal{F}$ converge a p. Questa proposizione si inverte, nel senso che

Prop 2.1. Un filtro $\mathcal{F}$ converge a p se e solo se ogni ultrafiltro contenente $\mathcal{F}$ converge a p.

Dim. La necessità è già stata vista. Se poi ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ contenente $\mathcal{F}$ converge a p, si ha $\mathcal{U} \geq \mathcal{V}_p$ per ogni tale ultrafiltro. Quindi $\mathcal{V}_p \subseteq \bigcap \{ \mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ ultraf.}, \mathcal{U} \geq \mathcal{F} \}$ e quest'ultimo è $\mathcal{F}$, per il Teorema 2, pag 29 //.

Questione. Se $\mathcal{F}$ converge a p, è necessariamente vero che $p \in F$ per ogni $F \in \mathcal{F}$?.
Se un filtro $\mathcal{F}$ converge verso p, si dice anche che p è limite di $\mathcal{F}$. Tale limite non è necessariamente unico (ad esempio, su di uno spazio indiscreto X, ogni filtro converge verso ogni punto). A questo proposito è facile provare:

Prop. 2.2. Uno spazio topologico X è di Hausdorff se e solo se ogni filtro $\mathcal{F}$ su X converge al più verso un unico punto.

Dim. Se X è di Hausdorff, ed $\mathcal{F}$ è un filtro che converge a p, allora $\mathcal{F} \geq \mathcal{V}_p$, e non può contenere $\mathcal{V}_q$, $q \neq p$, poiché esisterebbero $U \in \mathcal{V}_p$, $V \in \mathcal{V}_q$ con $U \cap V = \emptyset$, il che implicherebbe $\emptyset \in \mathcal{F}$.
Si supponga poi che p, q siano punti distinti di X e che per ogni $U \in \mathcal{V}_p$, $V \in \mathcal{V}_q$ risulti $U \cap V \neq \emptyset$. Ma allora $\mathcal{V}_p \cup \mathcal{V}_q$ è una sottofamiglia di $\mathcal{P}(X)$ che ha la proprietà dell'intersezione finita, e sarebbe quindi contenuta in un filtro $\mathcal{F}$, il quale convergerebbe sia a p che a q. //

Per una successione $s=(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ risulta utile il concetto di punto di aderenza (chiusura) definito come segue: p è di aderenza (chiusura) per s se e solo se la successione si trova frequentemente in ogni intorno di p, in altre parole, in ogni intorno U di p cadono valori di s_n per un numero infinito di indici n. (non è detto: $(s_n)_{n\geq n_0}$)
Tale concetto si estende ai filtri nel modo seguente:

Def 2.2. Sia $\mathfrak{F}$ un filtro su uno spazio topologico (X,τ). Un punto $p\in X$ si dice di chiusura (aderenza) per $\mathfrak{F}$ se $p\in\bigcap\{\overline{F} : F\in\mathfrak{F}\}$.
(Si verifichi che p è di chiusura per $s=(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se e solo se p è di aderenza per il filtro $\mathcal{G}^s$ descritto all'inizio di pag. 36).

~~Ra~~ Una successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di punti di $\mathbb{R}$, ha ~~ammette~~ $p\in\mathbb{R}$ come punto di chiusura se e solo se esiste una sua sottosuccessione convergente a p. Analogamente:

Proposizione 2.2. Un punto p è di chiusura per un filtro $\mathfrak{F}$ se e solo se esiste un filtro $\mathcal{G}$, contenente $\mathfrak{F}$, che converge a p.

Dim. Infatti p è aderente ad $\mathfrak{F}$ se e solo se ogni intorno U di p interseca ogni elemento di $\mathfrak{F}$. (I dettagli si lasciano come esercizio) //

Corollario. Se p è punto di chiusura per un ultrafiltro $\mathfrak{F}$, esso è limite per $\mathfrak{F}$. In quanto il $\mathcal{G}$ della Prop. 2.2 coincide con $\mathfrak{F}$, essendo ultraf.

Def. 2.3. Sia X un insieme, A un sottoinsieme di X, $\mathfrak{F}$ un filtro su X. Si dice che $\mathfrak{F}$ traccia su A se, per ogni $F\in\mathfrak{F}$, $F\cap A\neq\emptyset$. In tal caso, $\mathfrak{F}_A=\{F\cap A : F\in\mathfrak{F}\}$ è un filtro su A, detto traccia di $\mathfrak{F}$ su A.

Se X è uno spazio topologico, A un sottoinsieme di X, ricordiamo che la chiusura di A (che noi indicheremo con uno qualunque dei simboli $\overline{A}$, $cl(A)$, $cl_X(A)$, a seconda dei casi) è il minimo insieme chiuso contenente A.

Se $p \in X$, si ha $p \in cl_X(A)$ se e solo se il filtro $\mathcal{U}_p$ degli intorni di p in X traccia su A.
Ricordiamo anche che p si dice di accumulazione per A se ogni intorno di p interseca $A \setminus \{p\}$, in altre parole, $\mathcal{U}_p$ traccia su $A \setminus \{p\}$.

Def 2.4. Sia X uno spazio topologico, S un sottospazio di X, $\mathcal{F}$ un filtro su S, p un punto di X. Si dice che $\mathcal{F}$ converge a p in X se $\mathcal{F}$ contiene la traccia su S del sistema degli intorni di p in X.

Si osservi quindi che anzitutto $p \in cl_X(S)$ (se $\mathcal{U}_p$ non traccia su S, la sua "traccia" sarebbe l'intero $\mathcal{P}(S)$, che non è contenuto in alcun filtro)
Detto ciò, e in base ai precedenti richiami, si vede subito che

Proposizione 2.3 Sia X uno spazio topologico, S un sottoinsieme di X, p un punto di X. Allora

1) $p \in cl_X(S)$ se e solo se esiste un filtro su S che converge a p in X
2) p è di accumulazione per S se e solo se esiste un filtro su $S \setminus \{p\}$ che converge a p in X.

3. Reti. La convergenza in uno sp. topologico si può descrivere, oltre che con i filtri, anche con la nozione di rete, forse intuitivamente più chiara di quella di filtro; in certe situazioni, il concetto di rete ha dei vantaggi su quello di filtro; nel complesso però i filtri sono più agevoli da manipolare. Sul piano teorico, le due nozioni sono equivalenti, come si vedrà in seguito.

Def. 3.1. Un preordine su di un insieme D è una relazione binaria $\leq$ su D, riflessiva e transitiva. L'insieme preordinato $(D, \leq)$ si dice filtrante crescente se per ogni $\alpha, \beta \in D$ esiste $\gamma \in D$ tale che $\gamma \geq \alpha, \beta$.

Esempi di preordini filtranti:

(a) ogni ordine parziale è un preordine (esso gode in più della proprietà antisimmetrica)

(b) Se $\mathcal{F}$ è un filtro, si ordini $\mathcal{F}$ ponendo $A \leq B$ se $B \subseteq A$, per ogni $A, B \in \mathcal{F}$. Allora $(\mathcal{F}, \leq)$ è filtrante crescente

(c) L'esempio (b) è un caso particolare di questo: ogni reticolo è un insieme filtrante crescente.

(d) L'insieme delle parti finite di un insieme X, ordinato per inclusione, è filtrante crescente.

(e) Gli esempi precedenti erano tutti ordini parziali filtranti. Ecco un preordine che non è un ordine: Sia X un insieme. Si chiama ricoprimento (o copertura) di X ogni famiglia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che $X = \bigcup \mathcal{A} \; (= \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A)$. Se $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sono ricoprimenti di X, $\mathcal{B}$ si dice più fine di $\mathcal{A}$ (e si scrive $\mathcal{A} < \mathcal{B}$) se per ogni $B \in \mathcal{B}$ esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $B \subseteq A$. Sia $\mathcal{C}$ la totalità dei ~~questi~~ ricoprimenti di X. Allora $<$ su $\mathcal{C}$ è un preordine, che non è un ordine parziale. Si verifichi che il preordine è filtrante crescente. Esso ha un massimo: quale?

Def. 3.2 – Sia (X,τ) uno sp. topologico, $(D,\leq)$ un insieme munito di un preordine filtrante. Una rete in X è un'applicazione $s: D \to X$.

Se A è un sottoinsieme di X, si dice che la rete si trova definitivamente in A quando esiste $\alpha \in D$ tale che $s_\beta \in A$ per ogni $\beta \geq \alpha$. Si dice poi che s si trova frequentemente in A se per ogni $\alpha \in D$ esiste $\beta_\alpha \in D$, $\beta_\alpha \geq \alpha$, tale che $s_{\beta_\alpha} \in A$ (in altre parole, s si trova frequentemente in A se e solo se ~~...~~ $s^{\leftarrow}[A]$ è cofinale in D).

Def. 3.3. Sia X uno spazio topologico, $s: D \to X$ una rete in X, p un punto di X. Si dice che s converge a p in X se s si trova definitivamente in ogni intorno di p.

Def. 3.4. Sia X uno sp. topologico, $s: D \to X$ una rete in X, p un punto di X. Si dice che p è di chiusura (o di aderenza) per s se s si trova frequentemente in ogni intorno di p.

Sia X uno spazio topologico; sia $s: D \to X$ una rete in X. Poniamo $A^s_\alpha = \{ s_\beta : \beta \geq \alpha \}$ per ogni $\alpha \in D$. Si vede subito che $\mathcal{B}^s = \{ A^s_\alpha : \alpha \in D \}$ è una base di filtro (propio perchè D è filtrante crescente).
Sia $\mathcal{G}^s$ il filtro che ha $\mathcal{B}^s$ come base: $\mathcal{G}^s$ è detto filtro associato alla rete s

Teorema 3.1. La rete s converge a p in X se e solo se $\mathcal{G}^s$ converge a p in X; p è aderente a s se e solo se p è aderente a $\mathcal{G}^s$

Dim. Esercizio banale. //

Sia ora $\mathcal{F}$ un filtro su X, e sia D la totalità delle coppie ordinate (x, A) tali che $A \in \mathcal{F}$ e $x \in A$. Si dia a D un preordine, ponendo $(x, A) \leq (y, B)$ se e solo se $B \subseteq A$ (in generale, questo preordine non è un ordine parziale). È chiaro che il preordine è filtrante. Sia ora $s^{\mathcal{F}}: D \to X$ la rete definita ponendo $s^{\mathcal{F}}(x, A) = x$ per ogni $(x, A) \in D$. Tale rete è la rete associata al

· filtro $\mathcal{F}$

Teorema 3.2 – La rete $s^{\mathcal{F}}$ converge a p in X se e solo se $\mathcal{F}$ converge a p in X; p è aderente ad $\mathcal{F}$ se e solo se p è aderente a $s^{\mathcal{F}}$ in X.

Dim. Esercizio banale //.

Questi teoremi fanno comprendere come filtri e reti diano luogo a teorie equivalenti. Tutti i teoremi formulati prima per i filtri sono formulabili in termini di reti (Si può farlo per esercizio; si consiglia comunque una lettura di [K] o di [E] sull'argomento). Uno dei concetti dati per i filtri non è banalmente trasportabile in termini di reti: si era visto (Prop. 2.2, pag 37) che p è di chiusura per un filtro $\mathcal{F}$ se e solo se esiste un filtro $\mathcal{G}$, più fine di $\mathcal{F}$ (cioè, $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$) tale che $\mathcal{G}$ converge a p. In termini di rete, data una rete $s : D \to X$ avente p come punto di chiusura, che rete ci sarà che sia collegata in qualche modo a s, e converga a p? Un'analisi del modo in cui ad s si associa il suo filtro corrispondente, $\mathcal{G}^s$, porta al concetto di <u>sottorete</u> (che estende quello di sottosuccessione). Sia $s : D \to X$ una rete, sia $(E, \preccurlyeq)$ un insieme preordinato filtrante crescente, e sia $\nu : E \to D$ un'applicazione tale che, per ogni $\alpha \in D$, esiste $\delta_\alpha \in E$ tale che per ogni $\eta \in E$, $\eta \geq \delta_\alpha$, si abbia $\nu(\eta) \geq \alpha$. Allora $t = s \circ \nu$, che è un'applicazione di E in X, è una rete in X, che si dice <u>sottorete di</u> s.

Esercizio. Se t è una sottorete di s, e $\mathcal{G}^t$, $\mathcal{G}^s$ sono i filtri associati a t, s, rispettivamente, allora $\mathcal{G}^t \supseteq \mathcal{G}^s$.

È vero che, se $\mathcal{G}, \mathcal{F}$ sono filtri, e $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ allora $s^{\mathcal{G}}$ è sottorete di $s^{\mathcal{F}}$?

Esercizi. 1) Non ogni filtro $\mathcal{F}$ su un insieme X, avente la c.i.p., è contenuto in un ultrafiltro avente la c.i.p.

Infatti, sia X un insieme tale che $|X| \gneq \aleph_0$ e $|X|$ sia non-misurabile. Il filtro $\mathcal{N}$ dei co-numerabili di X, cioè $\mathcal{N} = \{N \subseteq X : |X \setminus N| \leq \aleph_0\}$ è un filtro libero avente la c.i.p. Pertanto ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ che lo contiene è libero, ed essendo $|X|$ non-misurabile, $\mathcal{U}$ non può avere la c.i.p..

2). Un ultrafiltro libero non ha mai una base numerabile.

Suggerimento: Sia $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base per un filtro libero $\mathcal{F}$ su X. Si provi che ~~[illegible]~~ per ogni n, $|B_n| \geq \aleph_0$. Induttivamente, si prendano per ciascun B_n due punti distinti $x_n, y_n \in B_n$, in modo da ottenere 2 insiemi disgiunti $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, ciascuno dei quali interseca ogni B_n.

3) Ogni filtro libero su X contiene il filtro dei cofiniti di X.

4). Sia $\mathcal{B}$ una base del filtro $\mathcal{F}$ sull'insieme X, sia Y un altro insieme, $f : X \to Y$ un'applicazione. La famiglia $f(\mathcal{B}) = \{f[B] : B \in \mathcal{B}\}$ è una base di filtro su Y, detto filtro immagine di $\mathcal{F}$ mediante f. Se $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro, $f(\mathcal{B})$ genera un ultrafiltro su Y. La famiglia $f(\mathcal{F}) = \{f[F] : F \in \mathcal{F}\}$ è essa stessa un filtro su Y se e solo se f è suriettiva. Se poi $\mathcal{G}$ è un filtro su Y, si ponga $f^{\#}(\mathcal{G}) = \{f^{\leftarrow}[G] : G \in \mathcal{G}\}$; $f^{\#}(\mathcal{G})$ è un filtro su X se e solo se $f^{\leftarrow}[G] \neq \emptyset$ per ogni $G \in \mathcal{G}$; tale filtro è detto allora immagine inversa di $\mathcal{G}$ tramite f. Se $X \subset Y$, e f è l'immersione canonica di X in Y, allora $f^{\#}(\mathcal{G})$, quando è un filtro, è proprio la traccia $\mathcal{G}_X$ di $\mathcal{G}$ su X.

Si provino tutte le affermazioni precedenti.

5) Si consideri lo spazio (S, τ_S) definito a pag 24, in fondo. Si provi che nessun filtro su $S \setminus \{s\}$, avente una base numerabile, converge ad s in S.

6) Sia $\mathbb{R}$ lo spazio dei reali con la topologia usuale. Quali sono i punti di chiusura del filtro dei co-numerabili (si veda es. 1, pag. prec.) di $\mathbb{R}$?

7) Si provi che un ultrafiltro $\mathcal{U}$ di $\mathbb{R}$ converge se e solo se contiene un insieme limitato (si intende, limitato per la metrica usuale di $\mathbb{R}$).

8). Se un filtro $\mathcal{F}$ sullo sp. topologico X converge a p, ed ha $q \in X$ come punto di chiusura, è vero che esso converge anche a q? Che cosa si può dire se X è in più sp. di Hausdorff? ~~se è spazio T_1~~ ?

9) (Improvvisato a lezione) Se $\mathcal{F}$ è un filtro su uno sp. X, ad $\mathcal{F}$ si possono associare reti nel modo seguente: si ordini $\mathcal{F}$ ponendo $A \leq B$ se $B \subseteq A$; per ogni $A \in \mathcal{F}$ si scelga un punto $s_A \in A$ e si consideri la rete $s : \mathcal{F} \to X$ definita ponendo $s(A) = s_A$ per ogni $A \in \mathcal{F}$. Se $\mathcal{F}$ converge a p in X, allora s converge a p in X; ma il viceversa può non essere vero: ad es. si prenda $X = \mathbb{R}$ con la topologia usuale, e sia $O_\infty(\mathbb{R})$ il filtro dei cofiniti su $\mathbb{R}$. Chiaramente esso non converge in $\mathbb{R}$ (per ogni $p \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{p\} \in O_\infty(\mathbb{R})$) ma si possono trovare reti "associate" ad $O_\infty(\mathbb{R})$ nel modo suddetto, che convergono verso ogni $p \in \mathbb{R}$. (Per $A \in O_\infty(\mathbb{R})$, si prenda $s_A \in A \cap [p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n}]$ se $|\mathbb{R} \setminus A| = n$ (se $n = 0$, cioè $A = \mathbb{R}$, s_A è arbitrario)). Inoltre, $\mathcal{F}$ può avere punti di chiusura, ed s non averne alcuno (riprendendo $\mathcal{F} = O_\infty(\mathbb{R})$, si prenda $s_A \in A \cap (\mathbb{R} \setminus [-n, n])$ quando $|\mathbb{R} \setminus A| = n$). Ciò spiega perchè (a parte l'arbitrarietà del

la scelta di $s_A \in A \in \mathcal{F}$) questo modo di associare reti a filtri <u>non</u> provi l'equivalenza delle 2 teorie.

10) <u>Importante, anche se facile</u>. Se X è uno sp. topologico che soddisfa al I° assioma della numerabilità (i.e. $\chi(p,X) \leq \aleph_0$ per ogni $p \in X$), la topologia di X è indotta da successioni convergenti, nel senso che, per ogni $A \subseteq X$, e ogni $p \in cl_X(A)$, esiste una successione $s : \mathbb{N} \to A$ che converge a p, e per ogni p di accumulaz. per A esiste $s : \mathbb{N} \to A \setminus \{p\}$ che converge a p in X. Inoltre, se p è di chiusura per la successione s di X, esiste una sottosuccessione t di s che converge a p in X. Tutto ciò è banale e si trova comunque su [K], p. 72-73.

In generale, si dice che la topologia di uno sp. X può essere indotta da <u>successioni convergenti</u> se per ogni $A \subseteq X$ e ogni $p \in cl_X(A)$, p è limite in X di ~~ogni~~ una successione di A. Oltre agli sp. G_I, vari altri spazi rientrano in questa classe.

11) (Difficile) Sia G un gruppo abeliano additivo, X un insieme. Una funzione $\mu : \mathcal{P}(X) \to G$, finitamente additiva, si dice una misura discreta su X con valori in G se per ogni famiglia $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ di sottoinsiemi di X, a due a due disgiunti, si ha $\mu(A_\lambda) \neq 0$ solo per un numero finito di $\lambda \in \Lambda$. Si provi che esistono $g_1, \ldots, g_n \in G$ e $\mu_1, \ldots, \mu_n$, misure a due valori su X, tali che

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(A)\, g_i, \quad \text{per ogni } A \in \mathcal{P}(X).$$

(Quest'esercizio è facoltativo; non fa parte del programma d'esame).

Sugg: Si consideri l'insieme $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ formato da quei sottoinsiemi di X ogni sottoinsieme dei quali ha misura nulla. Si provi che questo è un ideale di $\mathcal{P}(X)$, e che $\mathcal{P}(X)/\mathcal{N}$ è finita.

Spazi prodotto - Spazi completamente regolari

1- Siano (X, τ), (Y, υ) spazi topologici. Ricordiamo che un'applicazione $f: X \to Y$ si dice continua se per ogni aperto $B \in \upsilon$, $f^{\leftarrow}[B]$ è aperto in X ($\in \tau$). Ricordiamo anche che le proprietà delle applicazioni continue sono riassunte dal seguente comprensivo:

Teorema. Siano X, Y spazi topologici, e sia f un'applicazione di X in Y. Sono equivalenti le condizioni:

(a) f è continua

(b) L'immagine inversa di ogni chiuso di Y è chiusa in X.

(c) L'immagine inversa di ogni aperto di una prebase per gli aperti di Y è aperta in X.

(d) Per ogni $x \in X$, e ogni intorno V di $f(x)$ in Y, $f^{\leftarrow}[V]$ è un intorno di x in X.

(e) Per ogni $x \in X$, e ogni intorno V di $f(x)$ in Y, esiste un intorno U di x in Y tale che $f[U] \subseteq V$.

(f) Per ogni $x \in X$, e ogni filtro $\mathcal{F}$ su X che converge a x, $f(\mathcal{F}) = \{f[F] : F \in \mathcal{F}\}$ è base per un filtro su Y che converge a $f(x)$.

(g) Per ogni $x \in X$, e ogni rete $s: D \to X$ che converge a x, $f \circ s$ è una rete di Y che converge a $f(x)$.

(h) Per ogni $A \subseteq X$, l'immagine della chiusura è contenuta nella chiusura dell'immagine: cioè, $f[cl_X(A)] \subseteq cl_Y(f[A])$

(e) Per ogni sottoinsieme B di Y, la chiusura dell'immagine inversa è contenuta nell'immagine inversa della chiusura, cioè, $cl_X(f^{\leftarrow}[B]) \subseteq f^{\leftarrow}[cl_Y(B)]$.

Non dimostriamo questo teorema, che in buona parte è già noto, e rimandiamo per questo a [K], Cap. 3. §§ 86

Possiamo fare ora quest'osservazione. Se (X, τ_1) è sp. topologico, ed f è un'applicazione continua di (X, τ_1) in uno sp. topologico Y, tale f resta continua se a τ_1 si sostituisce un'altra topologia τ_2 <u>più fine di τ_1</u> (i.e. $\tau_2 \supset \tau_1$). In particolare, se su X poniamo la più fine topologia possibile, e cioè quella discreta δ, tutte le applicazioni di (X, δ) in qualsiasi spazio topologico (Y, υ) saranno continue. Sia ora X un insieme (senza struttura!), sia $(Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di spazi topologici, e $(f_\lambda : X \to Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di applicazioni di X in ciascun Y_λ. Vogliamo trovare una topologia su X che renda continue tutte le f_λ. Come già visto, quella discreta ci fa questo servizio, ma essa non è molto significativa, non è in alcun modo collegata alla famiglia $(f_\lambda, Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ di applicazioni e spazi dati. Per le considerazioni su svolte, siamo indotti a considerare la famiglia $\mathcal{T}_\Lambda$ di tutte le topologie su X che rendono continue le f_λ, e a vedere se fra queste ve n'è una <u>minima</u>. Intanto, $\mathcal{T}_\Lambda$ non è vuoto, e $\omega = \bigcap \mathcal{T}_\Lambda = \{\bigcap \{\tau : \tau \in \mathcal{T}_\Lambda\}$ è una topologia su X. Questa topologia ω contiene tutti gli insiemi del tipo $f_\lambda^{\leftarrow}[A_\lambda]$, con $\lambda \in \Lambda$, e A_λ aperto in Y_λ. Pertanto, se consideriamo la topologia ω' che ha questa famiglia di insiemi come prebase, $\omega \geq \omega'$. Ma per la definizione stessa di continuità, ogni f_λ è continua su (X, ω'). Pertanto $\omega' \in \mathcal{T}_\Lambda$, e quindi $\omega' \geq \omega$, i.e. $\omega = \omega'$. Quindi ω è la <u>minima topologia su X che rende continue tutte le</u> f_λ. Essa si chiama <u>topologia debole</u> (o <u>topologia iniziale</u>) della famiglia $(f_\lambda, Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Per quanto visto:

<u>Una base di aperti per la topologia debole della famiglia</u> $(f_\lambda, Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ <u>è data da</u> $\bigcap_{\lambda \in F} f_\lambda^{\leftarrow}[A_\lambda]$ <u>dove gli A_λ sono aperti in Y_λ, e F varia sui sottoinsiemi finiti di Λ</u>

La prima e più importante applicazione del concetto di topologia debole è questa:

Def. 1. 1. Sia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ una famiglia di spazi topologici. Si chiama spazio prodotto della famiglia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ l'insieme prodotto $\prod_{\lambda\in\Delta} X_\lambda$, munito della topologia debole delle proiezioni canoniche π_λ.

Data l'estrema importanza della nozione di prodotto topologico, esaminiamo qualche dettaglio su di esso.
Per quanto prima detto, una base per lo spazio prodotto $X = \prod_{\lambda\in\Delta} X_\lambda$ è data dagli insiemi della forma

$$(*) \quad \pi_{\lambda_1}^{\leftarrow}[A_{\lambda_1}] \cap \ldots \cap \pi_{\lambda_n}^{\leftarrow}[A_{\lambda_n}]$$

dove gli A_{λ_i} sono aperti in X_{λ_i}, e $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ è un arbitrario sottoinsieme finito di Λ. Insiemi quali $(*)$ si usano indicare anche con:

$$(**) \quad \prod_{\lambda\in\Delta} A_\lambda \qquad (\text{dove } A_\lambda = X_\lambda \text{ se } \lambda \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\},\ A_\lambda = A_{\lambda_i} \text{ se } \lambda = \lambda_i \},\ 1\le i \le n).$$

e in tal caso gli indici $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ si chiamano indici caratteristici dell'insieme $(**)$ (questa definizione serve più che altro a fornire un linguaggio più comodo in certe situazioni; non la si prenda troppo alla lettera).

Proposizione 1. 1. Se X ha la topologia debole di una famiglia $(f_\lambda, Y_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ e $g: Z \to X$ è un'applicazione di uno sp. topologico Z in X, allora g è continua se e solo se $f_\lambda \circ g$ è continua per ogni $\lambda \in \Lambda$.
In particolare, un'applicazione $g: Z \to \prod_{\lambda\in\Delta} X_\lambda$ è continua se e solo se $\pi_\lambda \circ g$ è continua per ogni $\lambda \in \Lambda$.

Dim. Una prebase per ~~X~~ gli aperti di X è data da

$f_\lambda^{\leftarrow}[A_\lambda]$, A_λ aperto in Y_λ, $\lambda \in \Lambda$; si ha poi $g^{\leftarrow}[f_\lambda^{\leftarrow}[A_\lambda]] = (f_\lambda \circ g)^{\leftarrow}[A_\lambda]$; quindi quest'ultimo insieme è aperto, poichè $f_\lambda \circ g$ è per ipotesi continua. Quindi g è continua (condiz. (c), pag 45). Il resto è triviale //

Proposizione 1.2 <u>Sia</u> $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ <u>una famiglia di spazi topologici. Le proiezioni</u> $\pi_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ <u>sono applicazioni aperte</u>.

<u>Dim</u>. Anzitutto, ricordiamo che un'applicazione $f : X \to Y$ di uno spazio topologico X in uno spazio topologico Y si dice <u>aperta</u> se per ogni aperto $A \subseteq X$, $f[A]$ è aperto in Y. Detto ciò, poichè l'"immagine diretta" conserva la riunione insiemistica, basta provare che $\pi_\lambda[A]$ è aperto in X_λ per ogni elemento di una base di aperti di $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. È facile vedere che si ha

$$\pi_\lambda\Big[\bigcap_{\mu \in F} \pi_\mu^{\leftarrow}[A_\mu]\Big] = X_\lambda \text{ se } \lambda \notin F \quad (F \text{ è un sottoinsieme finito di } \Lambda)$$

(gli A_μ sono supposti $\neq \emptyset$, $\forall \mu \in F$) $= A_\lambda$ se $\lambda \in F$

Quindi π_λ è aperta //

Se X ha la topologia iniziale di una famiglia $(f_\lambda, Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, le applicazioni f_λ <u>non</u> sono necessariamente aperte; tuttavia, per ogni aperto A di X, è $f_\lambda[A]$ aperto nella topologia relativa di $f_\lambda[X]$?

Ricordiamo poi che $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ contiene copie di ogni X_λ. Ciò si può vedere nel modo seguente: sia $p = (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ e sia X_λ^p il sottospazio di $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ costituito da tutti gli x tali che $\pi_\mu(x) = p_\mu$ per $\mu \neq \lambda$, $\pi_\lambda(x)$ arbitrario in X_λ. Sia $i_\lambda^p : X_\lambda \to \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ definita da $i_\lambda^p(x_\lambda) = (y_\mu)_{\mu \in \Lambda}$ dove $y_\mu = p_\mu$ per $\mu \neq \lambda$, e $y_\lambda = x_\lambda$; poichè $\pi_\mu \circ i_\lambda^p$ è costante (continua) se $\mu \neq \lambda$, ed è l'identità (continua) di X_λ se $\mu = \lambda$, i_λ^p è continua, ed è l'inversa di $\pi_\lambda | X_\lambda^p$. Quindi X_λ^p è omeomorfo a X^λ. Questo fatto, benchè semplicissimo, è di una certa importanza; infatti esso mostra che se un prodotto gode di una proprietà topologica ereditaria (cioè, tale che se X ha questa proprietà, i sottospazi pure l'hanno) allora i "fattori" godono della stessa proprietà (ad es. $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, T_0, T_1, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, oppure regolare, base numerabile, ecc. implica X_λ, T_0, T_1, ... ecc. per ogni $\lambda\in\Lambda$).

<u>Diciamo che una proprietà topologica è moltiplicativa se ~~per a~~ ogni famiglia di spazi</u> $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ <u>aventi tale proprietà</u>, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ <u>ha questa proprietà</u>.

<u>Proposizione 1.3.</u> <u>Il prodotto di spazi</u> T_0, T_1, T_2, T_3 è T_0, T_1, T_2, T_3. <u>Il prodotto di spazi regolari è regolare</u>.

Prima di passare alla dimostrazione, richiamiamo rapidamente le nozioni di spazio T_0, T_1, ecc..

Uno spazio topologico (X,τ) è detto: T_0 se dati $x, y \in X$ si ha o $y \notin cl_X(\{x\})$ oppure $x \notin cl_X(\{y\})$ (in altre parole, gli aperti di X separano i punti) - È detto T_1 se ogni punto è chiuso $\Leftrightarrow$ ogni punto è intersezione di aperti; T_2 = Hausdorff è notissimo; regolare se ogni punto $p\in X$ ha una base di intorni chiusi $\Leftrightarrow$ per ogni chiuso F di X e ogni $p\notin F$, p ed F hanno intorni disgiunti; T_3 = regolare e T_1.

<u>Dim</u>. Tali dimostrazioni si trovano in un qualsiasi testo di topologia generale. Limitiamoci a darne una come esempio, cioè proviamo che se gli X_λ sono T_0, allora il prodotto $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ è T_0. Siano $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $y = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ punti distinti di X. Allora $x_\mu \neq y_\mu$ per almeno un $\mu\in\Lambda$, e quindi o $y_\mu \notin cl_{X_\mu}(\{x_\mu\})$ o $x_\mu \notin cl_{X_\mu}(\{y_\mu\})$. Supponiamo che ad es. la prima sia soddisfatta. Si ha $y \notin \pi_\mu^{\leftarrow}[cl_{X_\mu}(\{x_\mu\})]$, che implica $y \notin cl_X(\{x\})$, essendo $\pi_\mu^{\leftarrow}[cl_X(\{x_\mu\})]$ chiuso in X //

Si sa che anche la completa regolarità e la proprietà $T_{3\frac{1}{2}}$ sono moltiplicative; tuttavia lo vedremo in seguito. Ricordiamo poi che la normalità e la proprietà T_4 (T_4 = normale e T_1) <u>non</u> sono moltiplicative, neanche (lo vedremo in seguito) se l'insieme degli indici su cui si fa il prodotto è finito. Però la normalità è ereditaria per i sottospazi <u>chiusi</u>, si può quindi dire che se un prodotto è T_4, allora gli spazi componenti sono T_4 (se gli X_λ sono T_1, gli X_λ^p sono <u>chiusi</u> in $\prod_{\lambda\in\Delta} X_\lambda$).

Gli invarianti cardinali di uno spazio (peso, carattere locale, ecc. definiti a pag 17, 18), in generale cambiano sui prodotti, almeno quando lo insieme degli indici su cui si fa il prodotto è abbastanza grande.

<u>Teorema</u> 1.1. <u>Siano</u> $(X_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ <u>sp. topologici soddisfacenti al primo assioma della numerabilità. Lo spazio</u> $X=\prod_{\lambda\in\Delta} X_\lambda$ <u>soddisfa al primo assioma della numerabilità se e solo se tutti gli spazi, tranne al più una infinità numerabile, sono indiscreti.</u>

<u>Dim.</u> (tratto da [K]) <u>Necessità</u>. Sia Φ la totalità dei $\lambda\in\Delta$ per cui X_λ contiene un aperto proprio e non vuoto A_λ. Sia $p=(p_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ un punto di X tale che $p_\lambda\in A_\lambda$ per ogni $\lambda\in\Phi$, e sia $\mathcal{B}_p$ una base numerabile per gli intorni di p in X. Per ogni $U\in\mathcal{B}_p$, esiste $\prod_{\lambda\in\Delta} W_\lambda^{(U)}$, dove i $W_\lambda^{(U)}$ sono aperti in X_λ, avente l'insieme finito F_U come insieme di indici caratteristici, contenuto in U. Sia $\Psi=\bigcup_{U\in\mathcal{B}_p} F_U$. Chiaramente, Ψ è numerabile. Se esistesse $\lambda\in\Phi\setminus\Psi$, allora $\pi_\lambda^{\leftarrow}[A_\lambda]$ ~~sarebbe~~ è un intorno di p, che deve ~~essere contenuto~~ contenere ~~in~~ qualche $U\in\mathcal{B}_p$. Ma ciò è impossibile, poichè $\pi_\lambda[U]=X_\lambda$ per ogni $\lambda\notin\Psi$. Quindi $\Phi\subseteq\Psi$, e Φ è numerabile.

<u>Sufficienza</u>. La totalità Φ dei $\lambda\in\Delta$ per cui X_λ è non discreto è al più numerabile. Sia $p=(p_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ un punto di X. Per ogni $\lambda\in\Phi$, sia $\{U_\lambda^{(n)}: n\in\mathbb{N}\}$ una base per gli intorni di p_λ in X_λ. Gli insiemi

$$\pi_{\lambda_1}^{\leftarrow}[U_{\lambda_1}^{(n_{\lambda_1})}]\cap\ldots\cap\pi_{\lambda_n}^{\leftarrow}[U_{\lambda_n}^{(n_{\lambda_n})}] \qquad \{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}\subseteq\Phi,\ n_{\lambda_i} \text{ naturali arbitrari}$$

sono una base di intorni, numerabile, per p in X //

Passiamo ora ad un teorema sulla cardinalità delle basi di un prodotto. Prima, ci serve un lemma che ha anche interesse intrinseco:

Lemma. Sia X uno sp. topologico, con $w(X) = \xi \geq \aleph_0$. Se $\mathcal{B}$ è una base per gli aperti di X, allora esiste $\mathcal{C}$, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$, tale che $|\mathcal{C}| = \xi$ e $\mathcal{C}$ è base per gli aperti di X

Dim. Sia $\mathcal{D}$ una base di aperti di X, con $|\mathcal{D}| = \xi$. Si consideri la totalità $\mathcal{K}$ delle coppie (U, V) di elementi di $\mathcal{D}$ per cui esiste un $A \in \mathcal{B}$ tale che $U \subseteq A \subseteq V$. Per ciascuna di tali coppie, si scelga $A_{U,V} \in \mathcal{B}$ tale che $U \subseteq A_{U,V} \subseteq V$, e sia $\mathcal{C} = \{A_{U,V} : (U,V) \in \mathcal{K}\}$. È chiaro che $|\mathcal{C}| \leq \xi^2 = \xi$. Dimostriamo ora che $\mathcal{C}$ è base di aperti per X: Sia $p \in X$, sia W un aperto contenente p; si supponga $V \in \mathcal{D}$. Esiste $A \in \mathcal{B}$ tale che $p \in A \subseteq V$, ed esiste $U \in \mathcal{D}$ tale che $p \in U \subseteq A$. Ma allora esiste $A_{U,V} \in \mathcal{C}$ tale che $U \subseteq A_{U,V} \subseteq V$. Pertanto $\mathcal{C}$ è base, e quindi $|\mathcal{C}| = \xi$ //

Teorema - Sia $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di spazi topologici, e sia $w(X_\lambda) = \xi \geq 2$, $\forall \lambda \in \Lambda$. Se uno almeno fra i cardinali ξ, $|\Lambda|$ è infinito, si ha $w(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = \max\{\xi, |\Lambda|\}$.

Dim. Sia $\mathcal{B}_\lambda$ base di aperti per X_λ, con $|\mathcal{B}_\lambda| = \xi$, per ogni $\lambda \in \Lambda$. Gli insiemi $\pi_\lambda^{\leftarrow}[B_\lambda]$, con $B_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ sono prebase di aperti per $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, e chiaramente la cardinalità di questa prebase è $\leq |\Lambda|\, \xi = \max\{|\Lambda|, \xi\}$ $\xi = \max\{\xi_i\}$. Le intersezioni finite di elementi di questa prebase sono una base $\mathcal{B}$ per X; quindi $w(X) \leq \max\{\xi, |\Lambda|\}$. Sia $w(X) = \eta$. Allora $\mathcal{B}$ contiene una sottofamiglia $\mathcal{C}$, con $|\mathcal{C}| = \eta$, che è base per X (lemma prec.) Per ogni $\lambda \in \Lambda$, la famiglia $\mathcal{C}_\lambda = \{\pi_\lambda[G] : G \in \mathcal{C}\}$ è base di aperti in X_λ (perché?), quindi $\eta \geq \xi$. Possiamo chiaramente escludere

quindi che Λ sia finito (in tal caso, si sarebbe già visto che $w(X) = \eta = \xi$).
La base $\mathcal{C}$ è formata da insiemi della forma $\bigcap_{\lambda\in F} \pi_\lambda^{\leftarrow}[B_\lambda]$, dove F è sottoinsieme finito di Λ, e i B_λ sono certi elem. di $\mathcal{B}_\lambda$. Sia Φ la riunione di tutti gli insiemi degli indici caratteristici degli elementi di $\mathcal{C}$ (Φ è la riunione degli F sopra descritti). Si ha $|\Phi| \leq \aleph_0 |\mathcal{C}| = \eta$. Se fosse $\eta \lneq |\Lambda|$, vi sarebbe un elemento $\bar\lambda$ in $\Lambda \setminus \Phi$. Per tale $\bar\lambda$ si avrebbe $\pi_{\bar\lambda}[G] = X_{\bar\lambda}$ per ogni $G \in \mathcal{C}$, contrariamente al fatto che $\{\pi_{\bar\lambda}[G] : G \in \mathcal{C}\}$ è base di aperti in $X_{\bar\lambda}$, e che $w(X_{\bar\lambda}) = \xi \geq 2$. Quindi $\eta \geq |\Lambda|$; cioè $\eta \geq$ $\geq \max\{\xi, |\Lambda|\}$, che implica $\eta = \max\{\xi, |\Lambda|\}$ //

Particolarmente importante è il seguente

Corollario. <u>Un prodotto di spazi a base numerabile infinita ha base numerabile se e solo se l'insieme su cui si fa il prodotto è al più numerabile</u>.

Facciamo ora alcune convenzioni: Se E è uno spazio topologico, e ξ un cardinale, E^ξ indica il prodotto di ξ copie di E, cioè $E^\xi = E^\Lambda$ dove $|\Lambda| = \xi$. Se $\mathbb{I}$ è il sottospazio $[0,1]$ di $\mathbb{R}$ (con la topologia usuale), e ξ è un cardinale infinito, allora $\mathbb{I}^\xi$ ha peso ξ (per il teorema precedente) e si chiama <u>cubo di Tychonoff</u> di peso ξ. Se $\mathbb{D} = \{0,1\}$ con la topologia discreta, $\mathbb{D}^\xi$ ha peso ξ (se $\xi \geq \aleph_0$) e si chiama <u>cubo di Cantor di peso</u> ξ. Il cubo $\mathbb{I}^{\aleph_0}$ si chiama <u>cubo di Hilbert</u>. Questi spazi saranno spazi "prototipo" in cui immergeremo vaste classi di spazi.

Definiamo ora il <u>carattere di densità</u>, o semplicemente <u>densità</u> $\delta(X)$, di uno spazio topologico X nel modo seguente:

$$\delta(X) = \min\{|S| : S \subseteq X, \text{ e } cl_X(S) = X\}$$

cioè $\delta(X)$ è il minimo fra i cardinali dei sottoinsiemi <u>densi</u> di X.

Al solito, il caso più importante è quello in cui $\delta(X) \leq \aleph_0$, nel qual caso X si dice separabile. Vedremo fra poco come la separabilità si comporta nel prodotto. Premettiamo un semplice

Esercizio. Se X è prodotto degli spazi $(X_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$, e $A_\lambda \subseteq X_\lambda$ $\forall \lambda\in\Delta$, allora $cl_X(\prod_{\lambda\in\Delta} A_\lambda) = \prod_{\lambda\in\Delta} cl_{X_\lambda}(A_\lambda)$ –

<u>Teorema</u>. <u>La separabilità è una proprietà</u> c-<u>moltiplicativa</u>. <u>Cioè, se</u> $(X_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ <u>è una famiglia di spazi separabili, e</u> $|\Delta| \leq c \; (= 2^{\aleph_0})$ <u>allora</u> $X = \prod_{\lambda\in\Delta} X_\lambda$ <u>è separabile</u>.

<u>Dim</u>. Come insieme di indici Δ, prendiamo i reali $\mathbb{R}$ (aggiungendo eventualmente ~~[illegible]~~ alla famiglia spazi formati da singoli punti, se $|\Delta| \lneqq c$). Per ogni X_λ ($\lambda\in\mathbb{R}$), si scelga D_λ numerabile e denso in X_λ, e una suriezione $\varphi_\lambda : \mathbb{N} \to D_\lambda$. Si ha quindi una suriezione $\varphi : \mathbb{N}^{\mathbb{R}} \to \prod_{\lambda\in\mathbb{R}} D_\lambda \,(\subseteq X)$ definita ponendo $\varphi((n_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}) = (\varphi_\lambda(n_\lambda))_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Inoltre, φ è continua come applicazione di $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ (con la topologia prodotto delle discrete su $\mathbb{N}$) in X. Il teorema sarà dimostrato se si prova che $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ è separabile: se infatti D è denso in $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ si ha, essendo φ continua, $\varphi[cl_{\mathbb{N}^{\mathbb{R}}}(D)] \subseteq cl_X(\varphi[D])$ p. 45, cioè $\varphi[\mathbb{N}^{\mathbb{R}}] = \prod_{\lambda\in\mathbb{R}} D_\lambda \subseteq cl_X(\varphi[D])$. Per l'Esercizio precedente, $\prod_{\lambda\in\mathbb{R}} D_\lambda$ è denso in X, e quindi $\varphi[D]$ è denso in X. Dimostrare che $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ è separabile è facile: basta prendere per D le combinazioni lineari (finite) a coefficienti in $\mathbb{N}$ delle funzioni caratteristiche degli intervalli di $\mathbb{R}$ i cui estremi sono razionali.//

Esercizio. Il teorema precedente è il migliore possibile, almeno nei casi interessanti. Si dimostri che il prodotto di una famiglia di spazi di Hausdorff $(X_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ è certamente non-separabile, se $|X_\lambda| \geq 2$ per ogni $\lambda\in\Delta$, e $|\Delta| \gneqq c$. (Sugg: Se supponga che ~~esistesse~~ $D = \{x^{(n)} : n\in\mathbb{N}\}$ sia denso nel prodotto X. Si scelgano per ogni $\lambda\in\Delta$ aperti disgiunti $G^{(0)}_\lambda$, $G^{(1)}_\lambda$,

.. e si costruisca un'applicazione $\psi: \Delta \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ nel seguente modo:
$\psi(\lambda) = \psi_\lambda$ è l'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\{0,1\}$ definita ponendo
$\psi_\lambda(n) = 0$ se $x_\lambda^{(n)} \notin G_\lambda^{(0)}$, $\psi_\lambda(n) = 1$ nel caso contrario. Si provi che
ψ è iniettiva. (?) (Questa è la traccia della dimostrazione originale di Marczewski. Credo ce ne sia una più semplice, ma non l'ho trovata. Se si sapesse che $2^{c^+} \gneq 2^c$, l'esercizio sarebbe banale }, grazie agli l'esercizio 10), pag 7).

<u>Altro esercizio.</u> <u>Sia</u> X <u>un insieme infinito</u>, $|X| = \xi$. <u>Si provi</u> <u>che</u> $\delta(\mathbb{D}^{\exp \xi}) \leq \xi$.

T. di pag 51

<u>Svolgimento</u> $\mathbb{D}^\xi$ ha una base di ξ elementi. Sia essa $\mathcal{B}$. Si pensi $\mathbb{D}$ come corpo con 2 elementi, e si prendano le combinazioni lineari (finite) a coefficienti in $\mathbb{D}$ delle funzioni caratteristiche degli insiemi $B \in \mathcal{B}$. Sia Δ questo insieme. Gli elementi di Δ sono funzioni di $\mathbb{D}^\xi$ in $\mathbb{D}$, cioè $\Delta \subseteq \mathbb{D}^{\mathbb{D}^\xi}$. Chiaramente $|\Delta| = \xi$, poichè $|\mathcal{B}| = \xi$. Per far vedere che Δ è denso in $\mathbb{D}^{\mathbb{D}^\xi}$, basta far vedere che, presi $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{D}^\xi$, e $j_{x_i} \in \{0,1\}$ per $i = 1, \ldots, n$, esiste $\varphi \in \Delta$ tale che $\varphi(x_i) = j_{x_i}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. E questo è ovvio: per ogni i, si prenda $B_i \in \mathcal{B}$ tale che B_i è intorno di x_i, e i B_i sono a due a due disgiunti. Posto $\varphi = \sum_{i=1}^n j_{x_i} \chi_{B_i}$ (χ_{B_i} = funz. caratteristica di B_i), $\varphi \in \Delta$, e φ soddisfa alle condizioni richieste //. (NB usando un argom. simile a quello dell'eserc. prec. si può far vedere che anche $\delta(\mathbb{D}^{\exp \xi}) \geq \xi$.)

<u>Corollario 1</u> <u>Se</u> X <u>è un insieme infinito, su esso esistono</u> $2^{2^{|X|}}$ <u>ultra filtri distinti.</u>

Dim. Sia $|X| = \xi$. Pensiamo X come sottoinsieme denso in

$T = \mathbb{D}^{\exp \xi}$. Sia $\mathcal{A}$ la totalità degli ultrafiltri di X. Vogliamo mostrare che esiste una suriezione di $\mathcal{A}$ su T. Osserviamo che T

T è compatto (conseguenza del teorema di Tychonoff, che vedremo in seguito) e T_2. Per ogni $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$, la famiglia $\{cl_T(F) : F \in \mathcal{U}\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita, quindi ha intersezione non vuota. Cioè $\mathcal{U}$ ha un punto di aderenza p in T, e quindi ci converge; poiché T è di Hausdorff, p è unico (veramente questi teoremi sarebbero stati visti solo per ultrafiltri su T, ma è facile estenderli a ultrafiltri su sottospazi). Poniamo $\sigma(\mathcal{U}) = p$.
$\sigma : \mathcal{U} \to T$ è suriettiva: infatti, X è denso in T, quindi per ogni $p \in T$ esiste un ~~ultra~~filtro $\mathcal{F}$ su X che converge a p, e quindi anche un ultrafiltro su X che contiene $\mathcal{F}$ converge a p.
Si ha quindi $|\mathcal{A}| \geq \exp(\exp \xi)$. Poiché $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, $|\mathcal{A}| \leq \exp(\exp \xi)$ e l'asserzione è provata //.

Corollario 2. Se X è infinito, vi sono su X $\exp(\exp(|X|))$ ultrafiltri <u>liberi</u>. L'algebra Booleana F_2^X ha $\exp(\exp|X|)$ ideali massimali, e così pure K^X, dove K è un arbitrario corpo commutativo.

Esercizio (banale) $O_\infty(X)$ <u>non è mai un ultrafiltro</u>
(si può vedere in vari modi; a questo punto, basta osservare che $O_\infty(X)$ è intersezione degli ultrafiltri liberi, e che questi sono più di uno solo!)

2 - Immersione nei prodotti.

Si pone ora il problema di rappresentare spazi topologici "astratti", godenti di certe proprietà, mediante spazi topologici "concreti", cioè costruiti a partire da spazi che in qualche modo sono supposti **noti** (ad es. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{I}$ con le top. usuali, $\mathbb{D}$, ecc.). Il problema è analogo a quello che si incontra in altri rami della matematica (ad es. ogni sp. vettoriale "astratto" V su un corpo K è isomorfo a qualche spazio "concreto" $K^{(\dim_K V)}$; ogni gruppo è gruppo di permutazioni, ecc.).

In topologia generale, ci si pone il problema di immergere sp. topologici in prodotti di altri spazi dati. Facciamo subito qualche considerazione. Sia X uno sp. topologico, e sia $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di spazi topologici. Un'applicazione $e: X \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ è un'immersione topologica se e è un omeomorfismo di X sulla sua immagine $e[X]$; ciò accade se e solo se 1) e è iniettiva e 2) e è continua e aperta sulla sua immagine, cioè per ogni A aperto in X, $e[A]$ è un aperto nella topologia indotta su $e[X]$ dalla topologia di $\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$. Componendo e con le pr. canoniche $\pi_\lambda: \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \to Y_\lambda$, si hanno applicazioni $f_\lambda = \pi_\lambda \circ e$, continue, da X in Y_λ. Si consideri la famiglia $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = \Phi$. Essa gode delle seguenti proprietà:

1) Φ separa i punti di X: cioè, dati comunque $x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists\, f_\lambda \in \Phi$ tale che $f_\lambda(x) \neq f_\lambda(y)$ (si ricordi che e è iniettiva).

2) Si consideri ora la famiglia Φ' di applicazioni così costruite: per ogni sottoinsieme finito $F \subseteq \Lambda$, e_F è l'applicazione $e_F: X \to \prod_{\lambda\in F} Y_\lambda$ definita da $e_F(x) = (f_\lambda(x))_{\lambda\in F}$, $\Phi' =$ $= \{e_F : F \text{ sottoinsieme finito di } \Lambda\}$. La famiglia Φ' separa

punti e chiusi di X, cioè: per ogni chiuso $B \subseteq X$, e ogni $x \in X \setminus B$, esiste $e_F \in \Phi'$ tale che $e_F(x) \notin cl_{\prod_{\lambda \in F} Y_\lambda}(e_F[B])$. (Si ricordi che e è aperta sulla sua imm. $e[X]$).

Ci si può chiedere se questi fatti si invertono: cioè, dato uno spazio X e una famiglia $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ di funzioni continue, $f_\lambda : X \to Y_\lambda$, è vero che X si immerge in $\prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$, mediante la applicazione di valutazione e della famiglia $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ (cioè e è l'applicazione di X in $\prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ definita da $e(x) = (f_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda}$); e è detta anche applicazione diagonale, o applicazione parametrica, della famiglia $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$)? La risposta è affermativa, ed è fornita dal seguente teorema, che collega questa questione alle topologie deboli, a cui tale questione è ovviamente ~~collegata~~ connessa.

Teorema 2.1. Siano X, $(Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sp. topologici, e sia $\Phi = \{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una famiglia di funzioni continue $f_\lambda : X \to Y_\lambda$.

Si considerino le seguenti proposizioni:

i) X ha la topologia debole w_Φ della famiglia Φ.

ii) X ha la topologia debole w_e dell'applicazione di valutazione e della famiglia Φ $(e(x) = (f_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda})$.

iii) La famiglia $\Phi' = \{ e_F : F \subseteq \Phi, |F| \lneq \aleph_0 \}$ separa punti e chiusi di X. $(e_F(x) = (f_\lambda(x))_{\lambda \in F}$, $e_F : X \to \prod_{\lambda \in F} Y_\lambda)$

iv) e è aperta come applicazione di X in $e[X]$.

Si ha che i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv). Se Φ separa i punti, allora iv) $\Rightarrow$ ii) e le quattro proposizioni sono equivalenti. Se X è T_0 e iii) vale, allora Φ separa i punti (e le 4 prop. sono equivalenti).

Dim. L'equivalenza di i) e ii) è immediata: una prebase per gli aperti di $w(\Phi)$ sono gli insiemi $f_\lambda^{\leftarrow}[U_\lambda]$, U_λ aperto in Y_λ, $\lambda \in \Lambda$; una prebase per gli aperti di w_e sono gli $e^{\leftarrow}[\pi_\lambda^{\leftarrow}[U_\lambda]] = f_\lambda^{\leftarrow}[U_\lambda]$, U_λ aperto in Y_λ, $\lambda \in \Lambda$.

Nella restante parte della dimostrazione, B è un chiuso di X, $A = X \setminus B$, e $x \in X \setminus B = A$. Dim. che i) $\Rightarrow$ iii): esistono infatti un sottoinsieme finito F di Λ e aperti $U_\lambda \subseteq Y_\lambda$, per ogni $\lambda \in F$, tali che $x \in \bigcap_{\lambda \in F} f_\lambda^{\leftarrow}[U_\lambda] = e_F^{\leftarrow}[\prod_{\lambda\in F} U_\lambda] \subseteq X \setminus B$. Quindi $e_F(x) \in \prod_{\lambda \in F} U_\lambda$, cioè $e_F(x) \notin \prod_{\lambda\in F} Y_\lambda \setminus (\prod_{\lambda \in F} U_\lambda) \supseteq e_F[B]$, che implica $e_F(x) \notin cl_{\prod_{\lambda\in F} Y_\lambda}(e_F[B])$.

iii) $\Rightarrow$ iv) Sia F un sottoinsieme finito di Λ tale che $e_F(x) \notin cl_{\prod_{\lambda \in F} Y_\lambda}(e_F[B])$, e si ponga $U = \prod_{\lambda\in F} Y_\lambda \setminus cl_{\prod Y_\lambda}(e_F[B])$, $V = \{(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda : (p_\lambda)_{\lambda \in F} \in U\}$ $V = \pi_F^{-1}[U]$. Allora V è aperto in $\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$; si ha poi che $e(x) \in V$ (poichè $e_F(x) \in U$). Proviamo ora che $V \cap e[X] \subseteq e[A]$; infatti, se $e(y) \in V$, con $y \in X$, allora $(\pi_\lambda \circ e(y))_{\lambda\in F} = e_F(y) \in U$, da cui $e_F(y) \notin e_F[B]$, ~~cioè~~, $y \in X \setminus B = A$. *

Se Φ separa i punti, e iv) vale, allora e è iniettiva e aperta sull'immagine, cioè, è un omeomorfismo di X su $e[X]$, il che implica ovviamente che X ha la w_e topologia. Cioè, (iv) + (Φ separa i punti) $\Rightarrow$ ii) e i) $\div$ iv) sono in tal caso equivalenti. Se poi X è T_0, dati $x, y \in X$, $x \neq y$, si ha o $x \notin cl_X(\{y\})$ o $y \notin cl_X(\{x\})$. Se poi iii) è vera, e, ad esempio, $x \notin cl_X(\{y\})$, $e_F(x) \notin cl_{\prod_{\lambda\in F} Y_\lambda}(e_F[cl_X(\{y\})])$, cioè $e_F(x) \neq e_F(y)$, che implica $f_\lambda(x) \neq f_\lambda(y)$ per qualche $\lambda \in F$ //

Le precedenti condizioni sono necessarie e sufficienti per l'immersione di X in un prodotto di sp. topologici. Mentre la parte "necessaria" del teorema di immersione ha più che altro importanza teorica, la parte "sufficiente" ha grandissimo interesse applicativo. Pertanto la rienunciamo esplicitamente, rinforzando la condizione sufficiente (richiediamo cioè che non le e_F, ma addirittura le f_λ separino punti e chiusi)

Corollario 1 (lo "Embedding lemma" di [K], pag. 116). Siano $X, (Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ spazi topologici, e sia $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di applicazioni continue, $f_\lambda : X \to Y_\lambda$, e $\underline{\underline{e}}$ l'applicazione di valutazione di questa famiglia. Se $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ separa i punti, e separa punti e chiusi di X, allora $\underline{\underline{e}}$ è un'immersione di X in $\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$

Fra i prodotti, particolarmente notevoli sono quelli in cui tutti gli spazi sono uguali, cioè le potenze topologiche Y^ξ (ξ cardinale) di uno sp. Y. Quando uno sp. X può essere immerso in una opportuna potenza di uno sp. Y? Il teorema di immersione ci dà la risposta. Denotiamo con $C(X;Y)$ l'insieme delle funzioni continue di X in Y.

Corollario 2 – Siano X e Y sp. topologici. Lo spazio X si può immergere in una potenza Y^ξ dello sp. Y se e solo se 1) $C(X;Y)$ separa i punti di X 2) La famiglia $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C(X;Y^n)$ separa punti e chiusi di X. (Se X è T_0, la 1) è contenuta nella 2)).

Sia ora $\mathbb{F}$ lo sp. costituito dai punti $\{0,1\}$ con la seguente topologia $\{\{0\},\{0,1\},\emptyset\}$ (cioè, 0 è isolato in $\mathbb{F}$, 1 no; $\mathbb{F}$ è sottosp. di $\mathbb{R}$ con la topologia delle semirette aperte superiormente limitate, quindi $\mathbb{F}$ è T_0). Se ξ è un cardinale, $\mathbb{F}^\xi$ si chiama cubo di Alexandroff di peso ξ.

Proposizione. Ogni spazio T_0, X, tale che $w(X) = \xi \geq \aleph_0$ si immerge in un cubo di Alexandroff di peso ξ.

Dim. Sia $\mathcal{B}$ una base di aperti per X, con $|\mathcal{B}| = \xi$; per ogni $B \in \mathcal{B}$ sia $\varphi_B : X \to \mathbb{F}$ definita ponendo $\varphi_B(x) = 0$ se $x \in B$, $\varphi_B(x) = 1$ altrimenti. Chiaramente, φ_B è continua.

Inoltre, la famiglia $(\varphi_B)_{B\in\mathcal{B}}$ separa punti e chiusi di X (se F è chiuso in X, e $x\in X\setminus F$, si ha, preso $B\in\mathcal{B}$ tale che $x\in B\subseteq X\setminus F$, $\varphi_B(x)=0$, $\varphi_B[F]=\{1\}$ e $0\notin cl_{\mathbb{F}}(\{1\})=\{1\}$.). Pertanto X si immerge in $\mathbb{F}^{\mathcal{B}}(\cong\mathbb{F}^{\xi})$ mediante l'applicazione diagonale delle φ_B. //

A titolo di esercizio, vediamo che invece non esiste uno spazio Y che sia T_1 e tale che ogni spazio T_1 si immerga in qualche Y^{ξ}. Si prenda infatti un insieme X, tale che $|X| \gneq |Y|\aleph_0$, e si ponga su X la minima topologia T_1 (i.e., quella i cui chiusi propri son finiti). Sia $f\in C(X,Y)$. Per ogni $y\in Y$ $f^{\leftarrow}[\{y\}]$ è chiuso in X, quindi o è finito o è X. Se non fosse mai X, si avrebbe $|X| = \sum_{y\in Y} |f^{\leftarrow}[y]| \leq |Y|\aleph_0$, il che è assurdo. Pertanto ogni $f\in C(X,Y)$ è costante, e quindi $C(X,Y)$ non separa i punti di X. Per il corollario 2, pag 59, X non si può immergere in una potenza di Y.

Ci si possono porre problemi analoghi per gli spazi T_2, T_3, ecc. ma questo per ~~ora~~ non ci interessa.

Fra gli spazi topologici, ha particolare importanza lo spazio $\mathbb{R}$ dei numeri reali con la topologia usuale (questo è ovvio, dato che la topologia è nata come generalizzazione di proprietà dei numeri reali e dei loro spazi di funzioni). È quindi chiaro che ha interesse considerare quelle classi di spazi la cui topologia è in qualche modo collegata ai reali. Lo spazio $\mathbb{R}$ dei reali ha anche una struttura di corpo, è anzi corpo topologico (cioè, $\mathbb{R}$ è gruppo topologico additivo, $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ con la topologia indotta dalla usuale è gruppo topologico moltiplicativo, e l'applicazione $(x,y) \to xy$ è continua come applicazione di $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Se X è uno spazio topologico, denotiamo con $C(X)$ la totalità $C(X;\mathbb{R})$ delle funzioni continue su X con valori in $\mathbb{R}$. Essendo $\mathbb{R}$ corpo topologico, $C(X)$ è un anello rispetto alle ovvie operazioni $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Inoltre $C(X)$ ha unità (la costante 1) e un elemento $f \in C(X)$ è invertibile in $C(X)$ se e solo se $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in X$, il suo inverso essendo allora dato da $f^{-1}: X \to \mathbb{R}$, definito ponendo $f^{-1}(x) = (f(x))^{-1}$ per ogni $x \in X$.

Il corpo $\mathbb{R}$ è anche un corpo totalmente ordinato (cioè, $\mathbb{R}$ ha un ordinamento totale (quello consueto) compatibile con la addizione e la moltiplicazione, cioè tale che $x \leq y$ implica $x+z \leq y+z$, $\forall z \in \mathbb{R}$, e $xz \leq yz$, $\forall z > 0$).
Questo permette di dare a $C(X)$ una ordine parziale, ponendo $f \leq g$ se e solo se $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in X$.
Rispetto a tale ordinamento, $C(X)$ è un reticolo:
$f \vee g$ è la funzione che ad $x \in X$ associa $\max\{f(x), g(x)\}$, mentre $f \wedge g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, $\forall x \in X$. Anche l'ordine di $C(X)$ è compatibile con la struttura di anello, nello stesso senso sopra detto per $\mathbb{R}$. Quindi $C(X)$ è un <u>anello reticolarmente ordinato</u>. Si pone poi, per ogni $f \in C(X)$, $f^+ = f \vee 0$, $f^- = (-f)\vee 0 = -(f \wedge 0)$. Ciò implica $f = f^+ - f^-$, con $f^+, f^- \geq 0$, e posto $|f| = f \vee (-f)$, si ha $|f| = f^+ + f^-$.
Per ogni $f \in C(X)$, si pone poi $Z(f) = f^{\leftarrow}[0] = \{x \in X : f(x) = 0\}$; $Z(f)$ si chiama zero-insieme di f. Gli zero insiemi delle funzioni continue a valori reali sono dei particolari chiusi di X

la cui importanza in topologia generale è sempre crescente. Per $f \in C(X)$, si pone poi $Coz(f) = X \setminus Z(f)$ (cozero-insieme di f). Un importante sottoanello di $C(X)$ è quello, $C^*(X)$, costituito dalle funzioni continue <u>limitate</u>, ~~tali~~ cioè quelle $f \in C(X)$ per cui esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in X$. Ritorneremo più ampiamente in seguito su questi concetti. Per ora, osserviamo che se si parte da uno spazio topologico (X, τ), e si considera $C(X)$, possiamo considerare su X la topologia debole w della famiglia $C(X)$. In generale, w è meno fine di τ, cioè $w \subseteq \tau$. <u>Quando</u> $w = \tau$, lo spazio (X, τ) si dice <u>completamente</u> <u>regolare</u>.

Cioè: <u>Def</u>. <u>Uno spazio topologico</u> X <u>si dice completamente regolare se la sua topologia è la topologia debole della sua famiglia di funzioni continue a valori reali</u>.

Ricordiamo che il concetto di <u>base di chiusi</u> per uno sp. topologico X è duale di quello di base di aperti, cioè: una famiglia $\mathcal{F}$ di chiusi di X è base per i chiusi di X se ogni chiuso F di X è intersezione di elementi di $\mathcal{F}$. Le semirette chiuse di $\mathbb{R}$ sono ovviamente una prebase per i chiusi usuali di $\mathbb{R}$. Analogamente per il concetto di <u>prebase di chiusi</u>.

<u>Teorema</u> 2.2. <u>Sia</u> X <u>uno spazio topologico</u>. <u>Sono equivalenti le condizioni</u>: i) X <u>è completamente regolare</u>

ii) <u>La famiglia</u> $Z[C(X)] = \{Z(f) : f \in C(X)\}$ <u>è base di chiusi per</u> X.

iii) $C(X)$ <u>separa punti e chiusi di</u> X.

iv) X ha la topologia debole di una sottofamiglia C' di $C(X)$

v) X ha la ~~top~~. debole di $C^*(X)$.

<u>Dim</u>. (Abbiamo sottolineato solo le prime 3 equivalenze, perchè sono le più importanti).

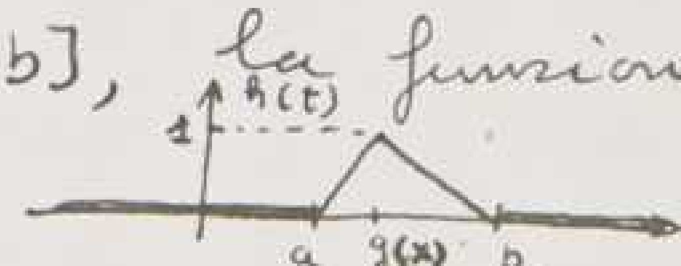
i) $\Leftrightarrow$ ii). X ha la topologia debole di $C(X)$ se e solo se le immagini inverse delle semirette chiuse di $\mathbb{R}$ mediante elti di $C(X)$ sono una base di chiusi per X. Basta quindi far vedere che tali immagini inverse sono zero-insiemi di X. E questo è immediato: si controlla subito che $\{x \in X : f(x) \leq r\} = \{x \in X : (f-r)(x) \leq 0\} = Z((f-r) \vee 0)$ e, analogam. $\{x \in X : f(x) \geq r\} = Z((f-r) \wedge 0)$, per ogni $r \in \mathbb{R}$ e $f \in C(X)$.

ii) $\Rightarrow$ iii). Se F è chiuso in X, e $x \in X \setminus F$, essendo $Z[C(X)]$ base di chiusi, esiste $f \in C(X)$ tale che $Z(f) \supseteq F$

x ogni chiuso $\cap$ di el. della base. Se $x \notin F \Rightarrow \exists f \mid Z(f) \supseteq F$, $x \notin Z(f)$.

e $x \notin Z(f)$. Quindi f separa x ed F.

iii) $\Rightarrow$ ii) Mostriamo che, se iii) vale, ogni chiuso F di X è intersezione degli zero insiemi che lo contengono. Basta cioè provare che se $x \in X \setminus F$, allora esiste $f \in C(X)$ tale che $x \notin Z(f) \supseteq F$. Per ipotesi, esiste $g \in C(X)$ tale che $g(x) \notin cl_{\mathbb{R}}(g[F])$. Esistono quindi $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < g(x) < b$, e $[a,b] \cap g[F] = \emptyset$. Presa $h \in C(\mathbb{R})$ tale che $h(t) = 0$ per $t \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$, $h(g(x)) = 1$ e h sia lineare in $[a, g(x)]$ e $[g(x), b]$, la funzione $h \circ g \in C(X)$ soddisfa ai requisiti richiesti —



La dimostrazione delle altre due equivalenze si lascia come esercizio. Si noti che nel ragionamento finale è implicitamente contenuta la:

Proposizione. X <u>è completamente regolare se e solo se</u> $C(X; [0,1])$ <u>separa punti e chiusi di</u> X.

Esplicitamente: <u>uno spazio topologico</u> X <u>è completamente regolare se e solo se per ogni chiuso</u> F <u>di</u> X <u>e ogni</u>

punto $x \in X \setminus F$ esiste $f \in C(X; [0,1])$ tale che $f(x) = 1$ e $f[F] = \{0\}$.

Si ha poi

Teorema 2.3. Sia X uno sp. completamente regolare. Sono equivalenti le condizioni

i) X è T_0

ii) X è T_1

iii) X è T_2

iv) X è T_3

v) $C(X)$ separa i punti di X.

Inoltre, uno spazio completamente regolare è sempre regolare: ogni punto di X ha una base di intorni che sono zero insiemi di X.

Dim. L'affermazione finale è immediata: dato $p \in X$, e un intorno U di p in X, esiste $f \in C(X)$ tale che $f(p) = 0$, $f[X \setminus U] = \{1\}$. Allora $\{x \in X : |f(x)| \leq \frac{1}{2}\} = Z((|f| - \frac{1}{2}) \vee 0)$ è un intorno di p contenuto in U.

Detto ciò, il resto è triviale e si lascia come esercizio. (conviene mostrare prima $v) \Rightarrow iii)$, che è elementare. Si ha quindi subito $v) \Rightarrow iv) \Rightarrow iii) \Rightarrow ii) \Rightarrow i)$, e $i) \Rightarrow v)$ è conseguenza di C.2, pg 59). //

Def. Uno spazio completamente regolare e di Hausdorff si chiama spazio di Tychonoff o spazio $T_{3\frac{1}{2}}$.

Gli spazi completamente regolari e gli spazi di Tychonoff sono di gran lunga i più importanti spazi topologici che si incontrano.

Lo spazio $\mathbb{I} = [0,1]$ è spazio "prototipo" per gli spazi di

Tychonoff, in questo senso:

Teorema 2.4. <u>Ogni spazio di Tychonoff X di peso ξ ($\geq \aleph_0$) si immerge nel cubo di Tychonoff $\mathbb{I}^{\xi}$</u>

<u>Dim</u>. In uno sp. completamente regolare, i cozero insiemi delle funzioni reali continue sono una base di aperti. Per il lemma di pag 51, esiste $F \subseteq C(X)$ tale che $\{Coz(f) : f \in F\}$ sia base di aperti per X, e $|F| = \xi$. Sostituendo eventualmente f con $|f| \wedge 1$ (e osservando che $Coz(f) = Coz(|f| \wedge 1)$) si può supporre $F \subseteq C(X; \mathbb{I})$. Per il teorema 2.1, pag 57, l'applicazione diagonale della famiglia F immerge X in $\mathbb{I}^F$ ($\cong \mathbb{I}^{\xi}$) (è immediato verificare che F separa punti e chiusi*). // * cf. iii) ⇒ ii) di pg. 63.

Se X è di Tychonoff, e $w(X) = \aleph_0$, allora X si immerge nel cubo di Hilbert $\mathbb{I}^{\aleph_0}$; il cubo di Hilbert è metrizzabile (si verifichi che se $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sono elementi di $\mathbb{I}^{\aleph_0}$, la formula $d(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$ definisce una metrica su $\mathbb{I}^{\aleph_0}$, la cui topologia è quella di $\mathbb{I}^{\aleph_0}$). cf. pp. 30-31, 16 [illegible] Pertanto:

<u>Corollario</u>. <u>Uno sp. di Tychonoff di peso $\aleph_0$ è metrizzabile</u>.

(Ricordiamo che uno sp. si dice metrizzabile (pseudo metrizzabile) quando la sua topologia ha per base le sfere di qualche metrica (pseudo-metrica) su X)

La classe $\mathcal{T}_\rho$ degli spazi completamente regolari e la sua sottoclasse $\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$ degli sp. di Tychonoff saranno d'ora in poi le ~~più~~ classi che più frequentemente considereremo.

Torniamo ora a qualche considerazione sugli zero-insiemi. Sia X uno sp topologico (arbitrario). La famiglia $Z[C(X)]$ degli zero insiemi* di X si indica anche con $Z(X)$. Vediamone qualche proprietà.

a) $Z(X)$ *è chiusa rispetto all'unione finita*. Si ha infatti:

$$Z(f_1) \cup \ldots \cup Z(f_n) = Z(f_1 \cdots f_n) \quad \left(\bigcup_{i=1}^{n} Z(f_i) = Z\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right) \right)$$

b) $Z(X)$ è *chiusa rispetto all'intersezione numerabile*. Si ha infatti $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z(f_n) = Z\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n| \wedge 2^{-n}\right)$. (Si osservi che la serie di funzioni $\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n| \wedge 2^{-n}$ converge totalmente $\left(\big| |f_n| \wedge 2^{-n} \leq 2^{-n} \right)$ quindi uniformemente, pertanto la sua somma è una funzione continua). A più forte ragione si ha che $Z(X)$ è chiusa rispetto all'intersezione finita. È utile osservare che si ha $Z(f) \cap Z(g) = Z(f^2 + g^2) = Z(|f| + |g|)$ per ogni $f, g \in C(X)$. Si noti anche: $Z(0) = X$, $Z(1) = \emptyset$.
Poichè poi $Z(f) = Z(|f| \wedge 1)$, $\forall f \in C(X)$, si ha che $Z[C(X)] = Z[C^*(X)]$.

In uno sp. topologico, un insieme si dice un G_δ se è intersezione numerabile di aperti (i.e $A \subseteq X$ è un G_δ se esistono U_n, $n \in \mathbb{N}$, aperti in X, tali che $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$)

c) *Ogni zero insieme di* X *è un chiuso* G_δ.
Infatti, $Z(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{ x \in X : |f(x)| < 1/n \}$.
La reciproca può essere falsa, cioè, non ogni chiuso G_δ è zero insieme di X. Ciò però avviene se X è *normale*. Vedremo tutto ciò fra poco.

Due sottoinsiemi A, B di X si dicono *completamente separati* (in X) se esiste ~~una~~ $f \in C(X)$ tale che $f[A] = 0$, $f[B] = 1$, $0 \leq f \leq 1$.

Teorema 2.5 *Due insiemi sono completamente separati se e solo se sono contenuti in zero insiemi disgiunti.*

Dim. Se A, B sono completamente separati, e $f \in C(X)$

vale 0 su A, 1 su B, posto $Z_1 = Z(f)$, $Z_2 = Z(f-1)$ si ha $Z_1, Z_2 \in Z(X)$, $A \subseteq Z_1$, $B \subseteq Z_2$ e $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$. Viceversa, se $A \subseteq Z_1$, $B \subseteq Z_2$, $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, $Z_1, Z_2 \in Z(X)$, allora, prese $f, g \in C(X)$ tali che $Z(f) = Z_1$, $Z(g) = Z_2$ si ha $Z(|f| + |g|) = Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$; quindi $|f| + |g|$ è invertibile in $C(X)$. Posto $h = |f|(|f| + |g|)^{-1}$; h vale 0 su A, 1 su B, e $h \in C(X)$, $|h| \leq 1$. //

Sia ancora X uno sp. topologico, S un sottospazio di X. Si dice che una funzione $g \in C(S)$ può essere prolungata con continuità su X se esiste $f \in C(X)$ tale che $f|S = g$; f si dice anche estensione continua di g su X, o anche semplicemente <u>continuazione</u> di g ad X (in generale, la continuazione non è unica. Se S è denso in X, certamente è unica).

<u>Def</u> <u>Il sottospazio</u> S <u>di</u> X <u>si dice</u> C- <u>immerso in</u> X <u>se ogni</u> $g \in C(S)$ <u>ha una continuazione a tutto</u> X.

S <u>si dice poi</u> C^*- <u>immerso in</u> X <u>se ogni</u> $g \in C^*(S)$ <u>ha una continuazione</u> $f \in C^*(X)$.

Si osservi che, se S è C-immerso in X, allora vi è anche C^*-immerso (sia $g \in C^*(S)$, e sia $|g| \leq n$ (n costante). Se $f \in C(X)$ estende g, allora anche $h = (f \wedge n) \vee (-n)$ estende g, e $h \in C^*(X)$). Vedremo in seguito che uno spazio può essere C^*-immerso, e non C-immerso, in un altro. Il teorema fondamentale sulla C^*-immersione è il seguente.

Teorema 2.6 (Tietze-Urysohn) <u>Un sottospazio S di X è C^*-immerso in X se e solo se due qualunque insiemi completamente separati in S, sono completamente separati in X</u>

<u>Dim</u>. Necessità. Se $A, B \subseteq S$ sono completamente

separati in S, esiste $g \in C^*(S)$ tale che $g[A] = \{0\}$, $g[B] = \{1\}$. Ogni continuazione f di g, $f \in C^*(X)$, separa completamente A, B in X.

Sufficienza. Sia $f \in C^*(S)$. Esiste $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$, tale che $|f| \leq m$. Sia $r_1 = m/3$, e si ponga $A_1 = \{x \in S : f(x) \leq -r_1\}$, $B_1 = \{x \in S : f(x) \geq r_1\}$; allora A_1, B_1 sono zero-insiemi disgiunti di S, quindi sono completamente separati in S; per l'ipotesi, lo sono anche in X, cioè, esiste $g_1 \in C^*(X)$ tale che $-r_1 \leq g_1 \leq r_1$, e g_1 vale $-r_1$ su A_1, r_1 su B_1.
Poniamo ora $f_2 = f - g_1|S$ $(\in C^*(S))$. Cerchiamo di maggiorare $|f_2|$ con la più piccola costante possibile. Se $x \in A_1$, si ha $|f_2(x)| = |f(x) - g_1(x)| = |r_1 + f(x)| \leq |r_1 - 3r_1| = 2r_1$, se $x \in B_1$, $|f_2(x)| = |f(x) - g_1(x)| = |f(x) - r_1| \leq |3r_1 - r_1| = 2r_1$; se $x \in S \setminus (A_1 \cup B_1)$, $|f_2(x)| \leq |f(x)| + |g_1(x)| \leq r_1 + r_1 = 2r_1$. Cioè, $|f_2| \leq 2r_1$.
Si ripeta ora lo stesso ragionamento, prendendo f_2 in luogo di f $(= f_1)$, $2r_1$ in luogo di m, ottenendo così $g_2 \in C^*(X)$, e $f_3 = f_2 - g_2|S$, nonchè $r_2 = \frac{2r_1}{3}$ e così via. Per induzione, si ottengono, per ogni $n \in \mathbb{N}$, funzioni $f_n \in C^*(S)$, $g_n \in C^*(X)$ e una successione r_n di numeri reali positivi, soddisfacenti alle relazioni: $f_{n+1} = f_n - g_n|S$; $|f_n| < 3r_n$; $|g_n| < r_n$ e $r_{n+1} = \frac{2}{3} r_n = \frac{m}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(r_1 = \frac{m}{3} = \frac{m}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^1\right)$ (Si lascia come esercizio la dimostrazione effettiva dell'induzione).
Poichè la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} r_n$ converge, la serie di funzioni $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n$ converge totalmente, quindi uniformemente, e quindi la sua somma, g, appartiene a $C^*(X)$. Proviamo che $g|S = f$. Infatti, $(g_1 + \cdots + g_n)|S = (f_1 - f_2) + \cdots + (f_n - f_{n+1}) = f_1 - f_{n+1}$. Ma $|f_{n+1}| < 3r_{n+1}$, e $r_{n+1} \to 0$ per $n \to +\infty$; passando al limite si ottiene quindi $g|S = f_1 = f$ /

Diamo ora un esempio di uno sp. topologico il quale contiene un sottospazio denso C^*-immerso in esso, ma non C-immerso.

Esempio - Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libero su $\mathbb{N}$, e sia σ un elemento non di $\mathbb{N}$. Si consideri lo spazio $\Sigma = \mathbb{N} \cup \{\sigma\}$ con la seguente topologia: una base di aperti per Σ sono i singoli $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}$, e gli insiemi della forma $A \cup \{\sigma\}$, $A \in \mathcal{U}$. In Σ, il sottospazio $\mathbb{N}$ è discreto, aperto, e denso.

Sia $f \in C^*(\mathbb{N})$; $f(\mathcal{U}) = \{f[A] : A \in \mathcal{U}\}$ è base per un ultrafiltro $\mathcal{A}$ su $\mathbb{R}$, fatta di insiemi limitati; quindi $\mathcal{A}$ converge a un $p \in \mathbb{R}$. Ponendo $g(\sigma) = p$, $g|\mathbb{N} = f$, si ha subito che $g \in C^*(\Sigma)$. Una generica funzione $f \in C(\mathbb{N})$ si può poi estendere ad una $g \in C(\Sigma)$ se e solo se f è limitata su qualche $A \in \mathcal{U}$, come è evidente (per la sufficienza, si ripeta il rag. precedente, per la necessità, si osservi che gli intorni di σ in Σ sono gli $A \cup \{\sigma\}$, $A \in \mathcal{U}$, e che una funzione continua in un punto è necessariamente limitata in qualche intorno del punto stesso). Quindi, ad es. la funzione $i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ data da $i(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, non si estende con continuità a Σ.

Perchè un sottospazio C^*-immerso sia anche C-immerso, si deve quindi aggiungere qualche condizione.

Teorema 2.7. Un sottospazio S di X che sia C^*-immerso in X, vi è anche C-immerso se e solo se S è completamente separato da ogni ~~sott~~ zero insieme di X disgiunto da S.

Dim Necessità. Sia $Z(h) \in Z(X)$, $Z(h) \cap S = \emptyset$. La funzione f definita ponendo $f(s) = (h(s))^{-1}$ per ogni $s \in S$ è chiaramente continua su S. Sia $g \in C(X)$ una continuazione di f. Allora $gh \in C(X)$, e $gh[S] = \{1\}$, $gh[Z(h)] = \{0\}$.

Sufficienza. Sia $f \in C(S)$. Allora $\operatorname{arctang} \circ f \in C^*(S)$, quindi esiste $g \in C(X)$ che estende $\operatorname{arctang} \circ f$. L'insieme $Z = \{x \in X : |g(x)| \geq \pi/2\}$ è uno zero-insieme di X disgiunto da S. Esiste, per l'ipotesi, $h \in C(X)$ $|h| \leq 1$ tale che $h[S] = \{1\}$, $h[Z] = \{0\}$. Chiaramente, $gh|S = \operatorname{arctang} \circ f$, inoltre $|gh(x)| < \pi/2$ per ogni $x \in X$. Quindi $k = \operatorname{tang} \circ (gh) \in C(X)$, ed inoltre $k|S = f$. //

Si osservi che, in uno spazio metrizzabile X, ogni chiuso è uno zero-insieme (se d è una metrica su X, ed F è chiuso nella topologia generata da questa metrica, si ha $F = Z(d_F)$, dove d_F è la funzione "distanza da F", definita ponendo $d_F(x) = \inf(\{d(x,y) : y \in F\})$). Per il teorema di Tietze-Urysohn, si ha intanto che ogni <u>chiuso di</u> X è C^*-immerso; per il teorema precedente, ogni <u>chiuso</u> <u>è allora anche C-immerso in</u> X. Quindi

Proposizione. <u>In uno sp. metrizzabile</u> X, <u>ogni chiuso di</u> X <u>è</u> C-<u>immerso in</u> X.

Esercizio. Se X è metrizzabile, ed $\emptyset \neq S \subseteq X$, S non chiuso, <u>allora</u> S non è C^*-immerso in X.

Si noti che nell'esempio di pag 69 $\{\sigma\}$ è uno zero-insieme di Σ (la funzione $j_0 : \Sigma \to \mathbb{R}$ definita ponendo $j_0(n) = 1/n$ per $n \in \mathbb{N}$, $j_0(\sigma) = 0$ è continua su Σ, e $Z(j_0) = \{\sigma\}$) che <u>non</u> è completamente separato da $\mathbb{N}$ ($\sigma \in cl_{\Sigma}(\mathbb{N}) = \Sigma$).

Veniamo ora a parlare di sp. normali e sp. T_4.

<u>Definizione</u>. <u>Uno spazio topologico</u> X <u>si dice normale se due qualsiasi chiusi disgiunti di</u> X <u>hanno intorni disgiunti in</u> X. <u>Uno spazio normale e</u> T_1 <u>è detto spazio</u> T_4

Ricordiamo che un intorno di un insieme $F \subseteq X$ in X è un qualsiasi insieme che contenga F nel suo interno. Quindi X è normale se e solo se, dati comunque $F, G \subseteq X$, F e G chiusi, $F \cap G = \emptyset$, esistono U, V aperti in X tali che $F \subseteq U$, $G \subseteq V$, e $U \cap V = \emptyset$. Questa condizione si può esprimere in vari modi equivalenti, sui quali ci riserviamo qualche esercizio.

Si osservi come dalla stessa definizione si abbia subito che <u>un sottospazio chiuso di uno sp normale è normale</u>. Ciò non è vero per arbitrari sottospazi, come si vedrà. Il ~~teorema~~ risultato fondamentale sugli spazi normali è il:

<u>Lemma di Urysohn</u>. <u>In uno spazio normale</u> X, <u>due chiusi disgiunti sono completamente separati</u>.

(La dimostrazione è supposta già nota. Se ne trova comunque una assai semplice e chiara in [GJ, pag 44]).

Il lemma di Urysohn implica (trivialmente) il seguente risultato chiave: <u>Proposizione</u> - <u>Ogni spazio</u> T_4 <u>è</u> $T_{3\frac{1}{2}}$.

Si ha poi:

<u>Teorema 2.8. Sia X uno spazio topologico. Sono equivalenti le proposizioni</u>

i) <u>X è normale</u>.

ii) <u>Due qualsiasi chiusi disgiunti di X sono completamente separati in X</u>.

iii) <u>Ogni chiuso di X è C^*-immerso in X</u>.

iv) <u>Ogni chiuso di X è C-immerso in X</u>.

<u>Dim</u>. i) $\Leftrightarrow$ ii): Lemma di Urysohn; ii) $\Rightarrow$ iii): si osservi che i chiusi di un sottospazio chiuso S di X sono anche chiusi di X (e quindi complet. sep. per ipotesi), e si applichi il teorema di Tietze-Urysohn; iii) $\Rightarrow$ iv). Sia F un chiuso di X, e sia Z uno zero-insieme di X disgiunto da F. Poiché $F \cup Z$ è chiuso in X, esso vi è per ipotesi

G^*-immerso, quindi la funzione f definita ponendo $f(x)=0$ per $x\in F$, $f(x)=1$ per $x\in Z$ è una funzione di $C^*(F\cup Z)$ che si estende a $g\in C^*(X)$. Quindi F e Z sono completamente separati in X. Per il teorema 2.7, F è G-immerso in X.

iv) $\Rightarrow$ ii) si ripeta il ragionamento su svolto per F e Z, con F, G chiusi disgiunti di X. //

Vediamo ora alcune condizioni che assicurano la normalità di uno spazio. Uno spazio topologico X è detto di <u>Lindelöf</u> se da ogni suo ricoprimento aperto $\mathcal{A}$ (cioè, un insieme $\mathcal{A}$ di aperti di X tali che $\bigcup\mathcal{A}=X$) si può estrarre un sotto ricoprimento <u>numerabile</u>. Si provi, per esercizio, che <u>tutti gli spazi a base numerabile sono di Lindelöf</u>.

Si ha il seguente classico risultato:

Proposizione. <u>Uno spazio</u> X <u>regolare e di Lindelöf è normale. Quindi, se X è T_3 e di Lindelöf, X è T_4 e quindi $T_{3\frac{1}{2}}$</u>

Dim. Siano F, G chiusi disgiunti di X. Per ogni $x\in F$, si prenda un intorno aperto $U(x)$ di x tale che $cl_X(U(x))$ non interseca G; analogam. per ogni $y\in G$ sia $V(y)$ un intorno aperto di y la cui chiusura non interseca F. Allora $\mathcal{A}=\{X\setminus(F\cup G)\}\cup\{U(x): x\in F\}\cup\{V(y): y\in G\}$ è un ricoprimento aperto di X; pertanto esistono $x_i\in F$ $(i\in\mathbb{N})$, $y_i\in G$ $(i\in\mathbb{N})$ tali che $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}U(x_i)\supseteq U$, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}V(y_i)\supseteq V$. Si ponga $U_n=U(x_n)\setminus(\bigcup_{1\le i\le n}cl_X(V(y_i)))$, $V_n=V(y_n)\setminus(\bigcup_{1\le i\le n}cl_X(U(x_i)))$. Gli U_n, V_n sono aperti; posto $U=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n$, $V=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V_n$, $U\supseteq F$ e $V\supseteq G$; infatti dato $x\in F$, esso appartiene a qualche $U(x_n)$, e non appartiene ad alcun $cl_X(V(y_i))$, pertanto appartiene a U_n per qualche n. Analogam. per V e G. Si tratta di provare che $U\cap V=\emptyset$.

Si supponga che $x \in U \cap V$; allora $x \in U_m \cap V_n$ per qualche $m, n \in \mathbb{N}$, ciò implica $x \in U(x_m)$, $x \notin V(y_i)$ per ogni $i = 1, \dots, m$. e inoltre $x \in V(y_n)$, $x \notin U(x_j)$ per ogni $j = 1, \dots, n$.
Questo è manifestamente assurdo (se $m \le n$, $x \notin U(x_m)$ e $x \in U(x_m)$ dovrebbero essere vere entrambe; analogam. se $n \le m$) //

Questo teorema ha come conseguenza il

Teorema di metrizzazione di Urysohn. Uno spazio T_3 a base numerabile è metrizzabile, ed è omeomorfo ad un sottospazio del cubo di Hilbert $\mathbb{I}^{\aleph_0}$.

Dim. Sia X sp T_3, $w(X) = \aleph_0$. Per il teorema precedente, X è T_4, quindi $T_{3\frac{1}{2}}$. In base alla prop di pag 65, X si immerge in $\mathbb{I}^{\aleph_0}$ ed è quindi metrizzabile //.

Diamo ora un esempio di spazio completamente regolare non normale. Dall'esempio si vedrà anche che il prodotto di due spazi normali non è necessariamente normale.

Si chiama retta di Sorgenfrey lo spazio S così costruito: S è l'insieme $\mathbb{R}$ dei reali, munito della topologia in cui una base per gli aperti sono gli intervalli superiormente semiaperti $[a, b) = \{ t \in \mathbb{R} : a \le t < b \}$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$.
Si verifica facilmente che questa topologia è più fine di quella usuale (infatti, $(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + \frac{b-a}{n}, b)$) quindi S è di Hausdorff; inoltre, S è separabile ($\mathbb{Q}$ è denso in S), regolare (gli $[a, b)$ sono simultaneamente aperti e chiusi in S) e di Lindelöf (basta evid dimostrare che ogni ricoprimento di S mediante una famiglia di intervalli $\mathcal{G} = ([a_\alpha, b_\alpha))_{\alpha \in A}$ contiene un sottoricoprimento numerabile. ~~[illegible]~~

Sia $U = \bigcup_{\alpha\in A}(a_\alpha, b_\alpha)$; U, pensato come sottospazio di $\mathbb{R}$ usuale, è a base numerabile, quindi è di Lindelöf, pertanto esiste un sottoinsieme numerabile N di A tale che $U = \bigcup_{\alpha\in N}(a_\alpha, b_\alpha)$. Si consideri ora $\mathbb{R}\setminus U$; i suoi elementi sono quegli $x \in \mathbb{R}$ che sono estremi inferiori di elementi di $\mathcal{A}$, non interni ad alcuno degli intervalli di $\mathcal{A}$. Per ciascun $x \in \mathbb{R}\setminus U$, si scelga un $\alpha \in A$ tale che $a_\alpha = x$, e sia B il sottoinsieme di A così ottenuto. Se $\alpha, \beta \in B$, si ha $[a_\alpha, b_\alpha) \cap [a_\beta, b_\beta) = \emptyset$ giacchè $a_\alpha \neq a_\beta$, e $a_\alpha \notin (a_\beta, b_\beta)$, $a_\beta \notin (a_\alpha, b_\alpha)$. Questo implica che B è numerabile, giacchè un qualunque insieme $\mathcal{J}$ di intervalli non degeneri di $\mathbb{R}$, a due a due disgiunti, è numerabile (per $I \in \mathcal{J}$, si prenda $q(I) \in I \cap \mathbb{Q}$; $I \to q(I)$ è una iniezione di $\mathcal{J}$ in $\mathbb{Q}$). Si ha allora che $\mathcal{B} = ([a_\alpha, b_\alpha))_{\alpha\in N\cup B}$ è una sottofam. numerabile di $\mathcal{A}$ che copre S)). Quindi S è T_4. Si consideri ora $S^2 = S\times S$. (piano di Sorgenfrey). Si prenda in S^2 il sottosp. $D = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$. D è chiuso in S^2 (D è chiuso in $\mathbb{R}^2$ usuale, quindi in S^2, che ha una topologia più fine), ed è discreto (si ha $\{(x,-x)\} = D \cap ([x, x+1)\times[-x, -x+1))$ quindi $\{(x,-x)\}$ è aperto in D, $\forall x \in \mathbb{R}$). Se S^2 fosse normale, D sarebbe C-immerso in $\mathbb{R}$. E ciò è assurdo; poichè D è discreto, $C(D) = \mathbb{R}^D$, quindi $|C(D)| = c^c = 2^c$, mentre, essendo S^2 separabile, $|C(S^2)| = c$. Questo esempio prova anche che il prodotto di 2 sp. di Lindelöf può non essere di Lindelöf (se S^2 fosse di Lindelöf, essendo T_3, sarebbe T_4); ciò mostra la sostanziale differenza tra la proprietà di Lindelöf e la compattezza, nonostante l'analogia di definizione. Anche, si ha un esempio di spazio T_3 separabile avente un sottospazio (D) che non è separabile. Resta da mostrare che S^2 è completamente regolare. Ciò si vede facilmente per via diretta; comunque, è conseguenza del teorema generale che ora dimostriamo:

Teorema 2.9. Sia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di spazi completamente regolari. Allora $\prod_{\lambda\in\Delta} X_\lambda$ è completamente regolare. Quindi, un arbitrario prodotto di sp. $T_{3\frac{1}{2}}$ è $T_{3\frac{1}{2}}$.

Dim. Gli insiemi $\pi_\lambda^{\leftarrow}[Z(f_\lambda)]$, $f_\lambda \in C(X_\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$ sono una prebase di chiusi per $\prod_{\lambda\in\Delta} X_\lambda$. Si ha chiaramente $\pi_\lambda^{\leftarrow}[Z(f_\lambda)] = Z(f_\lambda\circ\pi_\lambda)\in Z(\prod_{\lambda\in\Delta} X_\lambda)$. Quindi $\prod_{\lambda\in\Delta} X_\lambda$ ha una prebase di chiusi (e allora anche una base) costituita da zero-insiemi, ed è quindi completamente regolare //.

Più che altro come esercizio, mostriamo che

Proposizione. In uno sp normale X, $Z(X)$ coincide con l'insieme dei chiusi di X che sono G_δ.

Dim. Si è già visto che gli zero-insiemi sono, in ogni spazio, dei chiusi G_δ. Sia ora X normale, e sia A chiuso in X, risultando inoltre $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, U_n aperti di X. Per ogni n, sia $f_n\in C(X)$ tale che $f_n[A]=\{0\}$, $f_n[X\setminus U_n]=\{1\}$, e $0\le f_n\le 1$ (f_n esiste per il lemma di Urysohn). Posto, $\forall x\in X$, $g(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f_n(x)}{2^n}$, si ha $g\in C(X)$, e $Z(g)=A$ //

Ci si può chiedere se esistono sp. normali in cui qualche chiuso non sia zero-insieme di una funzione continua. In effetti, siamo già in grado di ~~costruire~~ esibire spazi compatti e T_2 (quindi T_4) in cui la famiglia dei chiusi è strettamente più grande di quella degli zero-insiemi. Si lascia come esercizio la ricerca di qualcuno di questi spazi.

Consideriamo ora rapidamente una classe di spazi che ha un certo interesse.

Def. Uno sp. topologico X si dice 0-dimensionale se ha una base di aperti che sono simultaneamente aperti e chiusi (chiusaperti).

Proposizione. Ogni sp. 0-dimensionale X è completamente regolare.

Dim. Banale (le funzioni caratteristiche degli elementi della base di chiusaperti stanno in $C^*(X)$).

Come conseguenza: uno sp. 0-dimensionale è di Tychonoff se e solo se è T_0.

Con argomentazioni di tipo ormai evidente, si prova che:

Proposizione. Sia X uno sp. 0-dimensionale e T_0, e sia $w(X) = \xi \geq \aleph_0$. Allora X si immerge nel cubo di Cantor $\mathbb{D}^{\xi}$. (Basta porre $\Phi = \{$funzioni caratteristiche per una base di chiusaperti $\mathcal{B}$, con $|\mathcal{B}| = \xi\}$)

Si osservi che in $C(X)$ gli idempotenti (cioè gli $f \in C(X)$ per cui $f^2 = f$) sono quelle funzioni f tali che $f[X] \subseteq \{0,1\}$.

Quindi: X è 0-dimensionale se e solo se X ha la topologia debole degli idempotenti di $C(X)$ (Dim: esercizio) T.2.?

È poi chiaro che un prodotto di sp. 0-dimensionali è 0-dimensionale, e un sottospazio di uno sp. 0-dimensionale è 0-dimensionale.

Esempi di spazi 0-dimensionali: ogni sp. discreto; la retta di Sorgenfrey $\mathbb{S}$, e quindi il piano $\mathbb{S}^2$; $\mathbb{Q}$ considerato come sottospazio di $\mathbb{R}$ con la top. usuale; ogni gruppo topologico avente per base degli intorni dell'unità una famiglia di sottogruppi; ogni prodotto di sp. discreti.

Esercizi. (avvertenza: la risoluzione degli esercizi 3), 4), 5), 6) è facoltativa. Si consiglia però una lettura degli enunciati)

1) (Importante) Sia $\mathcal{F}$ un filtro su $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ ($(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sp. topologici). Allora $\mathcal{F}$ converge a $p \in X$ se e solo se, per ogni $\lambda \in \Lambda$, il filtro immagine $\pi_\lambda(\mathcal{F})$ converge a $p_\lambda = \pi_\lambda(p)$ in X_λ. Analogam., la rete $s: D \to X$ converge a $p \in X$ se e solo se le reti $\pi_\lambda \circ s$ convergono a $p_\lambda = \pi_\lambda(p)$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

2) Sia G un gruppo, K gruppo topologico di Hausdorff. Si provi che $\mathrm{Hom}(G, K)$ è chiuso in K^G (K^G è munito della topologia prodotto)

3) Sia $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di spazi separabili, e si indichi con X il loro prodotto topologico. Si provi che se $\mathcal{A}$ è una arbitraria famiglia di aperti di X, a due a due disgiunti, allora $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$ (Sugg. Si provi anzitutto che ciò è vero in ogni sp separabile. Si mostri poi che si può sempre supporre $\mathcal{A}$ cost. da aperti di base, cioè $\mathcal{A} = \{ \bigcap_{\lambda \in F} \pi_\lambda^{\leftarrow}[U_\lambda] : U_\lambda \text{ ap. proprio in } X_\lambda, F \in \mathcal{F} \}$ dove $\mathcal{F}$ è un insieme di sottoinsiemi finiti di Λ. Si provi, ricordando che la separabilità è $\mathfrak{c}$-moltiplicativa, che ogni sottoinsieme $\mathcal{G}$ di $\mathcal{F}$ tale che $|\mathcal{G}| \leq \mathfrak{c}$ ha in effetti cardinalità $\aleph_0$)

4) Sia $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di sp. topologici. Se $A \subseteq \Lambda$, si indica con π_A l'applicazione: $\pi_A : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to \prod_{\lambda \in A} X_\lambda$ data da $\pi_A((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = (x_\lambda)_{\lambda \in A}$. L'applicazione π_A (A-proiezione) è <u>continua e aperta</u>. Si provi che se gli X_λ sono tutti sp. <u>separabili</u>, e U, V sono aperti disgiunti di $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, allora esiste un sottoinsieme <u>numerabile</u> $N \subseteq \Lambda$, tale che $\pi_N[U] \cap \pi_N[V] = \emptyset$. (Non facile. Sugg: Si prenda una famiglia di aperti della base naturale

di X, a due a due disgiunti, contenuti in U oppure in V, massimale rispetto a queste proprietà. Per l'esercizio precedente, tale famiglia è numerabile. Sia N la riunione degli insiemi degli indici caratteristici di tale famiglia. La proiezione π_N soddisfa alle proprietà richieste).

5) (Corson) Sia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di spazi separabili, e sia Y uno sp. T_2 soddisfacente al II° assioma della numerabilità ($w(Y)\leq\aleph_0$). Ricorrendo a 4), si provi che ogni applicazione continua $f:\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\to Y$ dipende da un insieme numerabile di coordinate, cioè esiste $N\subseteq\Lambda$, $|N|\leq\aleph_0$, e un'applicazione continua $g:\prod_{\lambda\in N}X_\lambda\to Y$ tale che $f=g\circ\pi_N$.

6). Sia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di sp. separabili. Sia $a=(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un punto di $X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$, e sia S il sottospazio di X costituito dai $p=(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in X$ tali che $p_\lambda\neq a_\lambda$ per al più un insieme numerabile di indici $\lambda\in\Lambda$. Si provi che S è C-immerso in X, ricorrendo a 5).

7) $C(X)$ per spazi connessi. 1) X è connesso se e solo se le costanti $0,1$ sono gli unici idempotenti di $C(X)$; 2) X è connesso se e solo se 1 ha esattamente due radici quadrate in $C(X)$; 3) se $X=A\cup B$, A, B aperti non vuoti, $A\cap B=\emptyset$, allora $C(X)\cong C(A)\times C(B)$ (prodotto diretto, o somma diretta, di anelli); 4) Viceversa, se X è connesso, $C(X)$ non è decomponibile in somma diretta di due anelli; 5) Se X è connesso, $X\in\mathcal{T}_\rho$, e X contiene almeno un aperto proprio non vuoto, allora $|X|\geq\mathfrak{c}$.

8) Si trovi una funzione $f\in C(\mathbb{R})$ che ha $2^{\aleph_0}$ radici quadrate in $C(\mathbb{R})$.

9) Si provi che, se X è sp. $T_{3\frac{1}{2}}$, allora $C(X)$ è noetheriano se e solo se X è finito.

Svolgimento. Se X è finito (e quindi discreto, essendo $T_{3\frac{1}{2}}$) allora $C(X) \overset{=\mathbb{R}^X}{\cong} \underbrace{\mathbb{R}\times \ldots \times\mathbb{R}}_{|X| \text{ volte}}$ ha solo un numero finito di ideali, ed è quindi noetheriano. Viceversa, sia $C(X)$ noetheriano. Per ogni $p \in X$, si ponga $M_p = \{ f \in C(X) : f(p) = 0 \}$; poichè $C(X)/_{M_p} \cong \mathbb{R}$, M_p è ideale massimale. Esso è finitamente generato, essendo $C(X)$ noetheriano, quindi $M_p = (f_1, \ldots, f_n)$. Posto $g = \sum_{i=1}^{n} |f_i|^{1/2}$, $g \in M_p$, e g genera M_p (posto $h_i(x) = \frac{f_i(x)}{g(x)}$ per $x \neq p$, $h_i(p) = 0$ si ha $h_i \in C(X)$, $f_i = h_i g$). Allora (questo perchè g genera M_p e $g^{1/2} \in M_p$) $g^{1/2} = hg$ per $h \in C(X)$. Questo implica che p è aperto in X. Quindi X è discreto. Se poi X non fosse finito, l'ideale delle funzioni nulle su qualche elemento di un ultrafiltro libero non sarebbe finitamente generato.

10) Siano X, Y sp. topologici, e sia $\varphi : X \to Y$ una funzione continua. L'applicazione $\varphi' : C(Y) \to C(X)$ data da $\varphi'(g) = g \circ \varphi$, $\forall g \in C(Y)$ è un omomorfismo di anelli (che manda l'unità 1_Y nell'unità 1_X).

Si provi che, se Y è completamente regolare, allora φ' è iniettiva se e solo se $\varphi[X]$ è denso in Y.

Se φ' è suriettivo, allora $\varphi[X]$ è C-immerso in Y; se X e Y sono $T_{3\frac{1}{2}}$, allora φ' è suriettiva se e solo se φ è un'immersione di X su un sottoinsieme ($\varphi[X]$) C-immerso in Y.

11) Si noti che in $C(X)$ ogni positivo è un quadrato, cioè se $f \in C(X)$, $f \geq 0$ allora $\exists\, g \in C(X)$ tale che $f = g^2$. Quindi, se $\omega : C(X) \to C(Y)$ è un omomorfismo, ω conserva l'ordine, e pertanto mappa $C^*(X)$ entro $C^*(Y)$.

Inoltre, essendo $|f| = (f^2)^{1/2}$, si ha $\omega(|f|) = |\omega(f)|$ e quindi anche $\omega(f \vee g) = \omega(f) \vee \omega(g)$, $\omega(f \wedge g) = \omega(f) \wedge \omega(g)$, cioè, ω è anche un omomorfismo per la struttura di reticolo. Si provi che ω è anche omomorfismo per la struttura di $\mathbb{R}$-algebra (cioè, $\omega(rf) = r\omega(f)$, $\forall r \in \mathbb{R}$). Si osservi che, essendo $\mathbb{R}$ un particolare $C(X)$ (per X indiscreto, $C(X) \cong \mathbb{R}$), tutto ciò è vero per omomorfismi di $C(X)$ in $\mathbb{R}$.

12) Si provi che, se X è compl. regolare e $w(X) \leq \aleph_0$, allora X è pseudometrizzabile. (Si prenda $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq C(X)$ tale che $\{Coz(f_n) : n \in \mathbb{N}\}$ sia base di aperti per X. La formula $d(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x) - f_n(y)| \wedge 2^{-n}$ definisce una pseudo-metrica su X, la cui topologia è quella di X).

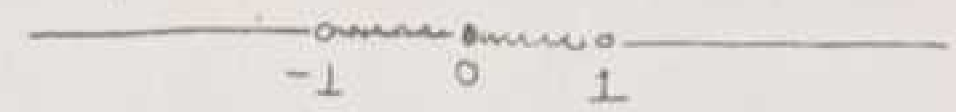
13) Importante. Sia $(X, \leq)$ un insieme totalmente ordinato, contenente più di un elemento. Si può rendere X sp. topologico prendendo come prebase di aperti in X la famiglia di tutti i raggi $\{x \in X : x > a\}$ e $\{x \in X : x < a\}$. Chiamiamo intervallo di X ogni sottoinsieme di X che sia convesso per l'ordine, cioè $I \subseteq X$ è intervallo di X se e solo se $a, b \in I$, e $a < x < b$, implicano $x \in I$. Ad es., nell'ins. totalmente ordinato $\mathbb{Q}$, $I = \{x \in \mathbb{Q} : x < \pi\}$ è un intervallo. La topologia introdotta su $(X, \leq)$ si chiama top. dell'ordine.

a) Gli intervalli aperti di X sono una base per la topologia dell'ordine, e ogni aperto A si esprime in un unico modo come unione di intervalli aperti, massimali per la condizione di essere contenuti in A, a due a due disgiunti.

b) X è sp. T_3

c) Se $A \subseteq X$, la topologia indotta su A dalla topologia

-0

dell'ordine di X è più fine della topologia dell'ordine di A, ed esse possono non coincidere (ad. es., in $\mathbb{R}$, sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x = 0$ oppure $x < -1$, oppure $x > +1\}$ 

; nella top. indotta, 0 è pto isolato di A, nella sua top. dell'ordine, A è omeomorfo ad $\mathbb{R}$). Se A è un intervallo, le due top. coincidono.

d) $A \subseteq X$ è denso in X se e solo se vi è ordinalmente denso (cioè, $\forall\, a, b \in X$, $a < b$, $\exists\, x \in A$ tale che $a < x < b$).
Se A è denso, la sua top. dell'ordine coincide con la top. relativa.

Ricordiamo che un insieme (parzialmente) ordinato si dice condizionalmente completo, o completo alla Dedekind, quando ogni suo sottoinsieme non vuoto superiormente limitato ha estremo superiore.

In un insieme (parzialmente) ordinato E, una coppia di suoi elementi a, b si dice coppia di elem. consecutivi, o anche un salto di E, se $a < b$ è vera, e $a < x < b$ è falsa per ogni $x \in E$.

e) X è connesso nella top. dell'ordine se e solo se è completo alla Dedekind e non ha salti [(ovvio) X è connesso $\Leftrightarrow$ X è continuo]

Introd. alcune notazioni. Se X è totalmente ordinato e A, B sono sottoins. di X, scriviamo $A < B$ per intendere che $a < b$ vale $\forall\, a \in A$, $b \in B$. Si noti che, $\forall\, A \subseteq X$, $\emptyset < A$ e $A < \emptyset$; $x > A$ vuol dire $x > a$, $\forall\, a \in A$.

Una coppia ordinata (A, B) di sottoinsiemi di X si chiama taglio di Dedekind in X se $A < B$ e $A \cup B = X$

È immediato vedere che X è completo alla Dedekind se e solo se, per ogni taglio di Dedekind (A, B) in X, con A e B entrambi non vuoti, si ha che o A ha un massimo, o B ha un minimo. $\Rightarrow$ (completo alla Dedekind = senza lacune)

Un insieme parzialmente ordinato E si dice reticolarmente completo quando ogni suo sottoinsieme ha estremo superiore.
È chiaro che un insieme totalmente ordinato X è reticolarmente completo se e solo se per ogni taglio di Dedekind (A,B) in X, A ha un massimo, oppure B ha un minimo.
Dato un ins. totalm. ordinato X privo di salti (per trovare le densità), esso ha un completamento ordinale, cioè esiste un insieme totalmente ordinato e completo Y, in cui X è sottoinsieme ordinato denso. Inoltre Y è unico a meno di isomorfismi che siano l'identità su X.
Per costruire Y, si prende l'insieme di tutti i tagli di Dedekind (A,B) in X per cui A non ha massimo, e B non ha minimo; ciascuno di questi tagli si può pensare come un nuovo elemento u tale che $A < u < B$. L'insieme Y ottenuto aggiungendo questi elementi è il completamento ordinale di X.
Vedremo poi, in altro esercizio, che l'essere $(X, \leq)$ insieme tot. ordinato reticolarmente completo equivale alla compattezza di X nella sua top. dell'ordine.

14) Un gruppo abeliano totalmente ordinato è gruppo topologico nella sua top. dell'ordine.

15) Non esiste alcun gruppo ordinato reticolarmente completo, che contenga più di un elemento.

16) Un ~~gruppo totalmente~~ corpo totalmente ordinato non archimedeo K ha per base di intorni dello 0 nella topologia dell'ordine una famiglia di suoi sottogruppi, ~~[illegible]~~ questi sottogruppi sono intervalli aperti di K, e quindi convessi nell'ordine (= isolati nella terminologia di Barsotti). Si provi che la top. indotta sul sottocorpo fondamentale Q è quella discreta.

Spazi compatti. Compattificazioni.

Def *Uno sp. topologico X si dice compatto se ogni suo ricoprimento aperto contiene un sottoricoprimento finito.*
Ricordiamo che molti testi (ad es Bourbaki, Engelking, etc.) chiamano *quasi-compatto* uno sp godente della proprietà di cui sopra, riservando il nome di *compatti* ai *quasi-compatti* T_2.
I sovietici chiamano invece *bicompatti* quelli che per noi sono compatti, riservando il nome di *compatti* a quelli che saranno per noi i *numerabilmente compatti*.
Vediamo ora alcune proprietà equivalenti alla compattezza di uno spazio.

Teorema. *Sia X uno sp topologico. Le seguenti sono equivalenti:*

i) *X è compatto*

ii) *Ogni famiglia di chiusi avente la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.*

iii) *Ogni ultrafiltro di chiusi di X è fisso (un ultrafiltro di chiusi è una famiglia di chiusi con f.i.p., massimale per tale proprietà).*

iv) *Ogni ultrafiltro di X converge.*

v) *Ogni filtro su X ha almeno un punto di aderenza.*

Dim. i) $\Leftrightarrow$ ii) è banale: basta usare le formule di De Morgan. ii) $\Rightarrow$ iii) ovvio: gli ultrafiltri di chiusi sono particolari famiglie di chiusi con f.i.p. iii) $\Rightarrow$ iv). Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su X. Basta provare che $\mathcal{U}$ ha un pto di aderenza, cioè che $\bigcap\{\overline{F} : F \in \mathcal{U}\} \neq \emptyset$. La famiglia $\{\overline{F} : F\in\mathcal{U}\}$ ha la f.i.p., pertanto, per il lemma di Zorn, è contenuta in un ultrafiltro di chiusi, $\mathcal{G}$. Si ha allora $\bigcap\{\overline{F} : F\in\mathcal{U}\} \supseteq \bigcap \mathcal{G}$, e questo ultimo insieme non è vuoto, per la iii). Quindi anche $\bigcap\{\overline{F} : F \in \mathcal{U}\} \neq \emptyset$, e $\mathcal{U}$ converge; iv) $\Rightarrow$ v) Se $\mathcal{F}$ è un filtro, e $\mathcal{U}$ un ultrafiltro che lo contiene, un limite di $\mathcal{U}$ è pto di aderenza per $\mathcal{F}$; quindi $\mathcal{F}$ ha pti di aderenza; v) $\Rightarrow$ ii) Se $\mathcal{B}$ è una famiglia di chiusi con la f.i.p., $\mathcal{B}$ genera un filtro $\mathcal{F}$. Per v), si ha $\bigcap\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$, e chiaramente quest'intersezione è contenuta in $\bigcap \mathcal{B}$ //.

Il teorema precedente permette subito di dimostrare il fatto fondamentale che la classe degli spazi compatti è <u>moltiplicativa</u>.

<u>Teorema</u> (Tychonoff) <u>Siano $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sp. compatti. Allora $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ è compatto</u>.

Dim. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su X, e sia $\mathcal{U}_\lambda = \pi_\lambda(\mathcal{U})$, $\forall \lambda \in \Lambda$. Gli $\mathcal{U}_\lambda$ sono ultrafiltri su X_λ, pertanto esiste $p_\lambda \in X_\lambda$ che è limite per $\mathcal{U}_\lambda$. Allora, per l'Esercizio 1), $\mathcal{U}$ converge in X a $p = (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ //.

Il teorema di Tychonoff è fondamentale dal punto di vista sia teorico che applicativo. È notevole (anche se per noi è più che altro una curiosità) il seguente fatto:

<u>Teorema</u> (Kelley) <u>Il teorema di Tychonoff implica lo assioma della scelta</u>.

<u>Dim</u>. Sia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di insiemi non vuoti. Poniamo su ciascun X_λ la topologia in cui i chiusi propri son finiti; X_λ è compatto (si prenda una famiglia di chiusi con f.i.p., se ne considerino le intersezioni finite; nella famiglia così ottenuta, un insieme con minimo numero di elementi è necessariamente contenuto in ogni altro membro della famiglia).

Sia poi σ un oggetto non appartenente a nessun X_λ; e si consideri lo sp. $Y_\lambda = X_\lambda \cup \{\sigma\}$, in cui X_λ è sottosp. chiuso (in altre parole, $\{\sigma\}$ è aperto in Y_λ; ciò individua la topologia di Y_λ). Gli sp. Y_λ sono compatti. Per l'ipotesi, $\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ è compatto, inoltre non è vuoto, poichè la funzione $c_\sigma : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$, costantemente uguale a σ, appartiene a $\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$. Si tratta di far vedere che il sottosp. $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ non è vuoto. Sia $F_\lambda = \pi_\lambda^{\leftarrow}[X_\lambda]$ (π_λ è la λ-proiezione di $\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ in Y_λ); F_λ è chiuso; inoltre la famiglia $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ha la f.i.p.; infatti in $F_{\lambda_1} \cap \ldots \cap F_{\lambda_n}$ vi è la funzione x di Λ in $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ ottenuta ponendo $x(\lambda) = \sigma$ per $\lambda \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $x(\lambda_i) \in X_{\lambda_i}$ per $i = 1, \ldots, n$ (quest'ultima ~~affermazione~~ posizione è resa possibile dal fatto che gli X_{λ_i} sono <u>non vuoti</u> e che, inoltre, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ è <u>finito</u>, quindi l'assioma della scelta non è chiamato in causa). Allora $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$ //.

Vediamo ora l'influenza delle proprietà di separazione sugli spazi compatti. I teoremi sono enunciati senza dimostrazione, essendo supposti già noti.

<u>Sia A un sottospazio compatto di uno sp. di Hausdorff X, e sia $p \in X \setminus A$. Allora p ed A hanno intorni disgiunti in X.</u>

<u>Quindi un sottospazio compatto di uno sp. di Hausdorff è chiuso</u>

Dopo aver ricordato che, trivialmente, un <u>sottosp. chiuso di uno spazio compatto è compatto</u>, possiamo enunciare:

<u>Se A e B sono sottospazi compatti e disgiunti di uno sp. di Hausdorff X, allora essi hanno intorni disgiunti in X. Quindi ogni compatto T_2 è T_4.</u>

<u>Ogni compatto regolare è normale, e (quindi) completamente regolare</u>

Dimostriamo invece le seguenti importanti proposizioni:

Proposizione (a) - Sia X uno sp. completamente regolare, B un chiuso di X, A un ~~sottoinsieme~~ compatto di X disgiunto da B. Allora A e B sono completamente separati.

Dim. Per ogni $x \in A$, sia Z_x uno zero-insieme che sia intorno di x, Z'_x uno zero insieme contenente B, disgiunto da Z_x (Z'_x e Z_x esistono perchè, essendo X completamente regolare, punti e chiusi che non si appartengono sono completamente separati, e ogni punto ha una base di intorni che sono zero-insiemi). Allora esistono $x_1, \dots, x_n \in A$ tali che $A \subseteq Z_{x_1} \cup \dots \cup Z_{x_n}$, e questo è uno zero-insieme disgiunto da $Z'_{x_1} \cap \dots \cap Z'_{x_n} \supseteq B$ //

La proposizione (a) si estende nella seguente

Proposizione (b). Sia X completamente regolare. Se S è un sottospazio ~~sottoinsieme~~ compatto di X, e A è un G_δ di X contenente S, allora esiste uno zero insieme $Z \in Z(X)$ tale che $S \subseteq Z \subseteq A$.

Dim. Sia $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$, U_n aperti in X. Per ogni n, in base alla prop. (a), esiste $Z_n \in Z(X)$ tale che $S \subseteq Z_n \subseteq U_n$. Allora posto $Z = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n$, $S \subseteq Z \subseteq A$, e $Z \in Z(X)$ //

Corollario. In uno sp completamente regolare X, ogni ~~sottoinsieme~~ compatto G_δ è zero insieme di X. In particolare, ogni punto G_δ è zero-insieme.

Se ora X è $T_{3/2}$, ed S è compatto, $S \subseteq X$, allora S è chiuso; inoltre, sottoinsiemi completamente separati di S hanno in S chiusure disgiunte; queste sono compatte in S, quindi in X (la compattezza non dipende dallo sp in cui lo sp considerato è immerso) e quindi, sono completamente separate in X. Per il teorema di Tietze - Urysohn, S è C^*-immerso in X, e per la proposizione (a), è anche C - immerso (oppure, $C^*(S) = C(S)$ perchè S

è compatto) ~~.....~~ Pertanto

<u>Ogni sottospazio compatto S di uno spazio ~~.....~~ di Tychonoff X è C- immerso in X.</u>

Ricordiamo che un'applicazione $f: X \to Y$ (X, Y sp. topologici) si dice <u>chiusa</u> se per ogni chiuso A di X, $f[A]$ è chiuso in Y. Si ha

<u>Teorema</u>. <u>Siano X uno sp. compatto, Y uno spazio topologico, f un'applicazione continua e suriettiva di X in Y. Allora</u>

1) <u>Y è compatto</u>, 2) <u>Se Y è T_2, f è chiusa</u>; 3) <u>Se f è per di più iniettiva, e Y è T_2, f è un omeomorfismo di X su Y.</u>

(La dimostrazione è supposta nota)

<u>Corollario</u>. <u>Le topologie compatte T_2 su di un insieme X sono minimali fra le topologie T_2 su X. In altre parole, se (X, τ) è compatto T_2, e σ è una topologia su X strettamente meno fine di τ, allora (X, σ) non è T_2.</u>

Sfruttando questo corollario:

Esercizio. <u>Se X è uno sp. compatto T_2, allora</u> $w(X) \leq |X|$.

Il corollario e l'esercizio rinforzano il concetto, già visto dal Teorema di Čech-Póspíšil, che uno sp. compatto non può avere "troppi" aperti.

Si provi anche che:

Esercizio. <u>Sia X compatto T_2, f una suriezione continua di X sullo sp. T_2 Y. Allora</u> $w(X) \geq w(Y)$.

Passiamo ora a considerare vari esempi di spazi compatti.

1) Il sottospazio N^* di $\mathbb{R}$ usuale, $N^* = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

Si provi che $w(N^*) = \aleph_0 = |N^*|$

2) Si consideri lo sp. X così definito, come insieme, $X = [0,1] \times \{0,1\}$; prendiamo come base di aperti in X

gli insiemi del tipo $\{(t,1)\}$, $t \in [0,1]$, e gli insiemi del tipo $(]t-\varepsilon, t+\varepsilon[) \times \{0\} \cup (]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\setminus \{t\}) \times \{1\}$. Si verifica facilmente che la topologia così ottenuta su X è compatta (si sfrutti il fatto che $[0,1]$ usuale è compatto) e T_2. Il sottospazio $X_0 = [0,1] \times \{0\}$ di X è omeomorfo a $[0,1]$ usuale, mentre $X_1 = [0,1] \times \{1\}$ è sottospazio *discreto* di X. Pertanto $w(X) = \mathfrak{c}$ (i punti isolati fanno parte di qualsiasi base), ma X soddisfa al I° assioma della numerabilità.

3) Diamo ora un esempio di spazio T_4, X, tale che $|X| = \aleph_0$, mentre $\chi(p,X) = w(X) = \mathfrak{c}$, per ogni $p \in X$. Sia $\mathbb{N}$ lo sp. discreto dei naturali. Essendo la separabilità $\mathfrak{c}$-moltiplicativa, lo sp. $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ risulta separabile, sia X un suo sottosp. denso e numerabile. Osserviamo subito che X è $T_{3\frac{1}{2}}$, perché tale è $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$. Inoltre, X, essendo numerabile, è di Lindelof, e pertanto anche T_4.

Verifichiamo ora che, se $p \in X$, e $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ è un insieme di intorni di p in $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$, con $A \lneq \mathfrak{c}$, allora esiste un intorno V di p in $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ tale che $V \cap X$ non contiene alcun $V_\alpha \cap X$. Ciò proverà $\chi(p,X) \geq \mathfrak{c}$, e quindi l'asserto, essendo $|\mathcal{B}(X)| = \mathfrak{c}$. Si può supporre $V_\alpha = \bigcap_{\lambda \in F_\alpha} \pi_\lambda^{\leftarrow}[U_\lambda]$, con F_α sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$. Sia $\Delta = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha$; chiaramente, $|\Delta| \leq \aleph_0 |A| \lneq \mathfrak{c}$, quindi esiste $\bar{\lambda} \in \mathbb{R} \setminus \Delta$. Poiché $\mathbb{N}$ è discreto, $\{\pi_{\bar{\lambda}}(p)\}$ è aperto in $\mathbb{N}$, e quindi $V = \pi_{\bar{\lambda}}^{\leftarrow}[\pi_{\bar{\lambda}}(p)]$ è intorno di p in $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$, che non contiene alcun V_α. Ma allora $V_\alpha \cap X$ non è mai contenuto in $V \cap X$; infatti i V, V_α sono tutti chiusaperti in X, e quindi $(V_\alpha \setminus V) \cap X \neq \emptyset$, $\forall \alpha \in A$.

È anche chiaro che questo spazio è *perfettamente normale* (è T_4 ed, essendo numerabile, ogni chiuso è un G_δ) e *non è metrizzabile*.

Si noti anche come l'assenza della compattezza permetta l'insorgere di casi estremi, come questo, sugli invarianti cardinali dello spazio.

5) Spettri di anello. Sia A un anello commutativo. Si chiama spettro primo di A, $\mathrm{Spec}(A)$, l'insieme degli ideali primi di A munito della topologia per cui una base di chiusi sono gli insiemi $V(a)=\{P : P$ id. primo di A, e $a \in P\}$, con a variabile in A. Verifichiamo che $V(a)$, $a \in A$ è effettivamente una base di chiusi per una topologia; si ha infatti $V(a) \cup V(b) = V(ab)$ (si ricordi che $ab \in P \Rightarrow a \in P$ oppure $b \in P$, essendo P primo), pertanto $(V(a))_{a \in A}$ è addirittura chiusa risp. all'unione finita. Inoltre, $\bigcap\{V(a) : a \in A\} = \emptyset$. Si verifica subito che, se $\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{Spec}(A)$, si ha $cl_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathfrak{A}) = \{P \in \mathrm{Spec}(A) : P \supseteq \bigcap \mathfrak{A}\}$. Infatti, $cl_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathfrak{A}) = \bigcap\{V(a) : V(a) \supseteq \mathfrak{A}\}$, quindi, se $P \in cl_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathfrak{A})$, si ha $a \in P$ per ogni $a \in \bigcap \mathfrak{A}$, e quindi $P \supseteq \bigcap \mathfrak{A}$. Viceversa se $P \supseteq \bigcap \mathfrak{A}$, e $V(a) \supseteq \mathfrak{A}$ allora $a \in \bigcap V(a) \subseteq \bigcap \mathfrak{A}$, pertanto $a \in P$, cioè $P \in V(a)$. Quindi $\mathrm{Spec}(A)$ è T_0: $cl_{\mathrm{Spec}(A)}(\{P\}) = \{Q : Q \text{ primo}, Q \supseteq P\}$. Inoltre, indicando con $\mathfrak{M}(A)$ l'insieme degli ideali primi massimali, $\mathfrak{M}(A)$ è sottospazio T_1.

Verifichiamo che: Se A ha unità, $\mathrm{Spec}(A)$ ed $\mathfrak{M}(A)$ sono compatti. Dim: basta dimostrare che una famiglia di chiusi di base, $\{V(a) : a \in B\}$, avente la proprietà della intersezione finita, ha intersezione non vuota. Infatti, $\bigcap_{a \in B} V(a)$ è come si vede subito, l'insieme dei primi contenenti l'ideale generato da B in A; tale insieme (avendo A l'unità) sarà vuoto se e solo se l'ideale generato da B è improprio, i.e., coincide con A. Cioè, $\bigcap_{a \in B} V(a) = \emptyset$ se e solo se esistono $a_1, \dots, a_n \in A$ e $b_1, \dots, b_n \in B$ per cui $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 1$. Ma ciò implica $V(b_1) \cap \dots \cap V(b_n) = \emptyset$, cioè, $\{V(a) : a \in B\}$ non ha la f.i.p. #
È chiaro che un'identica argomentazione prova che $\mathfrak{M}(A)$ è compatto //

Per procedere, abbiamo ora bisogno di un teorema di algebra commutativa. Ricordiamo che si chiama parte moltiplicativa di un anello un sottoinsieme S dell'anello che sia chiuso rispetto al prodotto.

Teorema. Sia A un anello commutativo, e sia S una parte moltiplicativa di A. Se I è un ideale di A disgiunto da S, allora esiste un ideale primo P di A, contenente I e disgiunto da S. (La dimostrazione è supposta nota).

Corollari. In un anello commutativo A, il radicale $r(I)$ di un ideale proprio è l'intersezione degli ideali primi contenenti I. Quindi $r(0) = N(A)$ (nilradicale di A) è l'intersezione di tutti i primi.

Vediamo ora quando $\mathcal{M}(A)$ può essere T_2

Teorema. Sia A un anello commutativo con unità. Le proposizioni seguenti sono equivalenti:

i) $\mathcal{M}(A)$ è T_2

ii) Se $M_1, M_2 \in \mathcal{M}(A)$, $M_1 \neq M_2$, allora $\exists\, a_1 \in A \setminus M_1$, $a_2 \in A \setminus M_2$ tali che $a_1 a_2 \in J(A)^2$

iii) Ogni ideale primo contenente $J(A) = \cap \mathcal{M}(A)$ è contenuto in un unico ideale massimale.

Dim. L'equivalenza i) $\Leftrightarrow$ ii) non fa altro che tradurre in termini concreti i); $\mathcal{M}(A)$ è T_2 se e solo se, dati $M_1, M_2 \in \mathcal{M}(A)$, $M_1 \neq M_2$, esistono $a_1, a_2 \in A$ tali che $M_1 \in \mathcal{M}(A) \setminus V(a_1)$, $M_2 \in \mathcal{M}(A) \setminus V(a_2)$ e $\mathcal{M}(A) \cap (\mathcal{M}(A) \setminus V(a_1)) \cap (\mathcal{M}(A) \setminus V(a_2)) = \emptyset$. Ciò accade se e solo se $\mathcal{M}(A) = V(a_1) \cup V(a_2) = V(a_1 a_2)$, cioè se e solo se $a_1 a_2 = J(A)$. Inoltre, $M_1 \in \mathcal{M}(A) \setminus V(a_1)$ significa $a_1 \notin M_1$, analog $\mathcal{M}(A) \setminus V(a_2) \Leftrightarrow a_2 \notin M_2$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Se $M_1, M_2 \in \mathcal{M}(A)$, esistono $a_1 \in A \setminus M_1$, $a_2 \in A \setminus M_2$ tali che $a_1 a_2 \in J(A)$. Quindi $M_1 \cap M_2$ non contiene ideali primi contenenti $J(A)$.

iii) $\Rightarrow$ ii) Dati $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}(A)$, sia $S = \{a_1 a_2 : a_1 \in A \setminus M_1, a_2 \in A \setminus M_2\}$.
Chiaramente S è parte moltiplicativa di A. Se $S \cap J(A)$ fosse vuoto, esisterebbe un ideale primo di A, P, contenente $J(A)$ e disgiunto da S. Poichè $S \supseteq (A \setminus M_1) \cup (A \setminus M_2)$, si avrebbe $J(A) \subseteq P \subseteq M_1 \cap M_2$, contro l'ipotesi. Pertanto $\exists\, a_1 \in A \setminus M_1$, $a_2 \in A \setminus M_2$, tali che $a_1 a_2 \in J(A)$ //.

Corollario Sia A un anello commutativo con unità. Le seguenti sono equivalenti:

i) $\operatorname{Spec}(A)$ è T_1

ii) $\operatorname{Spec}(A)$ è T_2

iii) $\operatorname{Spec}(A) = \mathfrak{M}(A)$, cioè, ogni ideale primo di A è massimale.

Dim i) $\Leftrightarrow$ iii) ovvio, in base alle proprietà dell'operatore di chiusura in $\operatorname{Spec}(A)$; ii) $\Rightarrow$ i) Triviale; iii) $\Rightarrow$ ii) Teorema precedente //

Quindi, per ogni algebra di Boole A, $\operatorname{Spec}(A)$ è compatto T_2.

[illegible] Esercizio. Sia A dominio di integrità. Allora $\operatorname{Spec}(A)$ contiene un punto la cui chiusura è $\operatorname{Spec}(A)$. Quindi $\operatorname{Spec}(A)$ è T_1 se e solo se A è un corpo, i.e, $\operatorname{Spec}(A) = \{\{0\}\}$. Inoltre, se $J(A) = (0)$ $\mathfrak{M}(A)$ è T_2 se e solo se è finito. [illegible]

Occupiamoci ora del caso che più ci interessa, quello degli anelli di funzioni continue. Se X è sp. topologico, poniamo per semplicità $\mathfrak{M}(X) = \mathfrak{M}(C(X))$. Osserviamo che per ogni $p \in X$, l'ideale $M_p = \{f \in C(X) : f(p) = 0\}$ è massimale in $C(X)$ (è il nucleo dell'omomorfismo $e_p : C(X) \to \mathbb{R}$ dato da $e_p(f) = f(p)$). Questo ci dà un'applicazione naturale $\theta : X \to \mathfrak{M}(X)$ definita ponendo $\theta(p) = M_p$. Vediamo ora alcune proprietà di $\mathfrak{M}(X)$ e di θ.

Teorema. $\mathfrak{M}(X)$ è compatto e di Hausdorff

Dim. Poichè $G(X)$ ha unità, $\mathfrak{M}(X)$ è compatto. Siano poi M_1, M_2 ideali massimali distinti di $G(X)$. Esistono allora $f \in M_1, g \in M_2$ tali che $f+g=1$. Ciò implica che $Z(f) \cap Z(g) = \emptyset$, quindi f^2+g^2 è invertibile in $G(X)$. Posto $u = f^2(f^2+g^2)^{-1}$, $v = g^2(f^2+g^2)^{-1}$, si ha $u+v=1$, $0 \leq u, v \leq 1$, $u \in M_1$, $v \in M_2$. Si ponga ora $a_1 = (\frac{1}{2} - u) \vee 0$, $a_2 = (u - \frac{1}{2}) \vee 0$. Chiaramente $a_1 a_2 = 0$ (se $u(x) \leq 1/2$, allora $a_2(x) = 0$, se $u(x) \geq 1/2$, allora $a_1(x) = 0$). Inoltre, poichè a_1, u sono ≥ 0, $Z(a_1+u) = Z(a_1) \cap Z(u)$, che è vuoto, poichè su $Z(u)$, a_1 vale sempre $\frac{1}{2}$; quindi a_1+u è invertibile, cioè $a_1+u \notin M_1$; poichè $u \in M_1$, si ha $a_1 \notin M_1$. Analogamente, $a_2 \notin M_2$. Per il precedente teorema, $\mathfrak{M}(X)$ è T_2 //

Si osservi che $\bigcap_{p \in X} M_p = \{0\}$, quindi $J(G(X)) = \{0\}$. Da ciò:

Corollario. In $G(X)$, ogni ideale primo è contenuto in un unico ideale massimale.

Vedremo in seguito che ~~[illegible]~~ in realtà vale il seguente risultato: In $G(X)$, gli ideali primi contenenti un dato ideale primo sono totalmente ordinati rispetto all'inclusione.

Teorema. 1) L'applicazione $\theta : X \to \mathfrak{M}(X)$ definita da $\theta(p) = M_p$ è continua, e $\theta[X]$ è denso in $\mathfrak{M}(X)$.

2) Se X è completamente regolare, θ è una applicazione aperta su $\theta[X]$

3) L'applicazione θ è iniettiva se e solo se $G(X)$ separa i punti di X.

4) θ è un'immersione se e solo se X è di Tychonoff.

Dim. La continuità di θ è ovvia: $\theta^{\leftarrow}[V(f)] = Z(f)$, per ogni $f \in G(X)$. Inoltre, $cl_{\mathfrak{m}(X)}(\theta[X]) = \{ M \in \mathfrak{M}(X) : M \geq \bigcap \theta[X] \} =$

$:= \{ M \in \mathcal{M}(X) : M \geq \{0\} \} = \mathcal{M}(X)$.

2) Basta mostrare che $\theta[\mathrm{Coz}(f)]$ è aperto in $\theta[X]$ per ogni $f \in G(X)$. È infatti, $\theta[\mathrm{Coz}(f)] = \{ M_p : f(p) \neq 0 \} = (\mathcal{M}(X) \setminus V(f)) \cap \theta[X]$.

3) Se $M_p = M_q$, allora ogni $f \in G(X)$ che sia nulla su p è nulla anche su q; quindi $g(p) = g(q)$ $\forall g \in G(X)$ (altrimenti, $g - g(q)$ sarebbe nulla su q e non su p), cioè, $G(X)$ non separa i pti. Se $G(X)$ non separa $p, q \in X$, chiaram. allora $M_p = M_q$.

4) Se X è $T_{3\frac{1}{2}}$, allora 2), 3) implicano che θ è un'immersione. Se poi θ è un omeomorfismo di X su $\theta[X]$, allora X è omeomorfo ad un sottospazio dello sp. compatto e T_2 $\mathcal{M}(X)$, e quindi è $T_{3\frac{1}{2}}$ //

Corollario 1. Se X è compatto, allora θ è suriettiva. In altre parole, se X è compatto, ogni suo ideale massimale è della forma M_p, $p \in X$.

Dim. $\theta[X]$ è compatto e quindi chiuso nello sp. $\mathcal{M}(X)$, che è T_2. ~~Se~~ Poichè $\theta[X]$ è denso in $\mathcal{M}(X)$, $\theta[X] = \mathcal{M}(X)$ //

Corollario 2. Se X è compatto T_2, allora θ è un omeomorfismo di X su $\mathcal{M}(X)$.

Dim. Per il corollario 1, θ è suriettiva. Poichè X, essendo compatto T_2, è $T_{3\frac{1}{2}}$, θ è iniettiva, ed è quindi un omeomorfismo di spazi compatti T_2 //

Corollario 3. Siano X e Y spazi compatti di Hausdorff. Essi sono omeomorfi se e solo se $G(X)$ e $G(Y)$ sono isomorfi.

Dim. X è omeomorfo ad $\mathcal{M}(X)$, Y è omeomorfo a $\mathcal{M}(Y)$, per il corollario 2. Se $G(X) \cong G(Y)$, allora ovviamente $\mathcal{M}(X)$ è omeomorfo ad $\mathcal{M}(Y)$, cioè X è omeomorfo ad Y. Il viceversa è banale (se ω è omeomorfismo di X su Y, l'applicazione $\omega' : G(Y) \to G(X)$ data da $\omega'(g) = g \circ \omega$ $(g \in G(Y))$ è chiaramente un isomorfismo di $G(Y)$ su $G(X)$) //

Esercizio importante. Sia X uno sp. topologico; si consideri ancora l'applicazione $\theta : X \to \mathcal{M}(X)$. Sia $\theta' : C(\theta[X]) \to C(X)$ definita ponendo $\theta'(g) = g \circ \theta$, $\forall g \in C(\theta[X])$. *Si provi che θ' è un isomorfismo di $C(\theta[X])$ su $C(X)$*.

L'esercizio è importante perchè prova che nello studiare anelli di funzioni reali continue su uno spazio topologico, si può sempre supporre questo spazio di Tychonoff ($\theta[X]$, sottospazio di un compatto T_2, è $T_{3\frac{1}{2}}$). Ciò si può ottenere per via diretta.

Si consideri in X la relazione ρ così definita: $x \rho y$ se e solo se $f(x) = f(y)$ per ogni $f \in C(X)$. Si vede facilmente che ρ è relazione di equivalenza. Si ponga $Y = X/\rho$, e sia $\pi : X \to Y$ la applicazione naturale. Si mostri che, per ogni $f \in C(X)$ esiste una ed una sola $g \in \mathbb{R}^Y$ tale che $f = g \circ \pi$. Le g così ottenute sono un sottoanello A di $\mathbb{R}^Y$, che è isomorfo a $C(X)$, e separa i punti di Y. Ponendo su Y la topologia debole delle funzioni di A, si vede che Y è $T_{3\frac{1}{2}}$, che $C(Y) = A$ e che π è continua. *Questo procedimento non differisce essenzialmente da quello precedente*: Si provi che esiste un omeomorfismo ω di $\theta[X]$ sullo sp. Y appena definito, in modo tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\pi"'] & \theta[X] \arrow[d, "\omega"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

sia commutativo.

Vedremo in seguito che *$\mathcal{M}^*(X) = \mathcal{M}(C^*(X))$ è omeomorfo ad $\mathcal{M}(X)$ e che $C(\mathcal{M}(X))$ è isomorfo a $C^*(X)$, per ogni sp. topologico X*.

Spazi localmente compatti

Def. Uno sp. topologico X si dice localmente compatto se per ogni $p \in X$ il filtro degli intorni di p in X ha una base costituita da sottoinsiemi chiusi e compatti di X.

Si noti che uno sp. localmente compatto è sempre regolare,
In base a questa definizione, quindi uno sp. compatto può non essere localmente compatto, ad esempio, in $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, il punto $\{0\}$ ha una base di intorni costituita da compatti aperti in $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ (gli insiemi $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \setminus V(a)$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$), ma poichè $\{0\}$ è denso in $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, l'unico intorno chiuso di $\{0\}$ in $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ è $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ stesso. Tuttavia, questi fenomeni sono impossibili se lo spazio ha qualche proprietà di separazione più forte:

Teorema 1. Sia X regolare, oppure T_2. Se ogni punto p di X ha un intorno compatto in X, allora X è localmente compatto. Quindi ogni compatto regolare o T_2 è localmente compatto.

Dim. Sia A un intorno compatto di p in X, e sia U un intorno aperto di p, in X, contenuto in A. Mostriamo che U contiene un intorno chiuso V di p, compatto, e chiuso in X. Se X è regolare, questo è ovvio: U contiene un intorno di V in X, chiuso in X, quindi chiuso in A, quindi compatto. Se X è T_2, A è compatto T_2, quindi è T_3, pertanto esiste $V \subseteq U$, V intorno di A, V chiuso in A, quindi compatto. È chiaro che, essendo A chiuso in X, V è chiuso in X, e V è intorno di p in X, poichè U è aperto in X //

Teorema 2. Ogni spazio localmente compatto X è completamente regolare. Quindi ogni localmente compatto T_0 è $T_{3\frac{1}{2}}$.

Dim. Sia $p \in X$, e sia F un chiuso di X tale che $p \notin F$. Esistono allora U, V intorni chiusi e compatti di p in X tali che $U \cap F = \emptyset$ e ~~$\mathrm{int}_X(V)$~~ $V \subseteq \mathrm{int}_X(U)$.

: Poichè U è compatto e regolare, esso è completamente regolare, quindi esiste $f \in C(U)$ tale che $f(p) = 1$ e $f[U \setminus \mathrm{int}_X(V)] = \{0\}$.
Si ponga ora $g(x) = f(x)$ per $x \in U$, $g(x) = 0$ per $x \in X \setminus U$.
Si ha che g estende f, e $g \in C(X)$ (si osservi che se $x \notin \mathrm{int}_X(U)$, esiste un intorno di x in cui g è nulla). Inoltre, $g(p) = 1$, $g[F] = \{0\}$//.

Uno sp. localmente compatto può non essere normale; vedremo in seguito che il cosiddetto <u>piano di Tychonoff</u> è localmente compatto, $T_{3\frac{1}{2}}$, ma non T_4.

Esempi. $\mathbb{R}$ usuale, ogni sp. discreto, sono localmente compatti. $GL(n, \mathbb{R})$, gruppo moltiplicativo delle matrici invertibili $n \times n$ su $\mathbb{R}$ è localmente compatto, se pensato come sottosp. aperto di $\mathbb{R}^{n^2}$.
Ogni sottosp. aperto o chiuso di $\mathbb{R}$ è localmente compatto. Ciò è conseguenza del:

Teorema 3. <u>Ogni sottospazio aperto o chiuso di uno sp. localmente compatto X è localmente compatto.</u>

Dim. Esercizio

Esercizio. La retta di Sorgenfrey, S, <u>non</u> è localmente compatta.

Teorema 4 - <u>Un sottosp. denso S e localmente compatto di uno spazio T_2, X, è aperto in X</u>

Dim. Dato $p \in S$, esso ha un intorno aperto V, V, tale che $cl_S(V)$ sia compatta (e chiusa in S). Ma $cl_S(V)$ è chiusa anche in X, poichè è compatta e X è T_2. Essendo $V = U \cap S$, con U aperto in X, e S denso in X, si ha $cl_X(V) = cl_X(U)$. Ma poichè $cl_S(V)$ è chiuso in X, si ha $cl_S(V) = cl_X(V)$, che è quindi un intorno di p <u>in X</u>, contenuto in S//.

Esercizi

1) Altre caratterizzazioni della compattezza.

Def. Sia X uno sp topologico, A un sottoinsieme di X. Un punto $p \in X$ si dice di accumulazione completa per A quando, per ogni intorno V di p, si ha $|V \cap A| = |A|$.

Premesso ciò, dato uno sp. topologico X, si provi che le seguenti proposizioni sono equivalenti:

i) X è compatto; ii) ogni sottoinsieme infinito di X ha almeno un punto di accumulazione completa in X; iii) Ogni insieme di chiusi non vuoti di X, bene ordinato dall'inclusione inversa, ha intersezione non vuota iv) Ogni catena di chiusi non vuoti ha intersezione non vuota.

NB: per dimostrare le ii) $\Rightarrow$ iii), e iii) $\Rightarrow$ iv), si può applicare il seguente lemma (di Hausdorff?) sugli insiemi ordinati, che ha anche un notevole interesse intrinseco.

Lemma. Sia $(L, \leq)$ un insieme totalmente ordinato. Esiste allora un sottoinsieme S di L, cofinale in L, che è bene ordinato dall'ordine indotto, ed è isomorfo ad un ordinale iniziale. Tale ordinale iniziale è la minima fra le cardinalità degli insiemi cofinali di L, (e si chiama tipo di cofinalità di L)

Dim. Sia M un sottoinsieme di L, cofinale in L, ed avente cardinalità minima fra quelle dei sottoinsiemi cofinali di L. Escluso il caso banale che M consti di un solo elemento (nel qual caso L ha massimo), M è certamente infinito. Sia ω_ξ il minimo ordinale di cardinalità $\xi = |M|$, e sia ψ un' arbitraria biiezione di $W(\omega_\xi)$ su M. Per induzione transfinita, costruiremo ora una biiezione ~~stre~~ crescente φ di $W(\omega_\xi)$ su ~~M~~ di un sottoinsieme cofinale di M. Scegliamo ad arbitrio $\varphi(0)$ in M, con la sola condizione $\varphi(0) > \psi(0)$. Si prenda poi $\varphi(1)$ in M tale che $\varphi(1) > \{\varphi(0), \psi(0), \psi(1)\}$ ecc. Il procedimento induttivo si formalizza nel modo seguente: si supponga che ~~per~~, dato $\alpha \in W(\omega_\xi)$, per ogni $\beta < \alpha$ sia stato definito un elemento $\varphi(\beta) \in M$ tale che $\varphi(\beta) > \{\varphi(\gamma) : \gamma < \beta\} \cup \cup \{\psi(\gamma) : \gamma \leq \beta\}$. Si tratta di definire $\varphi(\alpha)$ in modo tale che la precedente relazione sia valida con α in luogo di β. E questo è banale: per la minimalità di M, l'insieme $\{\varphi(\gamma) : \gamma < \alpha\} \cup \{\psi(\gamma) : \gamma \leq \alpha\}$, che ha cardinalità $\lneqq \xi$, non è cofinale in L, quindi neanche in M, pertanto esiste ~~φ~~ un elem. di M che lo maggiora, e uno di questi lo chiamiamo $\varphi(\alpha)$. Resta quindi definita un' applicazione $\varphi : W(\omega_\xi) \to M$, che è chiaramente crescente in senso stretto. Resta da far vedere che $\varphi[W(\omega_\xi)]$ è cofinale in M (e quindi in L). E questo è evidente, grazie alla biiezione ψ. È anche chiaro che, viceversa, un sottoinsieme bene ordinato di L, cofinale in L deve avere come ordinale proprio $W(\omega_\xi)$.

Osservazione - Non ogni cardinale può essere tipo di cofinalità di un insieme ordinato. Infatti, esistono ordinali iniziali (= = cardinali) il cui tipo di cofinalità è minore di loro stessi. Ad es. $\aleph_\omega$ ha tipo di cofinalità $\aleph_0$.

2) <u>Teorema di Alexander sulla prebase</u>. Sia $\mathcal{S}$ una prebase di aperti per lo spazio topologico X. Si provi che X è compatto se e solo se da ogni ricoprimento di X fatto con elementi di $\mathcal{S}$ si può estrarre un sottoricoprimento finito (Sugg. per la sufficienza, si consideri la prebase di chiusi associata, e si dimostri che la condizione implica la convergenza degli ultrafiltri su X, ricordando che questi sono primi)

3) Si provi il teorema di Tychonoff sul prodotto di sp. compatti, servendosi del teorema di Alexander

4) <u>Importante</u>. Sia $(X, \leq)$ un insieme totalmente ordinato. Si provi che X, munito della topologia dell'ordine, è compatto se e solo se $(X, \leq)$ è reticolarmente completo (Si può fare direttamente; oppure si può usare il teorema di Alexander, servendosi della sottobase naturale di "semirette" in X)

Poiché ogni sp. ordinato è sottosp. del suo completamento ordinale, si ha che ogni ~~sottospazio~~ sp. ordinato è $T_{3\frac{1}{2}}$. In realtà, ogni sp. ordinato è addirittura T_4: siano A, B chiusi disgiunti nello sp. ordinato X. Si esprima $X \setminus (A \cup B)$ come unione di intervalli aperti massimali a due a due disgiunti, e si determinino tramite questi aperti disgiunti contenenti A e B.

5) Sia $X = [0,1] \times [0,1]$ munito dell'ordine <u>lessicografico</u> (o alfabetico); cioè $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ significa o $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, o $x_1 < y_1$, o $x_1 = y_1$ e $x_2 < y_2$. Si provi che X con la topologia dell'ordine è compatto e connesso, soddisfa al primo assioma della numerabilità ma non al II,

e non è separabile.

6) Sia α un ordinale. Si provi che $W(\alpha)$ con la topologia dell'ordine è compatto se e solo se α non è ordinale limite.

7) La retta lunga. È questo il nome che si dà allo spazio ordinato L ottenuto dando l'ordine lessicografico a $W(\omega_1) \times \mathbb{R}_+$, dove $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ [Si pensi ad L come a $W(\omega_1)$, dove tra ogni ordinale e il successivo si è messa una copia della semiretta positiva dei reali; l'ordinale stesso è il "minimo" della semiretta, il successivo funge da massimo)

a) si provi che L è connesso; b) L non è compatto; ma il suo completamento ordinale si ottiene aggiungendovi un massimo (ω_1).
(c) (difficile) Per ogni $x_0 \in L$, $x_0 > \min L$, il sottospazio $\{x \in L : x < x_0\}$ è omeomorfo ad $\mathbb{R}_+$; d) In L c'è una famiglia di $\aleph_1$ aperti (non vuoti) a due a due disgiunti. Quindi $w(L) = \aleph_1$.

8) Ogni sottospazio compatto K di $\mathbb{Q}$ con la topologia usuale ha l'interno vuoto; e K deve avere punti isolati.

9) Importante Sia X spazio di Hausdorff e sia $\mathcal{K}$ una famiglia di sottospazi compatti e connessi di X, che sia filtrante decrescente rispetto all'inclusione. Allora $\bigcap \mathcal{K}$ è un sottospazio compatto e connesso di X

(NB Dire che $\mathcal{K}$ è filtrante decrescente significa ovviamente dire che dati $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, esiste $K_3 \in \mathcal{K}$ tale che $K_3 \subseteq K_1 \cap K_2$)

Svolgimento. È chiaro che $K_0 = \bigcap \mathcal{K}$ è compatto. Se qualche $K_i \in \mathcal{K}$ è vuoto, K_0 è vuoto e il teor. è provato.

Sia ora A un chiusaperto non vuoto di K_0, e $B = K_0 \setminus A$ sia non vuoto. Allora A e B, entrambi chiusi in K_0, sono compatti disgiunti di X, e sono quindi contenuti in aperti disgiunti U, V di X. Essendo $K_0 \subseteq U \cup V$, esiste una sottofamiglia finita $K_1, \dots, K_m$ di $\mathcal{K}$ tale che $K_1 \cap \dots \cap K_m \subseteq U \cup V$ (altrimenti, $\mathcal{K} \cup \{K \cap (X \setminus (U \cup V)) : K \in \mathcal{K}\}$ sarebbe una famiglia di chiusi compatti con intersezione vuota e con f.i.p.). Si prenda $K \in \mathcal{K}$, $K \subseteq K_1 \cap \dots \cap K_m$. Allora $K \cap U$, $K \cap V$ sono aperti complementari in K, entrambi non vuoti, e quindi K non è connesso, contro l'ipotesi.

10) Ricordiamo che la componente (connessa) di un punto x nello spazio topologico X è l'unione di tutti i sottospazi connessi di X contenenti x. La quasi-componente di x è invece l'intersezione di tutti i chiusaperti di x contenenti x.

(a) Si provi che la quasi-componente di x contiene sempre la componente (connessa) di x; ma esse possono non coincidere.

(b) Se X è localmente compatto e T_2, allora la quasi-componente e la componente di x coincidono.

(c) Ricordiamo che uno spazio si dice <u>totalmente sconnesso</u> quando la componente di ogni punto si riduce al punto stesso. Si provi che uno spazio localmente compatto T_2 totalmente sconnesso è 0-dimensionale (cioè, ha una base di chiusaperti).

Spazi metrici e pseudo-metrici.

Il concetto di spazio metrico e pseudo-metrico è supposto già noto ed è stato ampiamente usato in precedenza. Le definizioni sono qui ripetute per comodità.

Def. Sia X un insieme non vuoto. Una funzione non-negativa $d: X \times X \to \mathbb{R}$ si dice una pseudo-metrica su X se

i) $d(x,x) = 0 \quad , \forall x \in X$

ii) $d(x,y) = d(y,x) \quad , \forall x,y \in X$ (simmetria)

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad , \forall x,y,z \in X$ (diseguaglianza triangolare)

Se poi $d(x,y) = 0$ implica $x = y$, allora d si chiama metrica su X

La coppia (X, d) si chiama spazio pseudometrico (metrico se d è una metrica).

Come si sa, se (X,d) è uno spazio pseudo-metrico, la famiglia $S(x,r) = \{ y \in X : d(x,y) < r \}$ delle d-sfere aperte di centro x e raggio $r > 0$, costituisce, al variare di x in X e di r nell'insieme dei reali positivi, una base per una topologia τ_d su X, detta topologia generata dalla pseudo-metrica d su X. Vediamo qualche proprietà di questa topologia. Anzitutto è chiaro che (X, τ_d) soddisfa al I° assioma della numerabilità (per ogni $x \in X$, le sfere $S(x, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, sono una base per il filtro degli intorni di x in (X, τ_d)). Consideriamo ora un sottoinsieme A di X, $A \neq \emptyset$, e sia $d(\cdot, A)$ la funzione di X in $\mathbb{R}$ definita ponendo $d(x,A) = \inf\{ d(x,y) : y \in A \}$. Si verifica facilmente (esercizio) che per $x, y \in X$ si ha

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$$

. Questo implica subito che $d(\cdot, A)$ è continua su (X, τ_d).

È chiaro che lo zero-insieme di $d(\cdot, A)$ coincide con la chiusura di A in τ_d; quindi, se A è chiuso in τ_d, $Z(d(\cdot,A)) = A$. Quindi (X, τ_d) è completamente regolare, anzi perfettamente normale (ogni chiuso è uno zero insieme). Quindi:

<u>Ogni spazio pseudo-metrizzabile X è perfettamente normale e soddisfa al I assioma della numerabilità. Esso è T_2 se e solo se è metrizzabile</u>. (Si ricordi che uno sp. topologico è detto pseudo-metrizzabile quando la sua topologia coincide con la top. τ_d generata da una pseudo-metrica su X).

Differenti pseudo-metriche su X possono indurre la stessa topologia: in tal caso, le pseudo-metriche si dicono (topologicamente) <u>equivalenti</u>. Ad esempio, se d è una pseudometrica su X, le pseudo-metriche

$$d_1 = \frac{d}{1+d} \quad \text{definita da} \quad d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

$$d_2 = d \wedge 1 \quad \text{definita da} \quad d_2(x,y) = d(x,y) \wedge 1$$

sono equivalenti a d, come si verifica subito.

Esempi di spazi metrici e pseudo-metrici.

1) $\mathbb{R}$, con $d(x,y) = |x-y|$. Tale metrica è detta la <u>metrica usuale</u> di $\mathbb{R}$. La sua topologia è quella usuale

2) $\mathbb{R}$, con $\psi_{\text{arctang}}(x,y) = |\operatorname{arctang} x - \operatorname{arctang} y|$. La metrica ψ_{arctang} è topologicamente equivalente a quella usuale

3) Per ogni insieme $X \neq \emptyset$, la formula $d(x,y) = 1$ se $x \neq y$, $d(x,x) = 0$ definisce una metrica su X, la cui topologia è quella discreta. Quindi ogni spazio

discreto è metrizzabile.

4) (Importante in Analisi) Spazi vettoriali seminormati e normati.

Si denoti con V uno sp. vettoriale sul corpo reale o sul corpo complesso. Una seminorma p su V è una funzione p di V in $\mathbb{R}$, tale che

1) $p(x) \geq 0$, $\forall x \in V$; $p(0) = 0$ (positività)

2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in V$ (sub-additività)

3) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ (omogeneità positiva).

Se poi $p(x) = 0$ implica $x = 0$, p si dice norma su V.

Si prova facilmente che, se p è una seminorma [norma] su V, la formula $d(x,y) = p(x-y)$ definisce una pseudo-metrica [metrica] su V, e che con la topologia di questa pseudometrica, V è uno spazio vettoriale topologico, cioè le applicazioni $\sigma: V \times V \to V$, $\mu: K \times V \to V$ date da $\sigma(x,y) = x+y$, $\mu(\alpha, x) = \alpha x$ ($K = \mathbb{R}$, oppure $\mathbb{C}$), sono continue.

Esempi di seminorme: sia V lo sp. vettoriale delle funzioni reali integrabili secondo Riemann, definite su un intervallo $[a,b]$ di $\mathbb{R}$. La funzione $f \to \|f\|_1 = \int_a^b |f| dx$ è una seminorma su V (essa non è una norma; ad es. le funzioni caratteristiche dei sottoinsiemi che hanno misura di Peano-Jordan nulla hanno seminorma nulla, pur non essendo nulle).

Sia X un insieme, e sia $B(X)$ lo sp. vettoriale delle funzioni reali o complesse limitate. Per ogni $f \in B(X)$, la formula $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in X\}$ definisce una norma su $B(X)$. Se X è topologico, $C^*(X)$ è un sottospazio di $B(X)$, che si verifica essere chiuso.

Gli spazi pseudo-metrizzabili hanno un comportamento assai "regolare" rispetto alle funzioni cardinali quali peso, carattere di densità, "numero di Lindelöf" eccetera:

Teorema. <u>Sia (X, τ) uno spazio pseudo-metrizzabile.</u>
<u>Sono equivalenti le condizioni</u>

i) $\underline{w(X) \leq \aleph_0}$ (= X soddisfa al II° assioma della numerabilità)

ii) <u>X è separabile</u>

iii) <u>X è di Lindelöf.</u>

<u>Dim</u>. i) ⇒ ii), iii) Ciò è banalmente vero per ogni spazio top.
Si prenda ora una pseudo-metrica d su X tale che $\tau_d = \tau$;
ii) ⇒ i) Sia D un sottoinsieme numerabile e denso di X, e sia $\mathcal{B}$ la famiglia delle sfere aperte aventi centro in un punto di D e raggio razionale positivo. Chiaramente, $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$. Per verificare che $\mathcal{B}$ è una base di aperti per (X, τ) basta mostrare che per ogni $x \in X$ e $r > 0$ esiste $S(x_n, q) \in \mathcal{B}$ tale che $x \in S(x_n, q) \subseteq S(x, r)$. Infatti, $S(x, r/3) \cap D \neq \emptyset$, essendo $S(x, r/3)$ aperto e D denso; preso $x_n \in D \cap S(x, r/3)$, e $q \in \mathbb{Q}$, con $r/3 < q < \frac{2}{3} r$, si ha $x \in S(x_n, q) \subseteq S(x, r)$.
iii) ⇒ i) Per ogni numero naturale n, sia $\mathcal{C}_n$ il ricoprimento di X costituito dalle sfere aperte di raggio $1/n$, e sia $\mathcal{B}_n$ un suo sottoricoprimento numerabile. Si vede facilmente che $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ è una base per gli aperti di X. È chiaro che $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$ //.

Da questo teorema si hanno alcuni semplici corollari, che possono a volte interessare, come ad esempio il fatto che uno sp. metrizzabile separabile è ereditariamente separabile, cioè ogni suo sottospazio è separabile.

Esercizio. Si provi che uno spazio pseudometrico (X, d) è separabile se e solo se, $\forall\, r > 0$, ogni sottoinsieme A di X tale che, $\forall\, x, y \in A$ $x \neq y$ si abbia $d(x,y) \geq r$, ha al più cardinalità $\aleph_0$. Tali sottoinsiemi si dicono d-discreti.

Altro esercizio. Uno spazio pseudometrico compatto ha base numerabile (banale!).

Def. Sia A un sottoinsieme di uno sp. pseudometrico (X, d). Si chiama diametro di A il numero reale $d\{A\} = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$ se questo esiste finito; altrimenti, si pone $d\{A\} = +\infty$. È ovvio che $d\{A\} = d\{cl_X A\}$.

Chiaramente, il diametro di uno spazio, $d\{X\}$, è associato alla metrica, e non alla topologia τ_d: su ogni sp. metrizzabile, esistono metriche topologicam. equivalenti il cui diametro è un numero reale positivo arbitrario. Possono non esistere metriche topologicam. ammissibili di diametro $+\infty$: tale è ad esempio il caso se lo spazio metrizzabile è compatto.

Talvolta è comodo assumere $d\{\emptyset\} = 0$.

Poichè tutti gli spazi pseudo-metrizzabili soddisfano al I° assioma della numerabilità, la loro topologia è completamente descritta dalle successioni convergenti. È chiaro che una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad x_0 nello sp. pseudo-metrico (X, d) se e solo se $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_0) = 0$.

Ricordiamo che, per lo sp. metrico $(\mathbb{R}, d)$ dei reali (metrica usuale) si era data, in Analisi 1, una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di una successione: Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali converge se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $|x_n - x_m|$ $(= d(x_n, x_m))$ è $\leq \varepsilon$ per ogni $n, m \geq n_\varepsilon$.

Questo teorema è il teorema di Cauchy. Questo spiega la seguente

Definizione. Sia (X, d) uno sp. pseudometrico. Una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di X si dice di Cauchy (o fondamentale) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni coppia di indici $m, n \in \mathbb{N}$, con $m, n \geq n_\varepsilon$, si ha

$d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$.

Si noti che questo concetto è essenzialmente metrico: non è possibile parlarlo in uno spazio topologico arbitrario.

~~Definizione~~ Trivialmente, ogni successione convergente in uno spazio pseudometrico è di Cauchy. Il viceversa può essere o non essere vero; per i reali con la metrica usuale, si è visto che è vero (in Analisi I°).

Definizione. Uno spazio pseudometrico (X, d) si dice completo quando ogni successione di Cauchy per (X, d) converge in (X, τ_d).

Insistiamo sul fatto che ~~di~~ completezza si può parlare solo per spazio pseudometrico, non per lo spazio topologico ad esso associato: sullo spazio $\mathbb{R}$ dei reali, la (pseudo)metrica ψ_{arctang} induce la topologia usuale, eppure $(\mathbb{R}, \psi_{\text{arctang}})$ non è completo; si vede infatti facilmente che la successione $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}, \psi_{\text{arctang}})$, pur non avendo limite nello spazio topologico $\mathbb{R}$. Più avanti vedremo strutture più generali di uno spazio pseudometrico, per le quali ancora si può porre la nozione di completezza.

Vediamo ora come la completezza di uno spazio si collega ai filtri di uno spazio.

Def. Un filtro $\mathcal{F}$ ~~in~~ uno sp. metrico si dice di Cauchy quando contiene insiemi di diametro arbitrariamente piccolo; cioè, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $A \in \mathcal{F}$ tale che $d\{F\} < \varepsilon$.

È chiaro come si potrebbe porre il concetto di rete di Cauchy. Una rete $s: D \to X$, ((X, d) sp. pseudometrico) è di Cauchy quando per ogni $\varepsilon > 0$, $\exists\, \alpha_\varepsilon \in D$ tale che, $\forall\, \beta, \alpha \geq \alpha_\varepsilon$, si ha $d(s_\alpha, s_\beta) \leq \varepsilon$.

Proposizione. Un filtro di Cauchy converge verso ognuno dei suoi punti di chiusura (quindi, ogni successione (rete) di Cauchy, converge a ognuno dei suoi punti di chiusura).

Dim. Sia $p \in X$ di aderenza per il filtro $\mathcal{F}$ nello sp. pseudometrico (X, d). Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $A \in \mathcal{F}$ tale che $d\{A\} (= d\{cl_X A\}) \leq \varepsilon$. Poichè $p \in cl_X(A)$, si ha $A \subseteq cl_X \bar{A} \subseteq S(p, \varepsilon)$; in altre parole, il filtro $\mathcal{F}$ contiene tutte le ε-sfere aperte di centro p, e quindi converge a p. //

Teorema. Sia (X, d) uno sp. pseudometrico. Le condizioni che seguono sono equivalenti:

(i) (X, d) è completo

(ii) Per ogni successione decrescente $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ di sottoinsiemi chiusi non vuoti di (X, τ_d), tali che $\lim_{n\to\infty} d\{F_n\} = 0$, si ha $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. ("teorema di Cantor")

(iii) Ogni filtro di Cauchy converge

(iv) Ogni ultrafiltro di Cauchy converge.

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii) Si scelga, per ogni n, $x_n \in F_n$. La condizione $\lim_{n\to+\infty} d\{F_n\} = 0$, implica subito che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in X. Sia p un suo limite, esistente per l'ipotesi. Poichè p è anche limite, per ogni $n \in \mathbb{N}$, della successione $(x_n, x_{n+1}, \dots)$ che è fatta di punti di F_n, si ha $p \in F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, essendo gli F_n chiusi. Quindi, $p \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sia $\mathcal{F}$ un filtro di Cauchy. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $A_n \in \mathcal{F}$ tale che $d\{A_n\} < 1/n$. Sia $B_n = cl_X A_n$ e sia $F_n = \bigcap_{i=1}^{n} B_i$. Gli F_n sono chiusi e non vuoti, $F_n \supseteq F_{n+1}$, e $d\{F_n\} \leq d(B_n) = d(A_n) < 1/n$. Pertanto esiste $p \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Sia $A \in \mathcal{F}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $y_n \in A \cap F_n$; si ha quindi $d(p, A) \leq d(p, y_n) \leq 1/n$. Quindi $d(p, A) = 0$, i.e., $p \in cl_X A$ per ogni $A \in \mathcal{F}$. Quindi p è di chiusura per $\mathcal{F}$, e poichè $\mathcal{F}$ è di Cauchy, $\mathcal{F}$ converge a p.

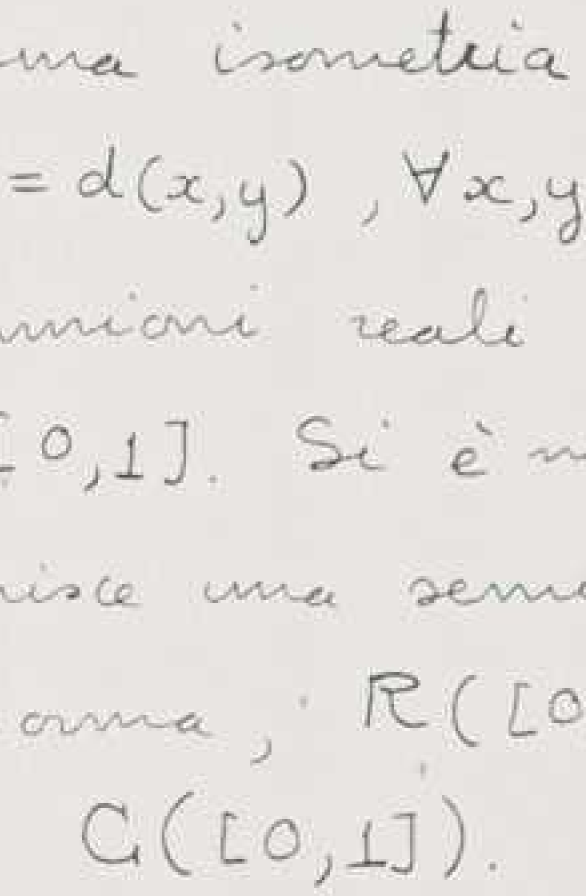
(iii) $\Rightarrow$ (iv) Ovvio. (iv) $\Rightarrow$ (i). Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy, e sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su X contenente gli insiemi $A_n = \{x_m : m \geq n\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poichè $d\{A_n\} \to 0$ per $n \to \infty$ (essendo la successione di Cauchy) $\mathcal{U}$ è ultrafiltro di Cauchy. Pertanto $\mathcal{U}$ converge a p, ed è immediato vedere che p è anche limite di $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ //

Anche se la convergenza nello spazio topologico associato allo sp. pseudo-metrico (X, d) può essere descritta dalle sole successioni, il teorema precedente non è inutile: esso ci dice che considerando il concetto di "filtro di Cauchy" non si trova niente di nuovo; e si sapeva già che ciò era vero per la pura e semplice convergenza, in uno spazio soddisfacente al I° assioma della numerabilità, non lo si sapeva per il concetto, squisitamente "metrico", di "successione" di Cauchy.

Esempi ed esercizi – 1) Uno spazio vettoriale normato V è detto *completo* se esso è completo nella metrica d data dalla norma: $d(f,g) = p(f-g)$. Uno spazio normato completo V è detto *sp. di Banach*. Si provi che $(B(X), \|\cdot\|)$ è spazio di Banach, e che se X è topologico, allora $C^*(X)$ è un sottospazio di Banach di $B(X)$ (cioè, esso pure è completo).
Si provi che uno spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$ è di Banach se e solo se ogni serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ di vettori di V tale che $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$, converge in V.

2) *Importante*. *Spazio metrico associato ad uno spazio pseudometrico*
Sia (X,d) uno sp. pseudometrico. Si introduca una relazione di equivalenza ρ in X ponendo $x\rho y$ quando $d(x,y)=0$ (le classi di equivalenza sono le chiusure dei punti in (X,τ_d)). Si introduca una funzione $\delta : (X/\rho)\times(X/\rho) \to \mathbb{R}$ ponendo $\delta(\{x\}^-, \{y\}^-) = d(x,y)$ (è ben definita: perché?). Allora δ è una metrica in X/ρ, e l'applicazione naturale π di X su X/ρ è una isometria di X su X/ρ (in altre parole, $\delta(\pi(x),\pi(y)) = d(x,y)$, $\forall x,y \in X$)

3) Sia $R([0,1])$ lo spazio delle funzioni reali (limitate e) integrabili secondo Riemann in $[0,1]$. Si è visto che la formula $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$ definisce una seminorma nello spazio $R([0,1])$. In questa seminorma, $R([0,1])$ *non* è completo, né lo è il suo sottospazio $C([0,1])$.
(È facile vedere che $C([0,1])$ non è completo: si prenda la successione $f_n \in C([0,1])$ definita imponendo a f_n di valere 0 tra 0 e $\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$ $(n\geq 2)$, 1 tra $\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$ e 1, e di essere lineare tra $\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{2}+1/n$.



Si vede facilmente che in $R([0,1])$ un limite per la successione data è la funzione caratteristica g dell'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$; ma non esiste alcuna funzione continua $f \in C([0,1])$ tale che $\| f - g \|_1 = 0$).

Facoltativo

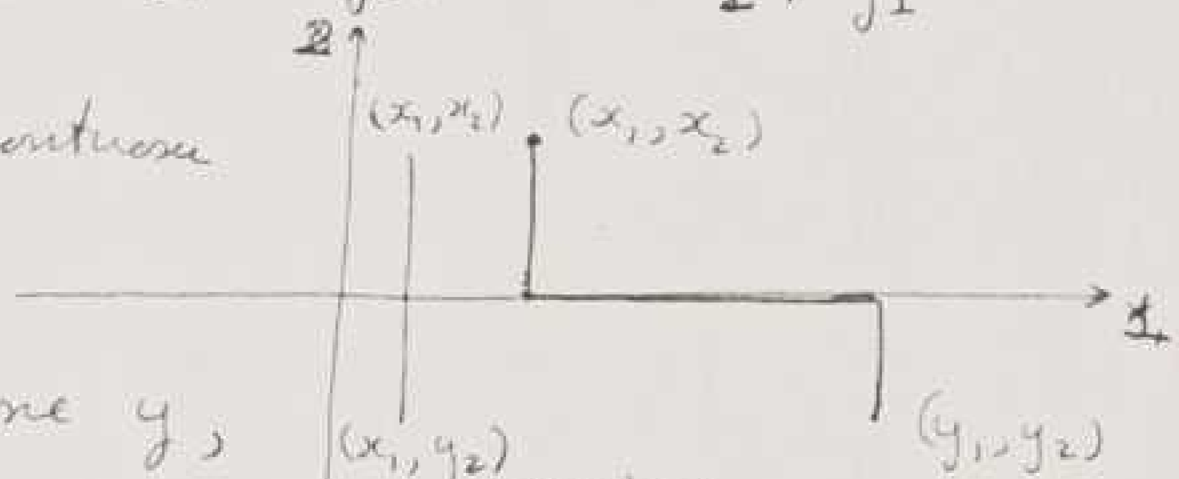
È assai più difficile vedere che $R([0,1])$ non è completo, con la seminorma $\| \cdot \|_1$. Ordiniamo in una successione $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tutti i razionali di $[0,1]$. Sia ρ un arbitrario numero reale, $0<\rho<1$. Sia I_k l'intervallo aperto di centro q_k e ampiezza $\rho/2^k$, e sia χ_k la funzione caratteristica, in $[0,1]$, di $E_k = [0,1] \cap (I_1 \cup \dots \cup I_k)$. Chiaramente, ogni χ_k è integrabile secondo Riemann; inoltre, per ogni $n, p \in \mathbb{N}$ si ha che $\chi_{n+p} - \chi_n$ è la funzione caratteristica, in $[0,1]$, di $[0,1] \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+p} I_i \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j \right)$, pertanto $\int_0^1 | \chi_{n+p}(t) - \chi_n(t) | \, dt \; (= \| \chi_{n+p} - \chi_n \|_1) \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \rho/2^k < \rho/2^n$ - Quindi la successione $(\chi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $R([0,1])$. Supponiamo ora che la successione abbia limite $f \in R([0,1])$. Quindi, per ogni $\varepsilon>0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\int_0^1 | f - \chi_n | \, dt \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq n_\varepsilon$. Ciò implica subito che, in ogni E_k, f differisce da 1 per al più un insieme di misura nulla (secondo Peano-Jordan), mentre in $E = [0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, deve essere quasi ovunque 0. Ragionando (in modo, per la verità, un po' astruso) sulle suddivisioni dell'intervallo $[0,1]$, si ha che f non può essere integrabile secondo Riemann. (Si noti che E è privo di interno)

Questo spiega perchè l'integrale di Riemann sia assai poco soddisfacente per l'analisi: le condizioni per il "passaggio al limite sotto il segno di integrale", sono, per l'integrale di Riemann, assai poco naturali.

4) Riccio con ξ aculei. Sia ξ un cardinale, finito o infinito, $\neq 0$.
Il riccio con ξ aculei, $J(\xi)$ è lo spazio metrico così definito: si prenda un insieme Λ, con $|\Lambda| = \xi$, si consideri l'insieme $[0,1] \times \Lambda$ e si identifichino in esso tutti i punti della forma $(0,\lambda)$, ponendoli $= 0$; $J(\xi)$ è questo insieme, con la metrica d così definita: $d(0,(x,\lambda)) = d((x,\lambda),0) = |x|$, $d((x,\lambda),(y,\lambda)) = |x-y|$, $d((x,\lambda),(y,\mu)) = |x|+|y|$ se $\lambda \neq \mu$.
Il sottoinsieme $\{0\} \cup \{(x,\lambda) : x \in]0,1]\}$ è il λ-aculeo del riccio; come sottospazio, è isometrico a $[0,1]$ usuale.
$J(\xi)$ è sempre completo; si provi che esso è separabile se e solo se $\xi \leq \aleph_0$ (l'insieme formato dalle "punte" degli aculei è sempre (d-)discreto)

5) Si consideri in $\mathbb{R}^2$ la seguente metrica δ.

$$\delta((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{se } x_1 = y_1 \\ |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2| & \text{se } x_1 \neq y_1 \end{cases}$$



(Si pensi a $\mathbb{R}^2$ come ad una regione montuosa attraversata da una valle (l'asse x) e solcata da valli laterali parallele all'asse y, separate fra loro da montagne invalicabili. Il cammino per andare da un punto a un altro della regione è quello di questa metrica)
Sulle rette parallele all'asse y e sull'asse x viene indotta la topologia usuale. Su quelle parallele all'asse x $\neq$ dall'asse x stesso la discreta.
Si mostri che $(\mathbb{R}^2, \delta)$ è completo. Esso non ha base numerabile: $w(\mathbb{R}^2) = \mathfrak{c}$.

6) Importante. Ogni prodotto numerabile $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ di spazi pseudometrizzabili $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è pseudometrizzabile (Si prenda per ogni n una pseudometrica d_n su X_n tale che $d_n\{X_n\} = 1$ e la cui top. sia quella di X_n. Si ponga $d((x_n),(y_n)) = \sum_n d_n(x_n,y_n)/2^n$).

7) Importante. Un sottospazio chiuso di uno spazio pseudo-metrico completo è completo. Un sottospazio completo di uno spazio metrico è chiuso.

8) Si deduca dal precedente esercizio questo fatto: se (X,τ) è uno spazio di Tychonoff a base numerabile il quale è completo in ogni sua metrica ammissibile, allora (X,τ) è compatto.

9) Uno spazio metrico completo X, privo di punti isolati, ha almeno la potenza del continuo (sugg: si costruisca una iniezione di $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ in X, ragionando come nel teorema di Čech-Pospíšil, prendendo ogni volta insiemi di diametro $= 1/3^n$. Il ragionamento usato nel teorema suddetto può essere qui radicalmente semplificato dall'uso delle d-sfere).

10) Lemma delle contrazioni. Una contrazione in uno spazio metrico (X,d) è un'applicazione $f : X \to X$ tale che esiste κ, $0 \le \kappa < 1$, tale che $d(f(x),f(y)) \le \kappa d(x,y)$ per ogni $x,y \in X$. Si provi:

In uno spazio metrico completo (X,d) una contrazione ha uno e un solo punto unito.

Svolgimento. L'unicità è ovvia: se risulta $f(x)=x$, $f(y)=y$, si ha $d(x,y) = d(f(x),f(y)) \le \kappa d(x,y)$ da cui $(1-\kappa)\, d(x,y) \le 0$ cioè $d(x,y)=0$, essendo $1-\kappa>0$. Quanto all'esistenza, sia $x_0 \in X$ e si ponga $x_1 = f(x_0)$, e induttivamente $x_{n+1} = f(x_n)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Risulta $d(x_1,x_2) = d(f(x_0),f(x_1)) \le \kappa\, d(x_0,f(x_0))$; induttivamente, si prova che $d(x_n,x_{n+1}) \le \kappa^n \delta$, avendo posto $\delta = d(x_0,f(x_0))$. Da cui $d(x_n,x_{n+p}) \le \sum_{i=0}^{p-1} d(x_{n+i},x_{n+i+1}) \le \sum_{i=0}^{p-1} \kappa^{n+i}\delta \le \frac{\kappa^n}{1-\kappa}\delta$. Pertanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy e converge a $p \in X$.

(ogni contrazione è chiaram. continua)

Si ha poi $f(p) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = p$.

Questo lemma è di grande importanza in Analisi. Esso permette di dimostrare facilmente i teoremi di esistenza e unicità per le soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali soddisfacenti alle condizioni di Cauchy - Lipschitz, e anche i teoremi sulle funzioni implicite (~~S~~tile "teorema del Dini", ecc.)

<u>Teorema di Baire</u>. <u>Sia</u> (X, d) <u>uno spazio pseudo-metrico completo</u>. <u>Se</u> $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>è una successione numerabile di insiemi aperti e densi di</u> X, <u>allora</u> $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ <u>è densa in</u> X.

<u>Dim</u>. Sia V un aperto non vuoto di X; si tratta di mostrare che $V \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \neq \emptyset$. Infatti, $V \cap A_1$ è un aperto non vuoto (poiché A_1 è denso in X); sia B_1 un aperto $\neq\emptyset$ tale che $\overline{B}_1 \subseteq V \cap A_1$, e $d\{B_1\} \leq 1$; ora $B_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, ed è aperto, quindi contiene B_2 aperto non vuoto, tale che $\overline{B}_2 \subseteq B_1 \cap A_2$, e $d\{B_2\} \leq 1/2$ - Così proseguendo, per induzione, si ottiene una successione B_n di sottoinsiemi aperti di X, tali che $d\{B_n\} \leq 1/n$ e $\overline{B}_{n+1} \subseteq B_n \cap A_{n+1}$. Quindi $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n$ non è vuota, essendo (X, d) completo - Chiaramente, tale intersezione è contenuta in $V \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (V \cap A_n)$ e $\overline{B}_n \subseteq V \cap A_n$.

Vi è una apparente incongruenza nel teorema precedente. Da un fatto non topologico (la completezza di (X, d)) discende un fatto topologico (che una intersezione di aperti densi è densa). In realtà non c'è contraddizione. Uno spazio topologico X si dice <u>(pseudo) metrizzabile in modo completo</u> quando esiste una pseudometrica d sullo spazio, la cui topologia è quella dello spazio, e tale che lo spazio (X, d) sia completo.

Detto ciò, il teorema di Baire si può enunciare dicendo che in uno spazio topologico pseudo-metrizzabile in modo completo, ogni intersezione numerabile di aperti densi è denso.
La condizione espressa dal teorema di Baire è assai importante, tanto che essa ~~[illegible]~~ è stata assunta come definizione:

Def. Uno sp. topologico si dice di Baire se ogni intersezione numerabile di aperti densi è densa nello spazio.

Esercizio. Ogni spazio localmente compatto è spazio di Baire. (Si ragioni come sopra; il fatto che $\bigcap \overline{B}_n \neq \emptyset$ sarà ora assicurato dalla compattezza dei B_n)

Un ~~sotto~~insieme E di uno spazio topologico X si dice ovunque non denso in X se la sua chiusura ha l'interno vuoto, cioè $\mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(E)) = \emptyset$. In altre parole, E è ovunque non denso se $X \setminus \mathrm{cl}_X(E)$ è un aperto denso di X.
Un insieme E è detto di I^a categoria (di Baire) o insieme magro in uno sp. topologico X se E è unione numerabile di insiemi ovunque non densi. Quindi: in uno sp. di Baire, se E è magro, $\mathrm{int}_X(E) = \emptyset$.

Esempi - esercizi _ 11) Lo spazio $\mathbb{Q}$ dei razionali usuali non è metrizzabile in modo completo. Più generalmente, uno spazio numerabile, privo di punti isolati non è metrizzabile in modo completo (ciò discende, oltre che dal teor. di Baire, anche dall'esercizio 9) delle pag precedenti)

12) $\mathbb{Q}$ non è un G_δ in $\mathbb{R}$ (cioè, $\mathbb{Q}$ non è intersezione numerabile di aperti di $\mathbb{R}$)

13) Consideriamo lo spazio di Banach $C([0,1])$, dove la norma è la sup norm, $\|f\| = \max\{|f(t)| : t \in [0,1]\}$. Le funzioni derivabili, anche in un solo punto, sono di prima categoria in $C([0,1])$, cioè, le funzioni continue mai derivabili sono intersezione numerabile di aperti densi in $C([0,1])$. Poniamo $I = [0,1]$. Per $f \in C(I)$, $x \in I$, h reale $\neq 0$ tale che $x+h \in I$, si ponga $R(f,x,h) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Sia $E_n = \{ f \in C(I) : \forall x \in I\,,\ \exists\, h, \kappa$ con $\frac{1}{2n} \leq |h|, |\kappa| \leq 1/n$ tali che $x+h, x+\kappa \in I$ e $|R(f,x,h) - R(f,x,\kappa)| > 1 \}$.

L'insieme E_n è aperto e denso in $C(I)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(a) E_n è denso: Sia A un aperto di $C(I)$. Per il teorema di Stone-Weierstrass, esiste una funzione polinomiale $p \in A$. Se $\eta \in \mathbb{R}_{++}$ è sufficientemente piccolo, la funzione $x \mapsto p(x) + \eta \sin(mx)$ appartiene ad A, qualunque sia $m \in \mathbb{N}$. Verifichiamo che, se m è grande, allora la funzione suddetta appartiene ad E_n.

Si ha chiaramente $|R(p,x,h)| \leq 2n\|p\|$, se $\frac{1}{2n} \leq |h|$ quindi anche $|R(p,x,h) - R(p,x,\kappa)| \leq 4n\|p\|$ se $|h|,|\kappa| \geq \frac{1}{2n}$. Se ora m è grande abbastanza, si ha che esiste $u \in \mathbb{N}$ tali che $\frac{1}{2n} \leq \frac{2u\pi}{m} \leq 1/n$, e posto $\kappa = \frac{2u\pi}{m}$, si ha allora $R(\eta \sin(mx), x, \kappa) = 0$. Si può poi prendere h, $\frac{1}{2n} \leq |h| \leq \frac{1}{n}$, tale che $|R(\eta\sin(mx), x, h)|$ risulti grande quanto si vuole, purché m sia grande abbastanza.

(b) E_n è aperto: ciò si vede con facili calcoli.

Si ha quindi che $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ è denso in $C(I)$ (per la sup norm), ed è chiaro che tutti gli elementi di E sono funzioni di $C(I)$ prive di derivata ad ogni punto (non sono però tutte le funzioni continue mai derivabili; solo quelle tali che la differenza tra due dei 4 "numeri derivati" è ≥ 1).

14) Sia $C^n([0,1])$ l'insieme delle funzioni di $[0,1]$ continue con le loro derivate fino alla n-esima (n intero ≥ 0), munito della norma $\|f\| = \sum_{i=0}^{n} \max\{|f^{(i)}(t)| : 0 \leq t \leq 1\}$.
Si provi che $C^n([0,1])$ è spazio di Banach rispetto a questa norma. L'applicazione $D^n : C^n([0,1]) \to C([0,1])$ che associa ad ogni $f \in C^n([0,1])$ la sua derivata n-esima, è continua? (su $C([0,1])$ c'è ovviam. la sup norm)

15) Sia $C^\infty([0,1])$ lo spazio delle funzioni indefinitamente derivabili, con la norma ivi indotta dalla sup norm. Allora l'operazione di derivazione $D : C^\infty([0,1]) \to C^\infty([0,1])$ che associa ad ogni funzione la sua derivata, non è continua; e $C^\infty([0,1])$ non è completo.

Spazi uniformi

Come si è visto, dato uno spazio topologico X, fissato in esso un punto x_0, il filtro degli intorni di x_0 in X permette di dare un significato preciso alla frase "x è abbastanza vicino a x_0". Il concetto di spazio pseudo-metrico permetteva anche di parlare di "coppie di punti sufficientemente vicini" in senso globale, e non più locale. Il concetto di spazio pseudometrico è tuttavia troppo restrittivo per molte applicazioni: molti spazi di importanza "pratica" (e.g., spazi di funzioni con la topologia ~~[illegible]~~ debole, ecc.) non sono metrizzabili.
La difficoltà si supera introducendo gli spazi uniformi.
Come il filtro degli intorni di un punto x_0 ~~di~~ uno sp. topologico X ~~[illegible]~~ esprime la "vicinanza a ~~X~~ x_0", così una uniformità sarà un filtro di sottoinsiemi di ~~[illegible]~~ X×X, che esprimerà la "vicinanza" globale di coppie di punti di X.

Definizione. Sia X un insieme. Una uniformità $\mathcal{U}$ su X è un filtro di sottoinsiemi di X×X tali che

1) Ogni $U \in \mathcal{U}$ contiene la diagonale $\Delta(X \times X)$
2) Per ogni $U \in \mathcal{U}$, $U^{-1} \in \mathcal{U}$
3) Per ogni $U \in \mathcal{U}$, esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $V \circ V \subseteq U$.

Spieghiamo il significato dei simboli che intervengono nella definizione: $\Delta(X \times X) = \{(x,x) : x \in X\}$. Per ogni $U \subseteq X \times X$, $U^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in U\}$; U^{-1} si dice anche simmetrico di U.

Per $U, V \subseteq X \times X$, $U \circ V = \{(x,z) \in X \times X : \exists\, y \in X$ per cui $(x,y) \in V$ e $(y,z) \in U\}$.

Si noti che $(U \circ V)^{-1} = V^{-1} \circ U^{-1}$ e che $(V^{-1})^{-1} = V$, sicché $(V \cap V^{-1})^{-1} = V^{-1} \cap (V^{-1})^{-1} = V^{-1} \cap V = V \cap V^{-1}$.

Si impone qualche commento alla definizione precedente. Si pensi ad uno spazio pseudometrico (X, d) e per ogni $r > 0$ si ponga $V_{d,r} = \{(x,y) : d(x,y) < r\}$. I $V_{d,r}$, al variare di r in $\mathbb{R}_{++}$, costituiscono una base per un filtro di sottoinsiemi di $X \times X$, il quale soddisfa alle ipotesi espresse dalla precedente definizione. Tale filtro è quindi una uniformità su X, detta <u>uniformità generata dalla pseudometrica d</u>.

Ragionando su ~~f~~ tale esempio, è facile convincersi del fatto che la 1) esprime l'analogo del fatto che $d(x,x) = 0$ per ogni $x \in X$, che la 2) esprime la simmetria di una pseudo-metrica ($d(x,y) = d(y,x)$) e la 3) dice, grosso modo, che per ogni r-sfera c'è una $r/2$-sfera; è cioè una forma di disuguaglianza triangolare.

Definizione. <u>La coppia ordinata $(X, \mathcal{U})$ costituita da un insieme X e da una uniformità $\mathcal{U}$ su X si chiama spazio uniforme</u>

Ad uno spazio uniforme $(X, \mathcal{U})$ si può associare una topologia ~~uniforme~~ $\tau_{\mathcal{U}}$ su X, detta topologia uniforme o topologia associata alla struttura uniforme, nel modo seguente. Il sottoinsieme A di X è detto aperto se per ogni $x \in A$ esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $U[x] \subseteq A$ (NB: per $A \subseteq X$ e $U \in \mathcal{U}$, si pone $U[A] = \{y \in X : \exists\, x \in A$ tale che $(x,y) \in U\}$).

È banale verificare che i sottoinsiemi A di X così individuati sono effettivamente una topologia $\tau_{\mathcal{U}}$ su X (che una unione di elementi di τ_U sia ancora elemento di τ_U è banale; se poi $A, B \in \tau_U$, dato $x \in A \cap B$, $\exists\, U, V \in \mathcal{U}$ tali che $U[x] \subseteq A$, $V[x] \subseteq B$, allora $(U \cap V)[x] \subseteq A \cap B$, cioè, $A \cap B \in \tau_U$.)

Si noti che, $\forall x \in X, \forall U \in \mathcal{U}$, $U[x]$ è intorno di x in (X, τ_U): infatti, si prenda $V \in \mathcal{U}$ tale che $V \circ V \subseteq U$, e si consideri $\bigcup \{ W \circ V[x] : W \in \mathcal{U}, W \subseteq V \}$. È immediato constatare che questo è un aperto di τ_U contenente x e contenuto in $U[x]$. È allora evidente che, $\forall x \in X$, la famiglia $\{ U[x] : U \in \mathcal{U} \}$ è una base per il filtro degli intorni di x in (X, τ_U).

Una <u>base di filtro</u> $\mathcal{B}$ in $X \times X$, tale che il filtro generato sia una uniformità $\mathcal{U}$ su X, è detta <u>base per l'uniformità $\mathcal{U}$</u>. ~~Una base di filtro~~ $\mathcal{B}$ base di filtro su $X \times X$ è base per una uniformità su X se e solo se gli elementi di $\mathcal{B}$ verificano:

1) $\forall\, B \in \mathcal{B}$, $B \supseteq \Delta(X \times X)$

2) $\forall\, B \in \mathcal{B}$ $\exists\, G \in \mathcal{B}$ tale che $B^{-1} \supseteq G$

3) $\forall\, B \in \mathcal{B}$ $\exists\, G \in \mathcal{B}$ tale che $G \circ G \subseteq B$.

Una <u>prebase</u> per una uniformità su X è una famiglia di sottoinsiemi di $X \times X$ che genera ~~una base di filtro~~ un filtro che è una uniformità su X. Se $\mathcal{S}$ è prebase per una uniformità su X, allora le intersezioni finite degli elementi di $\mathcal{S}$ sono una base

Esempi di uniformità.

1) X insieme, $\mathcal{U} = \{ X \times X \}$ tale uniformità è quella banale e la sua topologia è chiaramente quella banale.

2) X insieme, $\mathcal{U}$ uniformità avente per base $\{ \Delta(X \times X) \}$. Tale uniformità è detta discreta; e discreta è la topologia uniforme ad essa associata.

3) Se (X, d) è spazio pseudo-metrico, come si è visto, la famiglia $\{V_{d,r} : r > 0\}$ costituisce una base per una uniformità su X, detta uniformità generata dalla pseudometrica d. La topologia uniforme e la topologia della pseudometrica coincidono: basta osservare che $V_{d,r}[x] = S(x, r)$ per ogni $x \in X$ e $r > 0$. L'uniformità associata alla metrica usuale di $\mathbb{R}$ è detta uniformità usuale di $\mathbb{R}$.

4) Più generalmente, sia X un insieme, $\mathcal{D}$ una famiglia di pseudo-metriche su X. Consideriamo la famiglia $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ di sottoinsiemi di $X \times X$ data da $\{V_{d,r} : d \in \mathcal{D},\ r \in \mathbb{R}_{++}\}$. Verifichiamo che tale famiglia è una prebase per una uniformità $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ su X, detta uniformità generata dalla famiglia di pseudo-metriche $\mathcal{D}$. Per questo occorre mostrare che le intersezioni finite $V_{d_1,r_1} \cap \ldots \cap V_{d_n,r_n}$ di elementi di $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ possono essere assunti come base per una uniformità su X. Osserviamo che $V_{d_1,r_1} \cap \ldots \cap V_{d_n,r_n} \supseteq V_{d,r}$ dove $d = d_1 \vee \ldots \vee d_n$ e $r = r_1 \wedge \ldots \wedge r_n$ $(= \min\{r_1, \ldots, r_n\})$; inoltre, $V_{d,r} = V_{d_1,r} \cap \ldots \cap V_{d_n,r}$ che è un'intersezione finita di elementi di $\mathcal{S}$. Ne consegue che le intersezioni finite di elem. di $\mathcal{S}$ sono tutte della forma $V_{d,r}$, con $d = d_1 \vee \ldots \vee d_n$, e $d_1, \ldots, d_n \in \mathcal{D}$. È chiaro che i $V_{d,r}$ sono una base di uniformità: essi sono tutti simmetrici, e contengono $\Delta(X \times X)$, inoltre, $V_{d,r/2} \circ V_{d,r/2} \subseteq V_{d,r}$.
La topologia dell'uniformità $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ ha quindi per prebase tutte le sfere $S_d(x, r) = V_{d,r}[x]$, $d \in \mathcal{D}$, $r \in \mathbb{R}_{++}$, cioè essa è l'estremo superiore delle topologie τ_d, $d \in \mathcal{D}$.
Questo esempio è di grandissima importanza. Infatti, vedremo ora che tutte le uniformità su di uno spazio X possono

essere così generate. Sia infatti $(X, \mathcal{U})$ uno spazio uniforme. Indichiamo con $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ la famiglia di tutte le pseudometriche d su X tali che, per ogni $r > 0$, $V_{d,r} (= \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) < r\})$ appartiene a $\mathcal{U}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ è la famiglia delle pseudometriche uniformi di $(X, \mathcal{U})$. Ora, $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ genera l'uniformità $\mathcal{U}$, nel senso precisato alla pagina precedente; cioè, ogni $V \in \mathcal{U}$ contiene almeno un $V_{d,r}$, per $d \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$, e $r > 0$. Ciò è immediata conseguenza del seguente:

Lemma di metrizzazione. Sia X un insieme non vuoto, e sia $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione di sottoinsiemi di $X \times X$ tali che:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \supseteq \Delta(X \times X)$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_n^{-1}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subseteq U_n$

Allora esiste una pseudometrica d su X tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $U_n \subseteq \{(x,y) : d(x,y) \leq 2^{-n}\} \subseteq U_{n-1}$ (avendo posto $U_0 = X \times X$).

Dim (facoltativa) Definiamo una funzione $f : X \times X \to \mathbb{R}_+$ ponendo $f(x,y) = 0$ se $(x,y) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ e $f(x,y) = 2^{-n}$ se $(x,y) \in U_n \setminus U_{n+1}$. Per ogni coppia di punti $x, y \in X$ si ponga ora $d(x,y) = \inf \{ \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i, x_{i+1}) :$ dove $x_0 = x$, $x_m = y$, $x_i \in X$, e m variabile in $\mathbb{N}\}$. Cioè, $d(x,y)$ è l'estremo inferiore delle somme indicate, preso su tutte le "catene" finite di punti di X che "congiungono" x con y. È immediato verificare che d è una pseudometrica su X: (a) implica che $d(x,x) = 0$, (b) implica $f(x,y) = f(y,x)$ $\forall x, y \in X$, e quindi $d(x,y) = d(y,x)$; Quanto alla disuguaglianza triangolare, basta osservare che "unendo" una catena che "congiunge" x con y ad una che congiunge y con z, si ottiene una catena che congiunge x con z, e che le "catene" così ottenute sono un sottoinsieme di tutte le catene che congiungono x a z, prendendo gli estremi inferiori, si avrà quindi $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Trivialmente, si ha $d(x,y) \leq f(x,y)$, per ogni $(x,y) \in X \times X$, da ciò discende che $U_n \subseteq \{(x,y) : d(x,y) \leq 2^{-n}\}$: infatti, se $(x,y) \in U_n$, si ha $f(x,y) \leq 2^{-n}$.

L'unica parte non banale della dimostrazione è quindi la prova del fatto che se $d(x,y) \leq 2^{-n}$, allora $(x,y) \in U_{n-1}$. Osserviamo che $(x,y) \in U_{n-1}$ se e solo se $f(x,y) \leq 2^{-n+1}$, in base alla definizione di f. Pertanto la dimostrazione sarà conclusa ove si dimostri che $f(x,y) \leq 2\, d(x,y)$, $\forall (x,y) \in X \times X$. Cioè, occorre provare che $f(x,y) \leq 2 \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i, x_{i+1})$ qualunque sia $m \in \mathbb{N}$ e $x_i \in X$, con $x_0 = x$, $x_m = y$. La cosa è triviale se $m = 2$. Ragioniamo per induzione, e supponiamo che la formula precedente sia valida per ogni intero positivo ≥ 2 e $< m$.

Poniamo $a = \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i, x_{i+1})$. Se $a = 0$, allora chiaramente anche $f(x,y) = 0$. Anche, si può assumere $a < 1/2$, poichè $f(x,y)$ al più vale 1. Si ha o $f(x_0, x_1) \leq a/2$, o $f(x_{m-1}, x_m) \leq a/2$; per la simmetria, si può supporre che valga la prima fra queste, cioè $f(x_0, x_1) \leq a/2$. Sia dunque k il massimo intero per cui $\sum_{i=0}^{k-1} f(x_i, x_{i+1}) \leq a/2$. Si ha allora $\sum_{i=0}^{k} f(x_i, x_{i+1}) > a/2$, il che implica che la somma dei restanti termini, $\sum_{i=k+1}^{m-1} f(x_i, x_{i+1})$, è $< a/2$. Per l'ipotesi induttiva si ha quindi $f(x_0, x_k) \leq$ $\leq 2 \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i, x_{i+1}) \leq 2\, a/2 = a$, e anche $f(x_{k+1}, x_m) \leq a$. Poichè gli $f(x_i, x_{i+1})$ sono tutti ≥ 0, è chiaro che si ha anche $f(x_k, x_{k+1}) \leq a$

Se ora ν è il minimo intero non-negativo tale che $2^{-\nu} \leq a$, si ha, essendo $f(x_0, x_k)$, $f(x_k, x_{k+1})$, $f(x_{k+1}, x_m) \leq a$, che (x_0, x_k), (x_k, x_{k+1}), $(x_{k+1}, x_m) \in U_\nu$. Poichè $a < 1/2$, si ha che $\nu \geq 1$; essendo $(x_0, x_m) \in U_\nu \circ U_\nu \circ U_\nu \subseteq U_{\nu-1}$, si ha $f(x_0, x_m)\ (= f(x,y)) \leq 2^{-(\nu-1)} = 2^{-\nu} 2 \leq a2$, e il teorema è dimostrato //

Se ora si prende un arbitrario elemento U di una uniformità $\mathcal{U}$ su X, si ponga $U_0 = X \times X$, $U_1 = U \cap U^{-1}$; esiste U_2, che possiamo supporre simmetrico, appartenente a $\mathcal{U}$, tale che $U_2 \circ U_2 \circ U_2 \subseteq U_1$; analogamente si prende U_3 simmetrico e appartenente ad $\mathcal{U}$, tale che $U_3 \circ U_3 \circ U_3 \subseteq U_2$; procedendo per induzione, si ottiene una successione $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ di elementi di $\mathcal{U}$, soddisfacente alle ipotesi del precedente lemma di metrizzazione; e si ha quindi una pseudometrica $d \in \mathcal{P}_\mathcal{U}$, tale che $V_{d,1} \subseteq U$.

Il lemma di metrizzazione è di importanza fondamentale nella teoria degli spazi uniformi: esso è paragonabile, sia come importanza che come conseguenze, al lemma di Urysohn nella teoria degli spazi topologici. Entrambi i lemmi infatti ci dicono che su spazi soddisfacenti a proprietà puramente "insiemistiche" v'è una grande abbondanza di funzioni continue reali:

Teorema - <u>Sia $(X, \mathcal{U})$ uno spazio uniforme. Lo spazio X con la topologia uniforme $\tau_\mathcal{U}$ è completamente regolare</u>

Dim. Infatti la topologia di X ha per base tutte le sfere $S_d(x,r)$, $d \in \mathcal{P}_\mathcal{U}$, $x \in X$, $r \in \mathbb{R}_{++}$; e queste sono tutte cozero-insiemi di $(X, \tau_\mathcal{U})$ ($S_d(x,r)$ è il cozero insieme della funzione $d(\cdot, A_{x,r})$, dove $A_{x,r} = \{y \in X : d(x,y) \geq r\}$). Poichè

$d(\cdot, A_{x,\varepsilon})$ è continua nella top τ_d indotta da d su X, essa è a più forte ragione continua nella τ_u, che è più fine di τ_d)//

Per la topologia uniforme τ_u si ha la seguente formula per la chiusura $cl_{(X,\tau_u)} A = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V[A] = \{ y \in X : d(y, A) = 0, \forall d \in P_u \}$, qualunque sia il sottoinsieme A di X. (La dimostrazione è lasciata come esercizio)

Poichè (X, τ_u) è completamente regolare, esso sarà T_2 se e solo se è T_1 (e se e solo se è $T_{3 1/2}$). Poichè per ogni $x \in X$ si ha $cl_{(X,\tau_u)}(\{x\}) = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V[x]$, si ha il:

Teorema - (X, τ_u) è spazio di Hausdorff se e solo se $\bigcap \mathcal{U} = \bigcap \{V : V \in \mathcal{U}\} = \Delta(X \times X)$. Cioè, (X, τ_u) è spazio di Hausdorff se e solo se per ogni coppia di punti $(x, y) \in X$ esiste $d \in P_u$ tale che $d(x, y) \neq 0$.

Possiamo ovviamente porre su $X \times X$ la topologia prodotto della topologia uniforme τ_u. Le relazioni tra la topologia prodotto e gli elementi dell'uniformità $\mathcal{U}$ sono chiarite dalla seguente

Proposizione. Ogni elemento V dell'uniformità $\mathcal{U}$ è intorno della diagonale $\Delta(X \times X)$ in $(X \times X, \tau_u \times \tau_u)$; e $\mathcal{U}$ ha una base formata da intorni chiusi e simmetrici della diagonale.

Dim. Ogni V contiene qualche $V_{d,1}$, $d \in P_u$. E poichè d è continua come applicazione di $X \times X$ munito della topologia prodotto della τ_u, la proposizione è dimostrata//.

Vediamo ora che, inversamente a quanto visto nelle pagine precedenti, la topologia di uno spazio completamente regolare è a sua volta indotta da qualche struttura uniforme su X.

Precisamente, dimostriamo la seguente proposizione:

Proposizione. Sia (X, τ) uno spazio topologico, e sia F una famiglia di funzioni reali (continue) su X la cui topologia debole sia la τ, cioè $\tau = \omega(F)$. Sia $\mathcal{U}_F$ la struttura uniforme su X generata dalla famiglia di pseudometriche $(\psi_f : f \in F)$, dove $\psi_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$ per ogni $x, y \in X$. Allora la topologia dell'uniformità $\mathcal{U}_F$ coincide con la τ.

Dim. Le ψ_f-sfere aperte sono una prebase per la topologia di $\mathcal{U}_F$. Poichè le $f \in F$ sono tutte τ-continue, è chiaro che queste saranno aperte nella topologia τ (se f è τ-continua, $\{y \in X : |f(x) - f(y)| < \varepsilon\}$ è chiaramente un aperto di τ, $\forall x \in X$).
Resta da far vedere che, se A è aperto in τ, e $p \in A$, esiste una famiglia finita di ψ_f-sfere che contengono p e la cui intersezione è contenuta in A. Poichè $\tau = \omega(F)$, per il teorema 2.1, pag 57, esistono $f_1, \dots, f_n \in F$ tali che l'applicazione $e_{f_1 \dots f_n} : X \to \mathbb{R}^n$ definita ponendo $e_{f_1, \dots, f_n}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ separa il punto p e il chiuso $X \setminus A$. Cioè, $(f_1(p), \dots, f_n(p))$ ha distanza positiva r (in una metrica che dia la topologia di $\mathbb{R}^n$, ad esempio $d((\xi_1, \dots, \xi_n); (\eta_1, \dots, \eta_n)) = \max_{i=1,\dots,n}\{|\xi_i - \eta_i|\}$) da $e_{f_1, \dots, f_n}[X \setminus A]$. Ciò implica che, posto $\delta = \psi_{f_1} \vee \dots \vee \psi_{f_n}$, la δ-sfera di centro p e raggio r è contenuta in A, essendo, per ogni $x \in A$, e $i = 1, \dots, n$, $|f_i(x) - f_i(p)| < r$ //

Per definizione, uno spazio completamente regolare ha la topologia debole del suo anello di funzioni continue. Si sa inoltre che esso ha anche la topologia debole del suo anello di funzioni continue limitate.

Se X' è completamente regolare, l'uniformità $\mathcal{C}(X)$ generata dalle pseudometriche $\{\psi_f : f \in C(X)\}$, e l'uniformità $\mathcal{C}^*(X)$ generata dalle $\{\psi_f : f \in C^*(X)\}$ sono dunque entrambe uniformità che inducono la topologia di X (si dice anche che esse sono uniformità ammissibili per lo spazio topologico X). Chiamando uniformizzabile uno spazio topologico che ha una uniformità ammissibile, si ha quindi

Teorema. Uno spazio topologico è uniformizzabile se e solo se è completamente regolare.

Insistiamo ancora sul fatto che, mentre quando si assegna una uniformità su di un insieme X resta univocamente individuata una topologia su X, quando si assegna una topologia di spazio completamente regolare ad X questa può è in generale indotta da infinite uniformità. In particolare, la $\mathcal{C}(X)$ uniformità e la $\mathcal{C}^*(X)$ uniformità sono certamente distinte, a meno che $C(X)$ e $C^*(X)$ non coincidano (se $f \in C(X) \setminus C^*(X)$, allora $\psi_f\{X\} = +\infty$, mentre per ogni $g \in C^*(X)$ si ha $\psi_g\{X\} = \operatorname{diam}(g[X])$, quest'ultimo diametro essendo preso nella metrica usuale di $\mathbb{R}$). Pertanto, perchè uno spazio ammetta un'unica uniformità dovrà intanto essere (oltre che completamente regolare, ovviamente) pseudocompatto, cioè tale che $C(X) = C^*(X)$. Tuttavia questa condizione non è sufficiente perchè lo spazio ammetta un'unica uniformità. Se tuttavia lo spazio è compatto e completamente regolare, allora esso ha un'unica uniformità ammissibile, come si vedrà nel successivo teorema.

Teorema. Sia X uno spazio compatto ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~, e sia $\mathcal{U}$ un'uniformità ammissibile per X. Allora $\mathcal{U}$ coincide con il filtro degli intorni di $\Delta(X\times X)$ in $X\times X$ munito della topologia prodotta. Pertanto, il filtro degli intorni della diagonale è l'unica uniformità ammissibile per $X\times X$.

Dim. Sia V un intorno aperto della diagonale in $X\times X$. Proviamo che $V \supseteq \bigcap \mathcal{U}$. Sia infatti $(x,y)\in \bigcap\mathcal{U}$. Ciò equivale a dire che $x \in cl_X(\{y\})$ (e $y\in cl_X(\{x\})$), in base a quanto visto a pag 123}. Poiché $V[x]$ è intorno di x in X {essendo V aperto in $X\times X$, si ha $y\in V[x]$, cioè, $(x,y)\in V$. La dimostrazione è conclusa da un ovvio argomento di compattezza: $\mathcal{U}$ ha una base formata da intorni chiusi della diagonale (pag 123, Proposizione), siano essi $\{\bar{V} : V\in \mathcal{U}\}$. Poiché $\bigcap \mathcal{V} = \bigcap\mathcal{U} \subseteq V$, e $X\times X$ è compatto, una intersezione finita $V_1\cap\dots\cap V_n$ di elementi di $\mathcal{V}$ deve essere contenuta in V (altrimenti $\mathcal{V}\cup\{X\times X\setminus V\}$ sarebbe una famiglia di chiusi con intersezione vuota, e avente la f.i.p.) Allora $V \supseteq V_1\cap\dots\cap V_n \in \mathcal{U}$, e quindi $V\in\mathcal{U}$ //.

Vedremo poi che la classe degli spazi compatti è tuttavia più piccola della classe di tutti gli spazi con un'unica uniformità ammissibile.

Dato uno spazio uniformizzabile X, fra le varie uniformità ~~che~~ ammissibili ve n'è una massima, detta uniformità universale per lo spazio X. Essa si ottiene prendendo l'uniformità generata da tutte le pseudometriche continue su $X\times X$. (cioè, continue come funzioni di $X\times X$ con la topologia prodotto in $\mathbb{R}$ con la top. usuale). L'uniformità universale <u>non</u> coincide necessariamente con il filtro degli intorni della diagonale in $X \times X$. Esistono cioè spazi completamente regolari in cui tale filtro <u>non</u> è una uniformità. Ciò accade ad esempio quando X non è normale: infatti si vede facilmente che uno sp. topologico X per cui il filtro degli intorni di $\Delta(X\times X)$ è una uniformità ammissibile, deve essere normale. (Se A, B sono chiusi disgiunti di X, si prenda un intorno simmetrico U di $\Delta(X\times X)$ tale che $U \circ U \subseteq [(X\setminus A)\times(X\setminus A)] \cup [(X\setminus B)\times(X\setminus B)]$. Allora $U[A]$ è intorno di A, $U[B]$ è intorno di B; ed essi sono disgiunti, giacché $z \in U[A] \cap U[B]$ implica che esiste $x \in A$, $y \in B$ tali che $(x,z) \in U$ e $(y,z) \in U$ da cui si avrebbe $(x,y) \in (X\setminus A)\times(X\setminus A)$ oppure $(x,y) \in (X\setminus B)\times(X\setminus B)$. Ma ciò è assurdo, giacché $x \in A$ e $y \in B$)

Il "piano" di Tychonoff (vedere [GJ, 8.20]) è un esempio di spazio che ha un'unica uniformità ammissibile, come si vedrà in seguito. E poiché non è normale, tale uniformità <u>non</u> è la famiglia di tutti gli intorni della diagonale.

Il piano di Sorgenfrey S^2 non è normale; ed anche in esso, pertanto, il filtro degli intorni della diagonale <u>non</u> è una uniformità.

Si noti che, in ogni caso, se il filtro degli intorni della diagonale è una uniformità, questa è certamente ammissibile, ed è l'uniformità universale.

La continuità uniforme.

Sia $(X, \mathcal{U})$ uno spazio uniforme, e sia S un sottoinsieme di X. La traccia $\mathcal{U}(S)$ del filtro $\mathcal{U}$ su $S \times S$ è chiaramente una uniformità su S, detta uniformità indotta dalla $\mathcal{U}$ su S; cioè, $\mathcal{U}(S) = \{ V \cap (S \times S) : V \in \mathcal{U} \}$ è una uniformità per S, e $(S, \mathcal{U}(S))$ si dice sottospazio uniforme di $(X, \mathcal{U})$. Si verifica facilmente che la topologia indotta su S dalla top. uniforme di $(X, \mathcal{U})$ coincide con la top. uniforme di $(S, \mathcal{U}(S))$. Particolamente interessante è il caso in cui S è denso in X (si intende, denso per la top uniforme).

Proposizione - Sia S denso nello sp. uniforme $(X, \mathcal{U})$ Allora:

i) Gli insiemi $cl_{X \times X}(V)$, $V \in \mathcal{U}(S)$ sono una base per $\mathcal{U}$

ii) Ogni $d \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}(S)}$ si estende (in modo unico) ad una pseudometrica $\bar{d} \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$.

Dim. i) è immediata conseguenza del fatto che ogni elemento di $\mathcal{U}$ è intorno di $\Delta(X \times X)$ in $X \times X$ e che, essendo $S \times S$ denso in $X \times X$, risulta $cl_{X \times X}((S \times S) \cap V) = cl_{X \times X}(V)$ per ogni aperto V di $X \times X$.

ii) Sia $d \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}(S)}$. Per ogni $(x, y) \in X \times X$, si ponga $\bar{d}(x,y) = \inf \{ r \in \mathbb{R} : (x,y) \in cl_{X \times X}(V_{d,r}) \}$. È immediato verificare che $\bar{d}$ è una pseudo-metrica, e che $\bar{d} \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$. (si può, ad esempio, mostrare che $\bar{d}$ è continua come funzione di $X \times X$ in $\mathbb{R}$; il resto è facile)//

Veniamo ora al concetto di funzione uniformemente continua.

Definizione Siano $(X, \mathcal{U})$, $(Y, \mathcal{V})$ spazi uniformi. Sia $f : X \to Y$ una funzione. Sia $f_2 : X \times X \to Y \times Y$ definita ponendo $f_2(x, y) = (f(x), f(y))$. ~~Allora~~; f si dice uniforme.

mente continua quando, per ogni $V \in \mathcal{V}$, si ha $f_2^{\leftarrow}[V] \in \mathcal{U}$.
Si osservi che, se (X, d) è spazio metrico, e $f: X \to \mathbb{R}$ una funzione, questa è uniformemente continua come funzione da X con l'uniformità generata da d in $\mathbb{R}$ con l'uniformità usuale se e solo se, $\forall\, \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $d(x,y) < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Cioè, si riottiene il concetto di continuità uniforme dato in Analisi.
Vediamo altri modi equivalenti di esprimere la continuità uniforme. I simboli restando quelli della precedente definizione si ha:
~~(a)~~ f è uniformemente continua se e solo se: ~~[illegible]~~
(a) per ogni $V \in \mathcal{V}$ esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $f_2[U] \subseteq V$
oppure
(b) per ogni $d \in \mathcal{P}_{\mathcal{V}}$, $d \circ f_2 \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$
oppure
(c) per ogni $e \in \mathcal{P}_{\mathcal{V}}$, $\varepsilon > 0$ esistono $d \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ e $\delta > 0$ tale che $d(x,y) < \delta$ implica $e(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
La dimostrazione delle 3 equivalenze precedenti si lascia come esercizio.

Proposizione. Siano $(X, \mathcal{U})$ e $(Y, \mathcal{V})$ spazi uniformi, f una funzione uniformemente continua di X in Y. Allora f è una funzione continua di $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ in $(Y, \tau_{\mathcal{V}})$. Brevemente: ogni funzione uniformemente continua è continua.

Dim. Sia $x \in X$; gli insiemi $V[f(x)]$, $V \in \mathcal{V}$, sono una base per il filtro degli intorni di $f(x)$ in $(Y, \tau_{\mathcal{V}})$ e si ha $f^{\leftarrow}[V(f(x))] = \left(f_2^{\leftarrow}[V]\right)[x]^{*}$, come si verifica subito. Pertanto f è continua ad x // $(f_2^{\leftarrow}[V] \in \mathcal{U})$.

Come è noto, il risultato precedente non si inverte; ad esempio la funzione $\mathbf{i}^2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $\mathbf{i}^2(t) = t^2$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ è continua su $\mathbb{R}$ con la top. usuale, ma non è funzione uniformemente continua quando su $\mathbb{R}$ vi sia la uniformità usuale. Se tuttavia ~~su~~ $\mathcal{U}_\tau$ è uniformità universale per lo spazio topologico (X, τ), allora <u>ogni</u> funzione continua di $(X, \mathcal{U}_\tau)$ in uno sp. uniforme $(Y, \mathcal{V})$ è uniformemente continua (<u>in base alla (b)</u> della pagina precedente, e alla def. di uniformità universale). In particolare:

Teorema. <u>Se</u> $(X, \mathcal{U})$ <u>è spazio uniforme compatto, ogni funzione continua di</u> X <u>in uno sp. uniforme</u> $(Y, \mathcal{V})$ <u>è uniformemente continua su</u> X.

che restituisce come caso particolare il teorema di Heine--Cantor sulla continuità uniforme delle funzioni continue sui compatti di $\mathbb{R}$.

Se f è una biiezione uniformemente continua tra due spazi uniformi $(X, \mathcal{U})$ e $(Y, \mathcal{V})$, ed $f^{\leftarrow}$ è pure uniformemente continua, allora f si dice un <u>isomorfismo uniforme</u> di $(X, \mathcal{U})$ su $(Y, \mathcal{V})$.

Se ora X è un insieme, ~~e~~ $((Y_\lambda, \mathcal{V}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia di spazi uniformi, e $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia di applicazioni $f_\lambda : X \to Y_\lambda$, vi è su X una minima uniformità $\mathcal{U}_\Lambda$ per la quale tutte le f_λ sono uniformemente continue. Essa ~~è~~ ha per prebase tutti gli insiemi della forma $f_{\lambda,2}^{\leftarrow}[V_\lambda]$, $\lambda \in \Lambda$, $V_\lambda \in \mathcal{V}_\lambda$ ~~[illegible]~~ (Si controlla subito che questi insiemi sono una prebase per una uniformità, e questa è evidentemente la minima uniformità su X per cui le f_λ son tutte uniformemente continue) Si verifica che la topologia di questa uniformità è proprio la topologia debole w_Λ delle f_λ. Detta infatti τ_Λ

la topologia dell'uniformità $\mathcal{U}_\Lambda$, si ha intanto $\tau_\Lambda \geq w_\Lambda$, poichè tutte le f_λ sono τ_Λ-continue, essendo $\mathcal{U}_\Lambda$-unif. continue. Basterà poi mostrare che preso un punto $p \in X$, e un qualsiasi intorno U di p in una prebase per la top. τ_Λ, esiste un intorno di p nella w_Λ contenuto nel precedente. Sia infatti $U = (f_{\lambda,2}^{\leftarrow}[U_\lambda])[p]$. Allora $U = f_\lambda^{\leftarrow}[U_\lambda[f_\lambda(p)]]$ ed è quindi anche intorno di p nella w_Λ.

Se $((X_\lambda, \mathcal{U}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia di spazi uniformi, lo <u>spazio uniforme prodotto</u> è <u>l'insieme $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, munito della minima uniformità per la quale le proiezioni π_λ sono tutte uniformemente continue</u>.

In base alle considerazioni precedenti, la topologia della uniformità prodotto è proprio la topologia prodotto delle topologie uniformi sui singoli spazi componenti.

Esempi - esercizi - 1) L'uniformità $\mathcal{C}(X)$ (risp. $\mathcal{C}^*(X)$) è la minima uniformità tale che tutte le funzioni di $C(X)$ (risp. $C^*(X)$) sono uniformemente continue. (ovvio; per (b) di 129)

Infatti, l'uniformità $\mathcal{U}_\Lambda$ si può anche descrivere come l'uniformità generata su X dalle pseudometriche $d_\lambda \circ f_{\lambda,2}$, con $\lambda \in \Lambda$ e $d_\lambda \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}_\lambda}$.

2) Se $(X, \mathcal{U})$ è uno spazio uniforme, $\mathcal{P}_\mathcal{U}$ è l'insieme delle pseudometriche su X che sono funzioni uniformemente continue di $(X \times X, \mathcal{U} \times \mathcal{U})$ in $\mathbb{R}$ con la uniformità usuale.

3) Sia $(X, \mathcal{U})$ sp. uniforme. Per ogni $d \in \mathcal{P}_\mathcal{U}$ si indichi con X_d lo spazio uniforme X con l'uniformità generata da d. L'applicazione diagonale $e : X \to \prod_{d \in \mathcal{P}_\mathcal{U}} X_d$ delle identità $i_d : X \to X_d$ è un isomorfismo uniforme di X su $e[X]$.

Gruppi topologici e loro uniformità canoniche.

Tutti i gruppi topologici sono uniformizzabili. In essi esistono uniformità ammissibili che sono privilegiate rispetto ad altre, perché "compatibili" con la struttura di gruppo:

Sia $(G, \cdot, \tau)$ un gruppo topologico, e sia $\mathcal{V}_e$ il filtro degli intorni dell'unità e di G.

L'uniformità destra di G, $\mathcal{W}_d$, è l'uniformità avente per base gli insiemi

$$W_d(U) = \{(x,y) \in G \times G : \; xy^{-1} \in U\} \qquad (U \in \mathcal{V}_e)$$

e quella sinistra $\mathcal{W}_s$ è quella avente per base

$$W_s(U) = \{(x,y) \in G \times G : \; x^{-1}y \in U\} \qquad (U \in \mathcal{V}_e).$$

Esse sono entrambe ammissibili. (Ragioniamo solo su quella destra; intanto $\{W_d(U) : U \in \mathcal{V}_e\}$ è base per una uniformità, infatti $W_d(U) \cap W_d(V) = W_d(U \cap V)$, $(W_d(U))^{-1} = W_d(U^{-1})$; e poiché $W_d(U) \circ W_d(V) \subseteq W_d(VU)$, il filtro generato dalla famiglia suddetta in $G \times G$ è senz'altro una uniformità; essa è ammissibile, poiché per ogni $x \in G$ si ha $W_d(U)[x] = U^{-1}x$)

Da questo fatto discende che ogni gruppo topologico è completamente regolare. ~~Hddddd~~ G unif ⇔ compl. reg

Vediamo in che senso le uniformità precedenti sono privilegiate.

Teorema. L'uniformità destra di un gruppo topologico G è l'unica uniformità ammissibile avente una base di sottoinsiemi invarianti per traslazioni destre in $G \times G$.

Dim. Sia $(x, y) \in W_d(U)$, $a \in G$. Allora $(xa, ya) \in W_d(U)$, essendo $(xa)(ya)^{-1} = xy^{-1}$. Pertanto

$W_d(U)$ è invariante per traslazioni destre. Sia ora $\mathcal{U}$ un'uniformità ammissibile per G, avente una base $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di $G \times G$ invarianti per traslazioni destre in $G \times G$. Proviamo che per ogni $V \in \mathcal{B}$ si ha $V = W_d((V^{-1}[e])^{-1})$, il che concluderà il teorema. Infatti, $(x, y) \in V \Leftrightarrow (e, yx^{-1}) \in V$, essendo V invariante per traslazioni destre. Da ciò si trae che $(x,y) \in V$ se e solo se $yx^{-1} \in V[e]$, cioè se e solo se $xy^{-1} \in (V[e])^{-1}$, e da ciò la conclusione //

È evidente che un'analogo risultato, scambiando "destra" con "sinistra", vale per la W_s.

Si vede poi facilmente che l'uniformità destra di un gruppo topologico è generata da una famiglia di pseudometriche invarianti per traslazioni destre: basta ripetere la dimostrazione del lemma di metrizzazione, aggiungendo l'ipotesi che tutti gli U_n sono invarianti per traslazioni destre; la pseudometrica costruita risulterà invariante per traslazioni destre, come si vede subito; cioè risulta $d(x,y) = d(xa, ya)$, $\forall x, y, a \in G$.

Sui gruppi topologici ci fermiamo qui; diremo poche altre cose sul loro completamento.

Esercizio. Se G è gruppo topologico abeliano, si ha ovviamente $W_d = W_s$. Detta W quest'uniformità (<u>uniformità naturale del gruppo top.</u> G), si provi che essa è l'<u>unica</u> uniformità ammissibile su G tale che l'applicazione $\pi : G \times G \to G$ data da $\pi(x,y) = xy$ sia uniformemente continua come applicazione di $(G \times G, W \times W)$ in (G, W).

La completezza negli spazi uniformi.

Il concetto di net e filtro di Cauchy può evidentemente essere dato in uno spazio uniforme, dato che in questo si può ~~della~~ parlare di "vicinanza" di due punti ~~indipendente~~ in modo ~~rispetto~~ globale.

Def. Sia $(X, \mathcal{U})$ uno spazio uniforme, $\mathcal{F}$ un filtro su X. Il filtro $\mathcal{F}$ si dice di Cauchy se per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $A \in \mathcal{F}$ tale che $A \times A \subseteq U$.

La definizione è facilmente comprensibile quando si pensi a quella di filtro di Cauchy in uno spazio pseudo metrico. Del resto, si ha la seguente

Proposizione 1 Sia $(X, \mathcal{U})$ spazio uniforme, $\mathcal{F}$ un filtro su X. Sono equivalente le condizioni:

i) $\mathcal{F}$ è di Cauchy per l'uniformità $\mathcal{U}$

ii) Per ogni $U \in \mathcal{U}$, esistono $A \in \mathcal{F}$ e $x \in X$ tali che $A \subseteq U[x]$ $\{x\} \times A \subseteq U$

iii) Per ogni $d \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$, $\varepsilon > 0$ esiste $A \in \mathcal{F}$ tale che $d\{A\} \leq \varepsilon$.

Dim. Esercizio.

Si può ovviamente porre il concetto di rete di Cauchy, nel modo seguente: sia $s: D \to X$ (D preordinato filtrante crescente) una rete nello spazio uniforme $(X, \mathcal{U})$. Essa è detta di Cauchy ($\mathcal{U}$-Cauchy quando l'uniformità considerata vuol essere sottolineata) quando per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $\gamma_U \in D$ tale che $(s_\alpha, s_\beta) \in U$ per ogni coppia di indici α, β tali che $\alpha, \beta \geq \gamma_U$. Si prova molto facilmente che i concetti di rete di Cauchy e filtro di

Cauchy coincidono, nel senso che:

Proposizione 2 - Sia $(X, \mathcal{U})$ uno spazio uniforme. Allora

(i) Un filtro $\mathcal{F}$ su X è di Cauchy se e solo se la rete associata $s^{\mathcal{F}}$ (ved. pag 40) è di Cauchy

(ii) Una rete s in X è di Cauchy se e solo se il filtro associato $\mathcal{G}^{s}$ (ved. pag. 40) è di Cauchy.

Dim. Esercizio standard, come la Prop. 1.

D'ora in poi, quindi, un teorema che involva filtri di Cauchy e loro convergenza o loro punti di aderenza, sarà valido per reti di Cauchy, e viceversa. Dimostriamo subito la seguente fondamentale:

Proposizione 3. Un filtro di Cauchy $\mathcal{F}$ su di uno spazio uniforme $(X, \mathcal{U})$ converge a ciascuno dei suoi punti di aderenza. (la convergenza è ovviamente intesa nella topologia uniforme di $\mathcal{U}$)

Dim. Se p è di aderenza per il filtro di Cauchy $\mathcal{F}$, allora per ogni $U \in \mathcal{U}$ e ogni $A \in \mathcal{F}$ si ha $U[p] \cap A \neq \emptyset$, ~~preso $A \in \mathcal{F}$ tale che $A \times A \subseteq U$, [illegible] $A \subseteq U[p]$~~ dato $U \in \mathcal{U}$, si prenda $V \in \mathcal{U}$ tale che $V \circ V \subseteq U$, ed $A \in \mathcal{F}$ tale che $A \times A \subseteq V$. Da $V[p] \cap A \neq \emptyset$ si trae allora subito che $A \subseteq V \circ V[p]$, cioè $A \subseteq U[p]$, che implica $U[p] \in \mathcal{F}$ - In altre parole, $\mathcal{F}$ contiene il filtro degli intorni di p nella topologia uniforme di X, cioè, $\mathcal{F}$ converge a p in questa top. //

Per quanto prima detto, questa proposizione è valida quindi anche per le reti. È poi ovvio che un filtro più fine di un filtro di Cauchy (una sottorete di una rete di Cauchy) è di Cauchy.

È immediato, per le proposizioni precedenti, il seguente fatto:

Prop. 4 - <u>Uno sp. uniforme $(X, \mathcal{U})$ è completo se e solo se ogni ultrafiltro di Cauchy converge.</u>

Dim: esercizio

II Per controllare la completezza di uno spazio pseudo-metrico, bastava verificare che ogni <u>successione</u> di Cauchy sia convergente. Ora, ~~gli~~ spazi pseudo-metrici, pensati come spazi uniformi, sono precisamente quegli spazi uniformi la cui uniformità ha una base numerabile. Il risultato degli spazi pseudometrici si estende agli spazi uniformi nel modo seguente:

Prop. 5. <u>Sia $(X, \mathcal{U})$ uno sp. uniforme, e sia $\mathcal{B}$ una base per l'uniformità $\mathcal{U}$. Si ordini parzialmente $\mathcal{B}$ ponendo per $U, V \in \mathcal{B}$, $U \leq V$ ogni volta che $U \supseteq V$. Allora $(X, \mathcal{U})$ è completo se e solo se ogni $\mathcal{B}$-rete di Cauchy converge in X.</u>

Dim. La necessità è banale. Quanto alla sufficienza, sia $\mathcal{F}$ un filtro di Cauchy su X. Dato $U \in \mathcal{B}$, si scelga $A_U \in \mathcal{F}$ tale che $A_U \times A_U \subseteq U$, e si scelga poi $x_U \in A_U$. Si definisce così una rete $x : \mathcal{B} \to X$; x è di Cauchy. Dato infatti $U_0 \in \mathcal{U}$, si scelga $U_1 \in \mathcal{B}$ tale che $U_1 \circ U_1 \subseteq U_0$. Se $U, V \geq U_1$ (cioè, $U, V \subseteq U_1$) si ha, preso $z \in A_V \cap A_U$, $(x_U, z) \in A_U \times A_U \subseteq U \subseteq U_1$ e $(z, x_V) \in A_V \times A_V \subseteq V \subseteq U_1$, da cui $(x_U, x_V) \in U_1 \circ U_1 \subseteq U_0$. Per l'ipotesi, x converge ad un punto $p \in X$; p è anche limite per $\mathcal{F}$; infatti, se ciò non accadesse, vi sarebbe $U_0 \in \mathcal{B}$ ed $A_0 \in \mathcal{F}$ tale che $A_0 \cap U_0[p] = \emptyset$

~~[illegible]~~

si scelga $U_1 \in \mathcal{U}$, U_1 simmetrico, tale che $U_1 \circ U_1 \subseteq U_0$ e $V_0 \in \mathcal{B}$ tale che $V_0 \subseteq U_1$ e per $V \geq V_0$, $x_V \in U_1[p]$.

Cioè, $(p, x_{V_0}) \in U_1$. Poichè $A_{V_0} \times A_{V_0} \subseteq V_0 \subseteq U_1$, si ha da ciò $A_{V_0} \subseteq U_1 \circ U_1[p] \subseteq U_0[p]$. Ciò implica $A_{V_0} \cap A_0 = \emptyset$, che è assurdo, essendo $A_{V_0}, A_0 \in \mathcal{F}$ //.

Per gli spazi uniformi completi, vi è un teorema di estensione delle funzioni uniformemente continue, di importanza fondamentale:

Teorema. Sia $(X, \mathcal{U})$ uno spazio uniforme, $(S, \mathcal{U}(S))$ un sottospazio denso di $(X, \mathcal{U})$, $(Y, \mathcal{V})$ uno spazio uniforme completo e T_2. Ogni funzione uniformemente continua $f : S \to Y$ si estende (ed in modo unico) ad una funzione uniformemente continua $\bar{f} : X \to Y$.

Dim. Sia $p \in X$. Essendo S denso in X, la famiglia $\{U[p] \cap S : U \in \mathcal{U}\}$ è una base di filtro su S, che risulta essere di Cauchy su $(S, \mathcal{U}(S))$. Essendo f uniformemente continua, il filtro immagine generato da $f[U[p] \cap S]$, $U \in \mathcal{U}$, è di Cauchy in Y, e vi ha pertanto un limite, essendo Y completo (tale limite è unico, poichè Y è T_2). Indichiamo tale limite con $\bar{f}(p)$. Resta così definita un'estensione $\bar{f}$ di f su tutto X. Resta da mostrare che $\bar{f}$ è uniformemente continua. Sia infatti $V \in \mathcal{V}$ chiuso (i chiusi sono base) in $Y \times Y$. Mostriamo che $\bar{f}_2^{\leftarrow}[V] \supseteq cl_{X \times X}(f_2^{\leftarrow}[V])$ il quale ultimo è un elemento di $\mathcal{U}$, essendo f uniformemente continua, ed S denso in X. Se $(p, q) \in cl_{X \times X}(f_2^{\leftarrow}[V])$, si ha infatti che $U'[p] \times U''[q]$ $(U', U'' \in \mathcal{U})$ tracciano su $f_2^{\leftarrow}[V]$ (perchè $(p,q) \in cl_{X \times X}(f_2^{\leftarrow}[V])$) e quindi che $f_2[U'[p] \times U''[q]]$ traccia su V. Chiaramente il filtro generato da $f_2[U'[p] \times U''[q]]$ converge a $(\bar{f}(p), \bar{f}(q))$, che appartiene quindi all'insieme chiuso V //.

Proposizione importante. <u>Un sottospazio chiuso di uno spazio uniforme completo, è completo; un sottospazio completo di uno spazio uniforme di Hausdorff è chiuso.</u>

Dim: esercizio.

Esercizio. <u>Un prodotto di spazi uniformi completi è completo</u>.

Completamento

Ogni spazio uniforme può essere completato, nel senso che può essere considerato come sottospazio <u>uniforme denso</u> di uno spazio uniforme completo. Se ~~so~~ gli spazi uniformi di cui si parla non sono di Hausdorff, in generale il completamento non è unico. Se invece i completamenti sono di Hausdorff, essi sono unici, nel senso che

Proposizione. <u>Sia</u> $(X, \mathcal{U})$ <u>spazio uniforme di Hausdorff, e siano</u> $(Y, \mathcal{V})$, $(Z, \mathcal{W})$ <u>spazi uniformi di Hausdorff e completi, entrambi contenenti X come sottospazio uniforme denso. Esiste allora un isomorfismo uniforme</u> η <u>di</u> $(Y, \mathcal{V})$ <u>su</u> $(Z, \mathcal{W})$ <u>che è l'identità su</u> X

<u>Dim</u>. Teorema di estensione della pag. precedente, applicato nei due sensi.//

Esponiamo ora, a grandi linee, come si costruisce un completamento di uno spazio uniforme. Ci limitiamo alle definizioni.

Dato uno spazio uniforme $(X, \mathcal{U})$, si prenda una base $\mathcal{B} = (B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ per $\mathcal{U}$ dove $\lambda \to B_\lambda$ indicia biettivamente $\mathcal{B}$ su Λ. Ordiniamo parzialmente Λ ponendo, per

$\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \leq \mu$ se $B_\mu \subseteq B_\lambda$. Allora Λ risulta essere (pre)ordinato filtrante crescente. Sia X^* l'insieme di tutte le Λ-reti di Cauchy in X. Introduciamo una uniformità $\mathcal{U}^*$ in X^* ponendo, per $U \in \mathcal{U}$,

$$U^* = \{ (s,t) \in X^* \times X^* : (s_\lambda, t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \text{ si trova definitivamente in } U \}.$$

e prendendo $\{U^* : U \in \mathcal{U}\}$ come base per una uniformità in X^*. Si verifica poi che l'applicazione $j: X \to X^*$ che associa ad ogni $x \in X$ l'applicazione $j(x) : \Lambda \to X$, costantemente uguale ad x, è un isomorfismo uniforme di $(X, \mathcal{U})$ su $j[X]$ con l'uniformità indottavi da $\mathcal{U}^*$. Inoltre $j[X]$ è denso in X^* e $(X^*, \mathcal{U}^*)$ è completo. Pertanto $(X^*, \mathcal{U}^*)$ è un completamento di $(X, \mathcal{U})$. Se poi X era di Hausdorff, identificando fra di loro quei punti $s, t \in X^*$ tali che $(s,t) \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U^*$, e prendendo un'ovvia "uniformità quoziente" sull'insieme $X^\wedge$ così ottenuto, si ottiene il completamento di Hausdorff di $(X, \mathcal{U})$.

Diamo solo questi cenni (le dimostrazioni, che non fanno parte del programma, sono state svolte a lezione).

Un altro metodo per completare uno sp. uniforme è il seguente: si completa prima uno spazio pseudometrico, mediante successioni di Cauchy, esattamente come si è fatto prima; indi si immerge $(X, \mathcal{U})$ nel prodotto dei completamenti degli spazi pseudo-metrici (X, d) $(d \in \mathcal{P}_\mathcal{U})$, mediante l'applicazione diagonale e delle identità $i_d : X \to (X, d)$, e si fa la chiusura di $e[X]$ nel prodotto.

È estremamente importante il seguente fatto

Proposizione. Sia $(X, \mathcal{U})$ uno spazio uniforme, $(X^*, \mathcal{U}^*)$ un completamento di $(X, \mathcal{U})$. Allora $\mathcal{P}_{\mathcal{U}^*}$ consiste delle estensioni ad $X^* \times X^*$ delle pseudometriche $d \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ -

Dim. Ciò è sempre vero, in generale, quando X è sottospazio unif denso ~~di~~ in uno sp. uniforme X^*. La dimostrazione si può fare sia ricorrendo alla prop. di pag 128, sia ricorrendo al teorema di estensione delle funzioni unif. continue (ricordiamo che ogni $d \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ è unif. continua come funzione di $X \times X$ con l'unif. prodotto in $\mathbb{R}$ con l'unif. usuale. //

~~Un~~ completamento di un gruppo topologico, fatto rispetto alla uniformità destra, oppure sinistra, non è in generale un gruppo topologico. Ciò tuttavia è sempre vero nel caso dei gruppi abeliani: ogni gruppo topologico abeliano ha un completamento nella sua uniformità gruppale, che è un gruppo topologico.

Relazioni tra completezza e compattezza. Spazi totalmente limitati.

È chiaro che ogni spazio uniforme compatto $(X, \mathcal{U})$ è anche completo (ogni filtro su X ha un pto di aderenza $\Rightarrow$ ogni filtro di Cauchy ha un pto di aderenza $\Leftrightarrow$ ogni filtro di Cauchy converge). La compattezza è ovviamente assai più forte della completezza: infatti la prima dice che ogni ultrafiltro su X converge, la seconda che ogni ultrafiltro <u>di Cauchy</u> converge. Se $(X, \mathcal{U})$ è sp. uniforme compatto, allora per ogni $V \in \mathcal{U}$ lo sp. X può essere coperto mediante un numero finito di insiemi della forma $V[x]$ $(x \in X)$: in altre parole, per ogni $V \in \mathcal{U}$ esiste un sottoinsieme <u>finito</u> F di X tale che $X = V[F]$ $(= \bigcup_{x \in F} V[x])$.
Questa proprietà può essere considerata in astratto per uno sp. uniforme, dando luogo alla:

<u>Def.</u> <u>Uno sp. uniforme $(X, \mathcal{U})$ si dice totalmente limitato se per ogni $V \in \mathcal{U}$ esiste un sottoinsieme finito F di X tale che $X = V[F]$.</u>

Considerando la famiglia $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ delle pseudometriche su X che sono uniformi per $\mathcal{U}$, la def. precedente può essere riformulata dicendo che X è totalmente limitato se, per ogni $d \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ e ogni $r > 0$, X è unione di un numero finito di d-sfere di raggio r.

L'essere totalmente limitato, per uno spazio uniforme, è più debole che non l'essere compatto. Tuttavia, se uno spazio è totalmente limitato, allora ogni suo completamento è compatto, come ora vedremo. Premettiamo alla dimostrazione una definizione: se X è un insieme, e d una pseudometrica su X, un sottoinsieme E di X è detto d-discreto se esiste un numero reale $r > 0$ tale che, per ogni coppia di punti distinti $x, y \in E$ si abbia $d(x,y) \geq r$.

Teorema. <u>Sia $(X, \mathcal{U})$ uno spazio uniforme. Sono equivalenti le proposizioni:</u>

(i) <u>Ogni completamento $\bar{X}$ di $(X, \mathcal{U})$ è compatto (in altre parole, $(X, \mathcal{U})$ è precompatto)</u>

(ii) <u>Per ogni $d \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$, ogni sottoinsieme d-discreto di X è finito.</u>

(iii) <u>$(X, \mathcal{U})$ è totalmente limitato</u>

(iv) <u>Ogni ultrafiltro su X è di Cauchy.</u>

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii). Le pseudometriche $d \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ si estendono (e in modo unico) a pseudometriche $\bar{d}$ nel completamento, facenti parte del "gauge" dell'uniformità del completamento. Se E è un sottoinsieme d-discreto di X, tale che $\forall x, y \in E$, $x \neq y$ si ha $d(x,y) \geq r > 0$, E ~~[illegible]~~ è privo di punti di accumulazione nello sp. compatto $\bar{X}$ (se x_0 fosse di accum. per E, in ogni $\bar{d}$-sfera di centro x_0 e raggio ε, $\forall \varepsilon > 0$ dovrebbero cadere infiniti punti di E; se $\varepsilon = r/2$, ve ne può cadere al più uno), pertanto è finito.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si deve mostrare che, per ogni $d \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$, $r > 0$, X è unione di un numero finito di d-sfere di raggio r. Se ciò non accade, preso $x_1 \in X$, esiste $x_2 \in X \setminus S_d(x_1, r)$, $x_3 \in X \setminus (S_d(x_1, r) \cup S_d(x_2, r))$, e induttivamente $x_n \in X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} S_d(x_i, r))$. Chiaramente $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ è infinito e d-discreto.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Dire che un filtro $\mathcal{F}$ è di Cauchy equivale a dire che, per ogni $U \in \mathcal{U}$, esiste $x \in X$ tale che $U[x] \in \mathcal{F}$. Ora, se (iii) vale, per ogni $U \in \mathcal{U}$ esistono $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $X = U[x_1] \cup \ldots \cup U[x_n]$. Poiché un ultrafiltro è primo, la conclusione è raggiunta.

(iv) ⇒ (i) Mostriamo che ogni filtro $\mathcal{F}$ su $\bar{X}$ ha un punto di chiusura. Sia $\bar{\mathcal{U}}$ l'uniformità su $\bar{X}$, per ogni $U \in \bar{\mathcal{U}}$, e ogni $A \in \mathcal{F}$, si consideri $U[A]$; poichè questo è un intorno di A in $\bar{X}$, e X è denso in $\bar{X}$, gli $U[A]$ tracciano su X una base di filtro, $\mathcal{B}$. Sia $\mathcal{G}$ un ultrafiltro su X contenente $\mathcal{B}$; esso è, per l'ipotesi, di Cauchy e quindi converge in $\bar{X}$ ad un punto p. Tale p è di chiusura per $\mathcal{F}$: si ha infatti $p \in \bigcap cl_{\bar{X}}\{U[A] \cap X : U \in \bar{\mathcal{U}}, A \in \mathcal{F}\} \subseteq$

$$= \bigcap cl_{\bar{X}}\{U[A] : U \in \bar{\mathcal{U}}, A \in \mathcal{F}\} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}}\Big(\bigcap_{U \in \bar{\mathcal{U}}} U[A]\Big) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} cl_{\bar{X}}(A) \quad //$$

Questo teorema ha varie conseguenze importanti, che riassumiamo nel seguente corollario.

Corollario. <u>Uno spazio uniforme $(X, \mathcal{U})$ è compatto se e solo se è totalmente limitato e completo.</u>

<u>Uno spazio uniforme $(X, \mathcal{U})$ è totalmente limitato se e solo se ogni filtro è contenuto in un filtro di Cauchy</u> ($\Leftrightarrow$ se e solo se ogni rete ha una sottorete di Cauchy)

Vediamo ora alcuni esempi-esercizi:

1) Un sottospazio uniforme di $\mathbb{R}$ usuale è totalmente limitato se e solo se è limitato

2) $\mathbb{R}$ con l'uniformità della metrica $\psi_{\arctan}$ è totalmente limitato. (vedremo) il completamento di $(\mathbb{R}, \psi_{\arctan})$ è topologicamente la retta reale estesa $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ dove, con una base di aperti ~~è~~, formata dagli aperti di $\mathbb{R}$, ~~oltre a quelli~~ usuali, e dagli ~~quelli costituiti~~ insiemi del tipo $\{x \in \mathbb{R} : x > a\} \cup \{+\infty\}$ oppure $\{x \in \mathbb{R} : x < a\} \cup \{-\infty\}$.

3) Sia (X, τ) uno sp. completamente regolare. <u>La $C^*(X)$ uniformità su X è totalmente limitata</u>

Svolgimento. Proviamo anzitutto che per ogni $f \in C^*(X)$ e ogni $r > 0$, X è unione finita di insiemi di ψ_f-diametro $\leq r$.

Infatti, $f[X]$, essendo un sottoinsieme limitato, è coperto da un numero finito di intervalli $I_1, \dots, I_n$ di ampiezza r; e quindi gli insiemi $f^{\leftarrow}[I_1], \dots, f^{\leftarrow}[I_n]$ hanno ψ_f-diametro $\leq r$ e coprono X. Se poi $d = \psi_{f_1} \vee \dots \vee \psi_{f_n}$, con $f_1, \dots, f_n \in C^*(X)$, X è unione di un numero finito di insiemi della forma $A_1 \cap \dots \cap A_m$, dove $\psi_{f_k}\{A_k\} \leq r$. È chiaro che $d\{A_1 \cap \dots \cap A_n\} \leq r$.

Lo stesso argomento prova che se X è un insieme, e $\mathcal{U}$ è una uniformità su X generata da una famiglia di pseudo-metriche ψ_f, dove le f sono funzioni reali limitate, allora $(X, \mathcal{U})$ è totalmente limitato.

4) Sia $(G, +, \tau)$ un gruppo topologico (abeliano additivo, per semplicità). Si ponga su G l'uniformità gruppale (quella generata dagli $\{(x, y) \in G \times G : x - y \in V, V \text{ intorno di } 0 \text{ in } G\}$.
Un sottospazio A di G è totalmente limitato (per l'uniformità indotta) se e solo se per ogni intorno V di 0 in G, esiste un sottoinsieme finito F di G tale che $A \subseteq F + V$.
Se in G vi è una base di intorni dello 0 costituita da sottogruppi, (e sia H) allora G è totalmente limitato se e solo se tutti questi sottogruppi hanno indice finito. (Infatti, $G \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S g_i$, $g_i \in G$, $i=1, \dots, n$)
Sia $G = \mathbb{Z}$ e sia p un primo. La topologia su $\mathbb{Z}$ in cui i sottogruppi $\{p^n \mathbb{Z} : n = 0, 1, 2 \dots\}$ sono una base per gli intorni dello 0, è allora totalmente limitata. Quindi il completamento di $\mathbb{Z}$ in questa topologia (detta p-adica) è compatto.
Detto $\hat{\mathbb{Z}}_p$ questo completamento, si vede che su esso si estendono le operazioni di anello di $\mathbb{Z}$ (si noti che i $p^n\mathbb{Z}$ sono anche ideali)
Questo è l'anello degli interi p-adici. $\hat{\mathbb{Z}}_p$ è un anello di integrità, ed è locale.

Def. Una compattificazione di uno spazio topologico X è uno spazio compatto Y in cui X ~~ne~~ è denso.

Talvolta si intende per compattificazione una coppia (c, Y) dove Y è uno sp. compatto, e c un'immersione di X in un sottospazio denso di Y. Noi converremo sempre di identificare X con $c[X]$, così riducendoci alla definizione precedente. Ogni spazio topologico ammette una compattificazione: dato uno spazio X, si prenda un elemento, ∞, non appartenente ad X, e si ponga $X^+ = X \cup \{\infty\}$ con la topologia in cui gli aperti sono gli aperti di X, e i complementari dei sottospazi chiusi e compatti di X. Vediamo ora che se X non è compatto X^+ è una compattificazione di X, detta compattificazione con un punto o compattificazione di Alexandroff:

Teorema (Alexandroff). X^+ è compatto, e X è denso in X^+, se non è compatto. Inoltre, X^+ è T_2 se e solo se X è localmente compatto e T_2.

Dim. È elementare verificare che X^+ è compatto, e che se X non è compatto, allora è denso in X^+. Se X^+ è T_2, allora, essendo X sottospazio aperto di X^+, X è localmente compatto e T_2. Se poi X è localmente compatto e T_2, si tratta di mostrare che ogni $x \in X$ e ∞ hanno intorni disgiunti. E questo è ovvio: basta per ogni punto $x \in X$ prendere un intorno chiuso e compatto e il suo complementare in X^+ //.

Particolarmente interessanti sono le compattificazioni di Alexandroff degli spazi discreti infiniti, che sono ovviamente compatti di Hausdorff. Questi sp. sono spesso utili per fornire

controesempi, ed è bene tenerli presente.
Le compattificazioni più interessanti sono ovviamente quelle di Hausdorff. Poichè uno spazio compatto T_2 è di Tychonoff, i suoi sottospazi saranno di Tychonoff, quindi se uno spazio topologico ha una compattificazione di Hausdorff, esso è spazio $T_{3\frac{1}{2}}$. Viceversa, si è visto che ogni spazio di Tychonoff X si immerge in qualche cubo di Tychonoff $\mathbb{I}^S$; poichè i cubi di Tychonoff sono compatti T_2, prendendo la chiusura dell'immersione in $\mathbb{I}^S$, si ottiene una compattificazione di ~~Tychonoff~~ Hausdorff dello spazio X. Quindi:

<u>Uno spazio topologico ha una compattificazione di Hausdorff se e solo se è uno spazio di Tychonoff.</u>

D'ora in poi la parola "compattificazione" significherà senz'altro compattificazione T_2, cioè una compattificazione di uno spazio X sarà uno spazio compatto di Hausdorff, T, in cui X è sottospazio denso. Dall'esercizio dimostrato nel I° capitolo, si ha:

<u>Se T è una compattificazione di X, allora $|T| \leq \exp(\exp|X|)$.</u>

tale limite, come sappiamo, può essere raggiunto ($\mathbb{I}^c$ è separabile, ed ha cardinalità 2^c)

Se T, S sono compattificazioni di X, diremo che S è minore uguale a T, scrivendo $S \leq T$, se esiste una funzione continua $\varphi^T_S : T \to S$ tale che $\varphi^T_S | X =$ identità di X. Si osservi che tale relazione è riflessiva e transitiva nella classe delle compattificazioni di X. Inoltre, se risulta $S \leq T$ e $T \leq S$, allora $\varphi^S_T \circ \varphi^T_S$ è una funzione continua di T in T che è l'identità su X; poichè

X è denso in T, $\varphi_T^S \circ \varphi_S^T$ è l'identità di T. Per simmetria, $\varphi_S^T \circ \varphi_T^S$ è l'identità di S, quindi φ_T^S è un omeomorfismo di S su T, che induce l'identità su X. In tal caso le compattificazioni S e T si dicono *equivalenti*. Conveniamo di identificare fra loro compattificazioni equivalenti. Detta $\mathcal{K}(X)$ la classe di compattificazioni ottenuta scegliendo un elemento da ogni classe di equivalenza di compattificazioni, la relazione $\leq$ sopra introdotta, diviene un *ordine parziale* in $\mathcal{K}(X)$. Vedremo poi che $\mathcal{K}(X)$ è in realtà un insieme, e che $|\mathcal{K}(X)| \leq \exp(\exp(|X|))$.

Sia $T \in \mathcal{K}(X)$, e sia $i_T : X \longrightarrow T$ l'immersione canonica; essendo i_T continua, i_T dà un omomorfismo d'anelli $i'_T : C(T) \to C(X)$ definito ponendo $i'_T(g) = g \circ i_T (= g|X)$ per ogni $g \in C(T)$. Poichè X è denso in T, i'_T è iniettivo; ~~inoltre~~ quindi $i'_T[C(T)]$ è un sottoanello A_T di $C^*(X)$, isomorfo a $C(T)$. Inoltre, sempre poichè X è denso in T, si ha $\|g\|_T = \max\{|g(t)| : t \in T\} = \sup\{|g(x)| : x \in X\} = \|(g|X)\|_X$; cioè, i'_T è un'*isometria* per le sup norms; pertanto, essendo $C(T)$ completo, anche A_T lo è; quindi A_T è *chiuso in $C^*(X)$ per la sup norm*, e poichè $C(T)$ separa punti e chiusi di T, (è $T_{3\frac{1}{2}}$) e ogni chiuso di X è della forma $F \cap X$, con F chiuso in T, si ha che *A_T separa punti e chiusi di X, quindi, in particolare, X ha la topologia debole della famiglia A_T*.

Inoltre, come sappiamo, T è omeomorfo a $\mathcal{M}(C(T))$, essendo T compatto T_2; quindi *T è omeomorfo a $\mathcal{M}(A_T)$*

Raccogliamo questi risultati nella Proposizione seguente

Proposizione 1 Sia T una compattificazione T_2 dello sp. di Tychonoff X, ~~Allora~~ e sia A_T l'insieme delle funzioni di $C(X)$ che si estendono a funzioni continue su T. Allora

(i) A_T è isometricamente isomorfo a $C(T)$, (mediante l'isomorfismo di estensione, che conserva le sup norms)

(ii) A_T è un sottoanello chiuso di $C^*(X)$, che separa punti e chiusi di X, e contiene le costanti

(iii) T è omeomorfo allo spettro massimale di A_T

È evidente che, se T ed S sono compattificazioni equivalenti, si avrà $A_T = A_S$; mentre, se $S \leq T$, si avrà $A_S \subseteq A_T$ (se $f \in C^*(X)$ si estende alla funzione $g \in C(S)$, $g \circ \varphi^T_S$ è un'estensione di f a T, che appartiene a $C(T)$); inoltre, se $S \neq T$ (il simbolo $\neq$ qui sta ovviam. ad indicare "S non equivalente a T"), allora $A_S \neq A_T$ (se $A_S = A_T$, l'isomorfismo naturale di S su $\mathcal{M}(A_S) = \mathcal{M}(A_T)$ composto con l'isomorfismo naturale di $\mathcal{M}(A_T)$ su T sarebbe l'identità su X, che qui è considerato come l'insieme degli ideali massimali fissi di $A_S = A_T$). Quindi

Proposizione 2 - L'applicazione $T \to A_T$ è un'applicazione iniettiva di $\mathcal{K}(X)$ nell'insieme dei sottoanelli di $C^*(X)$, che muta l'ordine di $\mathcal{K}(X)$ nell'inclusione tra sottoanelli di $C^*(X)$.

Si osservi che $|C^*(X)| \leq c^{|X|} = 2^{\aleph_0 |X|} = 2^{|X|}$, se X è infinito. Pertanto, se X è infinito, i sottoanelli di $C^*(X)$ sono al più $2^{2^{|X|}}$. Quindi la prop. 2 implica il

Corollario - Per ogni spazio di Tychonoff (infinito) X, si ha $|\mathcal{K}(X)| \leq \exp(\exp(|X|))$.

Vedremo che, se X è discreto e infinito, allora $|\mathcal{K}(X)| = \exp(\exp(|X|))$. Invece lo spazio $W = W(\omega_1)$ con la topologia dell'ordine, ha una sola compattificazione, come si vedrà poi, e cioè lo spazio $W(\omega_1 + 1)$, che è la compattificazione di Alexandroff di W, e quindi $|\mathcal{K}(W)| = 1$. Mostriamo ora che ogni sottoanello A di $C^*(X)$ che contiene le costanti, separa punti e chiusi di X, ed è chiuso per la supnorm, è l'anello A_T di una compattificazione T di X.

A tale scopo, osserviamo che se Φ è un sottoinsieme di $C^*(X)$ la cui topologia debole è quella di X, allora l'uniformità $\mathcal{U}_\Phi$ generata su X dalla famiglia di pseudometriche $\{\psi_f : f \in \Phi\}$, è ammissibile per X (si ripeta, con qualche ovvia modifica, il ragionamento usato per vedere che la $\mathcal{C}(X)$ uniformità è ammissibile) ed è inoltre totalmente limitata (si veda nel cap. precedente a pag 144, ripetendo l'argomentazi~~one~~one che prova che $\mathcal{C}^*(X)$ è totalmente limitata). ~~[illegible]~~ Pertanto, il completamento dello spazio uniforme $(X, \mathcal{U}_\Phi)$ è uno sp. uniforme compatto T_2, $(T, \bar{\mathcal{U}}_\Phi)$ in cui X è sottospazio denso. Quindi T (come sp. topologico) è una compattificazione di X. Poiché $\mathcal{U}_\Phi$ è la minima uniformità su X per la quale le funzioni di Φ sono uniformemente continue, si ha per il teorema di estensione delle funzioni unif. continue $\Phi \subseteq A_T$ (Inoltre, ogni funzione di A_T si estende ad una funzione continua su T, quindi uniformemente continua su $(T, \bar{\mathcal{U}}_\Phi)$; quindi ogni funzione di A_T è uniformemente continua su $(X, \mathcal{U}_\Phi)$) vice versa

Ora, A_T contiene l'anello $\mathbb{R}[\Phi]$ generato dalle costanti e da Φ. Vogliamo mostrare che A_T è la <u>chiusura di</u> $\mathbb{R}[\Phi]$ nella supnorm. Sia infatti $\bar\Phi$ l'insieme delle estensioni continue su T delle funzioni di Φ. Basterà far vedere che le funzioni di $\mathbb{R}[\bar{\Phi}]$ separano i punti di T; infatti allora, per il teorema di Stone-Weierstrass, l'algebra $\mathbb{R}[\bar{\Phi}]$ sarà densa in $C(T)$ per la sup-norm, e data l'isometria esistente tra $C(T)$ e A_T, ciò proverà anche che A_T è la chiusura in A di $\mathbb{R}[\Phi]$. Si noti che le estensioni continue $\bar{d}$ a T delle pseudometriche su X della forma $d = \psi_{f_1} \vee \dots \vee \psi_{f_n}$, $f_1, \dots, f_n \in \Phi$, forniscono una base per l'uniformità $\bar{\mathcal{U}}_{\Phi}$ di T (pg. 128). Chiaramente, $\bar{d} = \psi_{\bar{f}_1} \vee \dots \vee \psi_{\bar{f}_n}$, dove $\bar{f}_i$ è la continuazione di f_i a T. Poichè T è di Hausdorff, dati $p, q \in T$, $p \neq q$, esiste $\bar{d}$ tale che $\bar{d}(p,q) \neq 0$. Quindi $\max_{1 \le i \le n} \{ |\bar{f}_i(p) - \bar{f}_i(q)| \} \neq 0$, il che implica $\bar{f}_i(p) \neq \bar{f}_i(q)$ per almeno una i; in altre parole, $\bar{\Phi}$ separa i punti di T. Ciò prova $A_T = cl_{\text{supnorm}}(\mathbb{R}[\Phi])$.

Se si prende per Φ un sottoanello A contenente le cost. che separa punti e chiusi di X, e chiuso risp. alla sup. norm, e si ripete la costruzione precedente, si trova quindi $A_T = A$.

D'ora in poi, se X è sp. $T_{3\frac{1}{2}}$, indichiamo con $\mathcal{A}(X)$ la classe degli anelli di cui sopra. Tutti i risultati fin qui raggiunti si riassumono in questo teorema:

Teorema. *Sia X uno spazio di Tychonoff. L'applicazione $\rho : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{A}(X)$ che associa ad ogni compattificazione (di Hausdorff) T di X il sottoanello A_T di $C^*(X)$ costituito dalle funzioni di $C^*(X)$ continuabili su T, è una biiezione. Inoltre, ρ muta l'ordine delle compattificazioni nell'inclusione tra sottoanelli di $C^*(X)$. Per ogni $T \in \mathcal{K}(X)$, T è omeomorfo a $\mathcal{M}(\rho T)$.*

Di questi fatti, si ha subito

Proposizione. $\mathcal{K}(X)$ è join-complete, cioè, ogni sottoinsieme di $\mathcal{K}(X)$ ha estremo superiore.

Dim. Sia $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una arbitraria famiglia di ~~sotto~~ elementi di $\mathcal{K}(X)$. A questi corrispondono elementi $A_\lambda = \rho T_\lambda$ di $\mathcal{A}(X)$. La chiusura, in $C^*(X)$, di $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ è evidentemente un elemento $A \in \mathcal{A}(X)$. Preso $T \in \mathcal{K}(X)$ tale che $\rho T = A$, T è estremo superiore di $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ //.

Quindi $\mathcal{K}(X)$ stesso ha estremo superiore, cioè un massimo, che si indica con βX e si chiama compattificazione di Stone-Čech. È chiaro che $\rho(\beta X) = C^*(X)$. Pertanto, βX può essere descritto (equivalentemente), in uno dei seguenti modi:

1) βX è la massima compattificazione di X

2) βX è lo spettro massimale dell'anello $C^*(X)$.

3) βX è una compattificazione di X in cui X è C^*-immerso

4) βX è il completamento di $(X, \mathcal{C}^*(X))$.

Dal teorema di Tietze-Urysohn sulla C^*-immersione, e da 3), segue (ricordando anche che un compatto T_2 è T_4):

5) βX è una compattificazione di X tale che per ogni coppia di zero-insiemi disgiunti di X, Z_1, Z_2, si ha ~~$cl_{\beta X}$~~ $cl_{\beta X}(Z_1) \cap cl_{\beta X}(Z_2) = \emptyset$.

Un'altra caratterizzazione è fornita dal teorema di estensione di Stone:

Teorema. Sia T una compattificazione di X ($X \in \mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$) tale che ogni funzione continua f di X in uno sp. compatto e T_2 Y si prolunga ad una funzione continua g di T in Y. Allora $T = \beta X$. Viceversa, βX gode di questa proprietà.

Dim. Se T gode della proprietà descritta, allora $\mathcal{F}X$ è C^*-immerso in T: infatti, ogni $f \in C^*(X)$ può essere pensata come funzione continua da X nello spazio compatto T_2 $cl_{\mathbb{R}}(f[X])$; pertanto essa si estende ad una $g: T \to cl_{\mathbb{R}}(f[X])$, che è chiaramente una funzione continua a valori reali che estende f. Viceversa, mostriamo che ogni $f \in C(X, Y)$ si può continuare in una $g \in C(\beta X, Y)$. Basterà allo scopo mostrare che f è uniformemente continua (*poi si applica il T. dell'estens. delle funz. unif.-cont.) come funzione da $(X, \mathcal{C}^*(X))$ in $(Y, \mathcal{U})$ ($\mathcal{U}$ essendo l'unica uniformità ammissibile per il compatto T_2 $T_{Y,\rho}Y$). Poichè $\mathcal{U} = \mathcal{C}^*(Y)$, basta mostrare che per ogni $\varphi \in C(Y)$, $\varphi \circ f$ è $\mathcal{C}^*(X)$-uniformemente continua, il che è ovvio, giacchè $\varphi \circ f \in C^*(X)$ //. (Y è compatto T_2)

Ritorneremo poi su βX, che è assai importante. Per ora ritorniamo a $\mathcal{K}(X)$. È naturale chiedersi, dopo aver visto che in $\mathcal{K}(X)$ ogni sottoinsieme ha estremo superiore, se sia vero che ogni sottoinsieme ha anche estremo inferiore. Se questo avviene, $\mathcal{K}(X)$ ha un minimo. Questo ~~implica~~ equivale a dire che $A_0 = \bigcap \mathcal{A}(X) \in \mathcal{A}(X)$. Vedremo poi come è fatto A_0. Se X è uno spazio <u>localmente compatto</u> non compatto, fra le sue compattificazioni v'è quella di Alexandroff, X^+. È facile verificare (direttamente) che essa è la minima: se S è un'altra compattificazione, la funzione $\varphi^S_{X^+}: S \to X^+$ definita come l'identità su X, e costantemente uguale a ∞ su $S \setminus X$, è chiaramente continua (si osservi che essendo X T_2, localmente compatto, e denso in S, esso è aperto in S)

Quindi, se X è localmente compatto (non compatto) (e T_2), $\mathcal{K}(X)$ ha un minimo, e questo, congiunto al fatto che $\mathcal{K}(X)$ è join-complete, ſ assicura che $\mathcal{K}(X)$ è un <u>reticolo completo</u>. L'anello corrispondente a X^+ deve essere proprio $A_0 = \bigcap \mathcal{A}(X)$. È chiaro che esso sarà l'insieme delle funzioni che hanno "limite finito per $x \to \infty$" e può quindi essere così descritto. $A_0 = \mathbb{R} + C_0(X)$ dove $C_0(X)$ è l'insieme delle funzioni "nulle all'infinito", cioè

$C_0(X) = \{ f \in C(X) : \forall \varepsilon > 0 \ \exists K \subseteq X$, K compatto, tale che $|f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X \setminus K \}$.

Se poi $\mathcal{K}(X)$ è un reticolo completo, allora X ha un minimo, diciamolo T. Mostriamo che tale minimo deve necessariamente essere la compattificazione con un punto (il che implicherà, ovviamente, la locale compattezza di X). Infatti, supponiamo che $T \setminus X$ contenga 2 punti distinti, p e q. Allora $S = T \setminus \{p, q\}$ è sottospazio aperto di T, quindi localmente compatto; e quindi S^+ risulta essere una compattificazione T_2 di S, quindi anche di X. Poiché T è un'altra compattificazione di S, esiste una funzione continua $\varphi_S^T : T \to S^+$ che è l'identità su S, quindi anche su X. Pertanto:

Teorema. <u>Sia</u> X <u>uno sp. di Tychonoff</u>. <u>Sono equivalenti</u>:

i) X <u>è localmente compatto</u>

ii) $\mathcal{K}(X)$ <u>ha un minimo</u> (X^+)

iii) $\mathcal{K}(X)$ <u>è un reticolo completo</u>

Si noti anche che dai teoremi sugli spazi localmente compatti si ha che <u>uno sp. di Tychonoff</u> X <u>è localmente compatto se e solo se</u> $\beta X \setminus X$ <u>è compatto</u>, e anche <u>se e solo se</u> $T \setminus X$ <u>è compatto per ogni</u> $T \in \mathcal{K}(X)$, <u>e se e solo se</u> $T \setminus X$ <u>è compatto per almeno un</u> $T \in \mathcal{K}(X)$.

Applicazioni varie ed esempi.

Sia T uno sp. di Tychonoff, S un sottospazio di T. S è C^*-immerso in T se e solo se $cl_{\beta T} S = \beta S$.

Dim. Infatti, se S è C^*-immerso in T, esso è C^*-immerso in βT; quindi S è C^*-immerso in $cl_{\beta T} S$, che è una compattif. di S. Ma allora $cl_{\beta T} S$ è una copia di βS. Viceversa, se $\beta S = cl_{\beta T} S$, allora S è C^*-immerso nello spazio compatto $cl_{\beta T} S$, il quale è, come ogni compatto, C-immerso in βT. Perciò S è C^*-immerso in T//.

Un immediato corollario è: $cl_{\beta \mathbb{Q}}(\mathbb{N})$, $cl_{\beta \mathbb{R}}(\mathbb{N})$ sono copie di $\beta \mathbb{N}$ - Infatti $\mathbb{N}$ è chiuso negli sp. metrizzabili $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ (che sono considerati con le loro top. usuali) e quindi vi è C-immerso. Questo fatto, ed il teorema di estensione di Stone, mostrano che

$$|\beta \mathbb{N}| = |\beta \mathbb{Q}| = |\beta \mathbb{R}|$$

Infatti, sia $\beta \mathbb{R}$ che $\beta \mathbb{Q}$ contengono copie di $\beta \mathbb{N}$, pertanto $|\beta \mathbb{R}| \geq |\beta \mathbb{N}|$, $|\beta \mathbb{Q}| \geq |\beta \mathbb{N}|$. Sia poi τ una suriezione di $\mathbb{N}$ su $\mathbb{Q}$; poiché $\mathbb{N}$ è discreto, τ è continua. Pertanto τ ha un'estensione $\bar{\tau} : \beta \mathbb{N} \to \beta \mathbb{Q}$; e poiché $\bar{\tau}[\beta \mathbb{N}]$ è un compatto di $\beta \mathbb{Q}$ che contiene $\tau[\mathbb{N}] = \mathbb{Q}$, che è denso in $\beta \mathbb{Q}$, $\bar{\tau}$ è suriettiva, cioè, $|\beta \mathbb{N}| \geq |\beta \mathbb{Q}|$. Analogamente pensando τ come funzione di $\mathbb{N}$ sul sottospazio denso $\mathbb{Q}$ di $\mathbb{R}$, si ha $|\beta \mathbb{N}| \geq |\beta \mathbb{R}|$)

Sia X sp. di Tychonoff. X è connesso se e solo se βX è connesso.

Dim. Se X è connesso, essendo $\beta X = cl_{\beta X}(X)$, e ricordando che la chiusura di un connesso è un connesso, si ha che βX è connesso. Se poi X non è connesso, si ha $X = A \cup B$, dove A, B sono chiusaperti non vuoti e disgiunti di X. Poichè i chiusaperti sono zero-insiemi (un chiusaperto è lo zero insieme della funzione caratteristica del suo complementare) si ha $cl_{\beta X}(A) \cap cl_{\beta X}(B) = \emptyset$, per un'altra proprietà caratteristica di βX. D'altra parte, $\beta X = cl_{\beta X}(X) = cl_{\beta X}(A \cup B) = cl_{\beta X}(A) \cup cl_{\beta X}(B)$. Quindi βX è unione disgiunta di chiusi, non vuoti, cioè, non è connesso.

Quindi $\beta\mathbb{R}$ è connesso, mentre $\beta\mathbb{N}$ e $\beta\mathbb{Q}$ non sono connessi. Anzi, vedremo poi che questi due ultimi spazi hanno essi pure, come $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$, una base di chiusaperti (i.e, sono 0-dimensionali) e sono pertanto <u>totalmente sconnessi</u>.

~~Qldldky~~ Per ora, possiamo dire che nè $\beta\mathbb{N}$, nè $\beta\mathbb{Q}$ possono essere immagini omomorfe di $\beta\mathbb{R}$ (poichè un'immagine continua di un connesso è connessa). ~~[illegible]~~

Invece, $\beta\mathbb{R}$ è immagine continua sia di $\beta\mathbb{N}$ che di $\beta\mathbb{Q}$ (si rifacciano le estensioni di Stone, come nella pag precedente)

Valutiamo ora il cardinale di $\beta\mathbb{N}$. Calcoliamo anzi il cardinale di βX, con X sp. discreto infinito.

<u>Se X è discreto e infinito, allora</u> $|\beta X| = exp(exp|X|)$.
<u>Infatti esiste una biiezione naturale dell'insieme degli ultrafiltri di X su βX.</u>

Dim. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su X. Poichè βX è una compattificazione di X, $\mathcal{U}$ converge in βX verso un punto p, necessariamente unico, giacchè βX è T_2. Se $\mathcal{V}$ è un altro ultrafiltro su X, distinto da $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ non può convergere esso pure a p; infatti esistono $A \in \mathcal{U}$, $B \in \mathcal{V}$ tali che

$A \cap B = \emptyset$, e ciò implica $cl_{\beta X} A \cap cl_{\beta X} B = \emptyset$. Poichè $\{p\} = \bigcap \{ cl_{\beta X} A : A \in \mathcal{U} \}$, $\mathcal{V}$ non può convergere a p, che non è suo punto di chiusura//. Si era visto che gli ultrafiltri su X, per X infinito, sono in numero di $\exp(\exp(|X|))$, pertanto si ha $|\beta X| \geq \exp(\exp(|X|))$. Questo permetterebbe già di concludere, visto che X è denso in βX e βX è T_2; tuttavia, sempre poichè X è denso in βX, ogni punto di βX è limite di qualche ultrafiltro su X. Cioè, l'applicazione $\mathcal{U} \to p$ dove $\{p\} = \bigcap \{ cl_{\beta X} A : A \in \mathcal{U} \}$, è una biiezione dell'insieme degli ultrafiltri su X su βX //

Si impone qualche ulteriore commento sulla biiezione della precedente proposizione. Chiaramente, ogni ultrafiltro fisso $\mathcal{U}_p$, $p \in X$, converge a p stesso; gli ultrafiltri liberi convergono a punti di $\beta X \setminus X$.

Ricordiamo la corrispondenza esistente tra ultrafiltri su X e ideali massimali di F_2^X. Poichè lo spettro massimale di F_2^X è T_2 (ogni primo di F_2^X è massimale) e contiene una copia naturale di X (gli ideali massimali principali, corrispondenti a ultrafiltri fissi, sono una copia di X, come si verifica subito), viene da chiedersi se $\mathcal{M}(F_2^X)$ non sia una copia di βX. Questo si fa facilmente: se ad ogni $p \in \beta X$ si fa corrispondere l'ideale massimale di F_2^X associato all'ultraf. corrispondente, si ha una biiezione τ di βX su $\mathcal{M}(F_2^X)$; ed è chiaro che questa è continua (per $a \in F_2^X$, $\tau^{\leftarrow}[V(a)] = cl_{\beta X}(Z(a))$); pertanto, essendo $\mathcal{M}(F_2^X)$ T_2, e βX compatto, τ è un omeomorfismo.

Il fatto che $\tau^{\leftarrow}[V(a)] = cl_{\beta X}(Z(a))$, $\forall a \in F_2^X$, e che i $V(a)$

sono base di chiusi per ~~β~~ $\mathfrak{M}(F_2^X)$, dice anche che la famiglia $\{ cl_{\beta X}(Z) : Z \subseteq X\}$ è una base di chiusi per βX. Quindi $\beta X \setminus cl_{\beta X}(Z) = cl_{\beta X}(X \setminus Z)$ è una base di aperti per βX. Pertanto, se X è discreto, βX è 0-dimensionale.

Lo spazio W

Consideriamo ora lo spazio $W = W(\omega_1)$, costituito dall'insieme di tutti gli ordinali numerabili, munito della topologia dell'ordine. Poichè W è bene ordinato, una base per il filtro ~~sistema~~ degli intorni di $\alpha \in W$ è costituita dal singolo $\{\alpha\}$ se questo è ordinale non limite; dagli insiemi della forma $]\sigma, \alpha] = \{\beta \in W : \sigma < \beta \leq \alpha\}$ se α è ord. limite. Questi sono chiusaperti, pertanto, W è 0-dimensionale, e, essendo T_1, è $T_{3 1/2}$ (sarebbe anche T_4, come un generico sp. ordinato; comunque questo è più semplice da provare per spazi di ordinali che non nel caso generale). Il completamento ordinale di W è ovviamente $W^+ = W(\omega_1 + 1) = W \cup \{\omega_1\}$ con la top. dell'ordine; W^+ è quindi la compattificazione di W come sp. ordinato (= completamento ordinale) ed essendo anche una compattificazione con un punto, W risulta localmente compatto.

Questo discende facilmente anche dal teorema seguente:

Per ogni $\alpha \in W$, $W(\alpha+1)$ è un sottospazio compatto e metrizzabile di W.

È immediato verificare che la top. dell'ordine di $W(\alpha+1)$ coincide con quella indottavi da W ($W(\alpha+1)$ è un intervallo di W); quindi, poichè $W(\alpha+1)$ è reticolarmente completo, esso è compatto. Poichè $|W(\alpha+1)| \leq \aleph_0$, $w(W(\alpha+1)) \leq |W(\alpha+1)| \leq \aleph_0$, quindi lo sp. di Tychonoff $W(\alpha+1)$, avendo base numerabile, è metrizzabile.

<u>Ogni successione $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di W ha una sottosuccessione convergente.</u>

Dim. Poiché $\{\alpha_n : n\in\mathbb{N}\}$ non è cofinale in W, essendo numerabile, esiste $\alpha\in W$ tale che $\alpha > \{\alpha_n : n\in\mathbb{N}\}$. Pertanto $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha un punto di chiusura nello sp. compatto $W(\alpha+1)$, ed essendo questo C_I, ha una sottosuccessione convergente.

Questo è quindi un esempio di spazio non-compatto, in cui ciò non ostante, ogni successione ha un punto di chiusura. Ciò implica subito che W è pseudo-compatto:

<u>Per ogni</u> $f\in C(W)$, $f[W]$ <u>è compatto in</u> $\mathbb{R}$. <u>Quindi</u> $C(W) = C^*(W)$.

Dim. Basta provare che ogni successione $(f(\alpha_n))_{n\in\mathbb{N}}$ di punti di $f[W]$ ~~converge~~ ha una sottosuccessione convergente. Ciò è banale: si prenda una sottosuccessione $(\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a $\beta\in W$. Quindi $(f(\alpha_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $(f(\alpha_n))_{n\in\mathbb{N}}$ che converge a $f(\beta)$.

Altra fondamentale proprietà di W è la seguente:

<u>Se</u> A, B <u>sono chiusi disgiunti di</u> W <u>uno almeno fra essi non è cofinale in</u> W. <u>Quindi uno almeno di essi è compatto</u>

Dim. Supponiamo che A e B siano entrambi cofinali in W. Si scelga $\alpha_1\in A$; esiste allora $\alpha_2\in B$ tale che $\alpha_2>\alpha_1$; esiste poi $\alpha_3\in A$ con $\alpha_3>\alpha_2$, ... ecc. Così proseguendo si costruisce una successione crescente $\alpha_1<\alpha_2<$. tale che $\alpha_{2n}\in B$, $\alpha_{2n-1}\in A$. Si verifica facilmente che α_n converge a $\beta = \sup_n\{\alpha_n\}$ (stessa dimostrazione usata in Analisi I^a per dim. che una succ. crescente ha per limite il suo estremo superiore). Essendo A, B chiusi, e $\lim_{n\to\infty} \alpha_{2n} = \beta$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_{2n-1} = \beta$, $\beta \in A$, $\beta \in B$, cioè $\beta \in A \cap B$, il che è assurdo //. Da qui si ha un' immediata prova del fatto che W è normale: basta pensare al fatto che in uno sp. di Tychonoff un compatto è sempre completamente separato da ogni chiuso disgiunto da esso.

<u>Per ogni</u> $f \in C(W)$ <u>esiste</u> $\alpha \in W$ (α <u>dipendente da</u> f) <u>tale che</u> f <u>è costante su</u> $W \setminus W(\alpha)$

Dim. Per ogni $\beta \in W$, $W \setminus W(\beta)$ è una copia di W (infatti essi hanno lo stesso ordinale, e poichè la topologia indotta su $W \setminus W(\beta)$ è quella dell' ordine di $W \setminus W(\beta)$, essi coincidono come sp. topologici). Pertanto $f[W \setminus W(\beta)]$ è compatto per ogni β, e quindi $\bigcap_{\beta \in W} f[W \setminus W(\beta)] \neq \emptyset$. Sia r un elem. di questa intersezione. Chiaramente $f^{\leftarrow}[\{r\}]$ è cofinale in W. Ora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{\alpha \in W : |f(\alpha) - r| \geq 1/n\}$ è disgiunto da $f^{\leftarrow}[\{r\}]$ e quindi non è cofinale in W. Pertanto $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ non è cofinale in W. Detto β l'estremo superiore di A, si ha chiaramente $f[W \setminus W(\beta)] = \{r\}$ //.

Questo mostra che W è C^*-immerso in $W^+ = W(\omega_1 + 1)$: basta prolungare $f \in C(W)$ ad una funzione continua $\bar{f} \in C(W^+)$ ponendo $\bar{f}(\omega_1) =$ al valore che f assume da un certo ordinale in poi su W. <u>Quindi $W^+ = \beta W$</u>. <u>Pertanto W ha un' unica compattificazione, pur non essendo compatto.</u>

Vediamo ora che ~~~~ questo spazio ammette anche una unica struttura uniforme. Lo vedremo fra poco attraverso un teorema generale. Vogliamo solo osservare come le considerazioni qui fatte si possano ripetere in buona parte per un arbitrario sp. di ordinali, purchè di sottoinsiemi numerabili cofinali. Ciò sarà oggetto di un futuro esercizio.

Vediamo ora un teorema generale negli spazi che hanno un'unica uniformità:

Teorema. Sia X uno spazio di Tychonoff. Sono equivalenti le condizioni:

i) X ha un'unica compattificazione

ii) $|\beta X \setminus X| \leq 1$

iii) Dati due arbitrari zero-insiemi disgiunti di X, uno di essi è compatto.

iv) X è C^*-immerso in ogni spazio T in cui è immerso

v) X è C-immerso in ogni spazio T in cui è immerso.

vi) X ammette un'unica struttura uniforme.

Dim. i) $\Rightarrow$ ii) Tale compattificazione, unica, coincide con βX, ed è a un tempo la minima e la massima compattif. di X. È chiaro che allora (per un teorema visto) $|\beta X \setminus X| \leq 1$; ii) $\Rightarrow$ i) ovvio.

ii) $\Rightarrow$ iii) Siano Z_1, Z_2 zero-insiemi disgiunti di X. Allora $cl_{\beta X}(Z_1) \cap cl_{\beta X}(Z_2) = \emptyset$. Ma $cl_{\beta X}(Z_1)$, se Z_1 non è compatto, è uguale a $Z_1 \cup \{\infty\}$ (essendo $\{\infty\} = \beta X \setminus X$)), pertanto deve essere $cl_{\beta X}(Z_2) = Z_2$; quindi Z_2 è compatto.

iii) $\Rightarrow$ ii). Sia T una compattificazione di X. Supponiamo che $T \setminus X$ contenga 2 punti distinti p, q. Ogni intorno di p [q] che sia zero insieme di T interseca X in uno zero-insieme. Pertanto, se Z_1, Z_2 sono zero insiemi che sono intorni disgiunti di p, q rispettivamente, o $Z_1 \cap X$ o $Z_2 \cap X$ è compatto. Supponiamo che $Z_1 \cap X$ sia compatto. ~~Allora esso~~ Allora esso è chiuso in T; ma ciò è assurdo, poiché $p \in cl_T(Z_1 \cap X)$, essendo Z_1 un intorno di p in T.

i) $\Rightarrow$ iv) Se X è sottospazio di T, X è sottospazio di βT. Pertanto $cl_{\beta T}(X)$ è una compattificazione di X, che deve coincidere con βX, dato che questa è l'unica compattificaz. di X. Allora X è C^*-immerso (in βT, e quindi) in T. iv) $\Rightarrow$ i) Banale.

Chiaramente v) $\Rightarrow$ iv) e quindi v) $\Rightarrow$ i). Basta poi mostrare che una delle prime 4 implica che X è pseudocompatto.

Mostriamo che ciò segue subito da iii). Supponiamo che esista $f \in C(X) \setminus C^*(X)$, $f \geq 0$. Allora esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di punti di X, tale che $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$. Si ponga $A = \{f(x_{2n}) : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{f(x_{2n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$; A e B sono chiusi (e quindi zero-insiemi) disgiunti di $\mathbb{R}$, pertanto $Z_1 = f^{\leftarrow}[A]$, $Z_2 = f^{\leftarrow}[B]$ sono zero-insiemi disgiunti di X. Ma allora uno di essi, ad esempio Z_1, è compatto; e ciò è assurdo, poiché allora $A = f[Z_1]$ dovrebbe essere compatto. Quindi iv) $\Leftrightarrow$ v).

È chiaro che vi) $\Rightarrow$ i), giacché allora l'unica struttura uniforme è la $\mathcal{C}^*(X)$. Se poi i) vale, allora l'unica struttura ammissibile precompatta per X deve essere la $\mathcal{C}^*(X)$; (un'altra struttura precompatta avrebbe un diverso anello di funzioni uniformemente continue, e un diverso ~~compattificazio~~ completamento). Basta quindi far vedere che:

Ogni struttura ammissibile di uno spazio pseudocompatto X è precompatta.

Ciò è conseguenza del Teorema di pag 142, e della seguente

Proposizione. Sia d una pseudometrica continua sullo spazio topologico X. Ogni sottoinsieme d-discreto di X è C-immerso in X. (Dicendo pseudo-metrica continua si intende chiaramente che d è funzione continua da $X \times X$ con la top. prodotto in $\mathbb{R}$ con la top. usuale).

Dim. Sia E d-discreto in X. Si ponga su X la topologia τ_d della pseudometrica d. Poichè questa è continua, τ_d sarà <u>meno fine</u> della topologia τ di X. Ora, essendo E d-discreto, esso è discreto in X, cioè, la topologia su esso indotta da (X,τ), (e da (X,τ_d)) è la discreta. Sia g una funzione di E in $\mathbb{R}$.

Poichè E è d-discreto, $\overline{E} = cl_{(X,\tau_d)}(E) = \bigcup_{x \in E} cl_{(X,\tau_d)}(\{x\})$. Si estenda g ad una fun. continua $\overline{g}$ su $\overline{E}$ ponendo $\overline{g}(y) = g(x)$ se $y \in cl_{(X,\tau_d)}(\{x\})$; $\overline{g}$ risulta ben definita su $\overline{E}$, perchè gli insiemi $cl_{(X,\tau_d)}(\{x\})$ ~~sono~~ hanno a due a due ~~disgiunti~~ distanza positiva. Poichè $\overline{E}$ è chiuso nello sp. pseudometrico (X,d), vi è C-immerso, quindi $\overline{g}$ si estende a una f continua nella τ_d, che è a più forte ragione continua nella τ //.

Ovviamente

1) Si consideri $C^*(\mathbb{N})$ come spazio uniforme, munito della uniformità generata dalla metrica della sup.norm. Allora a) La sfera unitaria $B = \{ f \in C^*(\mathbb{N}) : \|f\| \leq 1 \}$ non è (pre)compatta (ciò è vero in generale per ogni sp. vettoriale topologico T_2 di dimensione infinita, munito della uniformità naturale; qui però la dim. è più semplice)

b) Ogni funzione uniformemente continua di B in $\mathbb{R}$ è limitata.

2) Sia $(X, \mathcal{U})$ uno sp. uniforme, e sia $C_{\mathcal{U}}(X)$ l'insieme delle funzioni uniformemente continue di $(X, \mathcal{U})$ in $\mathbb{R}$ (usuale). Allora a) $C_{\mathcal{U}}(X)$ è un sottoreticolo e un sottogruppo additivo di $C(X)$ (X munito della topologia unif. di $\mathcal{U}$)

b) $C_{\mathcal{U}}(X)$ non è, in generale, un sottoanello di $C(X)$.

c) $C_{\mathcal{U}}(X)$ separa punti e chiusi di X.

d) Si immerga X in $\mathbb{R}^{C_{\mathcal{U}}(X)}$ mediante l'applicazione diagonale $e_{\mathcal{U}} : X \to \mathbb{R}^{C_{\mathcal{U}}(X)}$ data da $e_{\mathcal{U}}(x) = (f(x))_{f \in C_{\mathcal{U}}(X)}$, $\forall x \in X$. Munendo $\mathbb{R}^{C_{\mathcal{U}}(X)}$ dell'uniformità prodotto delle unif. usuali di $\mathbb{R}$, $e_{\mathcal{U}}$ risulta essere uniformemente continua; ma in generale non è un isomorfismo uniforme di $(X, \mathcal{U})$ su $e_{\mathcal{U}}[X]$ con l'unif. indotta da $\mathbb{R}^{C_{\mathcal{U}}(X)}$. Ciò non ostante, $e_{\mathcal{U}}$ è topologicamente un'immersione.

e) Si provi che se $(X, \mathcal{U})$ è totalmente limitato, allora $C_{\mathcal{U}}(X)$ è un sottoanello di $C^*(X)$, ed $e_{\mathcal{U}}$ è un isomorfismo unif. di X su $e_{\mathcal{U}}[X]$.

3) <u>Banale, ma importante</u>. <u>Sia</u> X <u>un insieme e siano</u> $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ <u>uniformità su X che inducono la stessa topologia</u>. <u>Allora</u>, <u>se</u> $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, <u>e</u> $(X, \mathcal{U})$ <u>è completo, anche</u> $(X, \mathcal{V})$ <u>è completo</u>.

4) <u>Uno</u> spazio topologico completamente regolare (X,τ) si dice uniformizzabile in modo completo quando esiste una uniformità $\mathcal{U}$ ammissibile per (X, τ) tale che $(X, \mathcal{U})$ è completo; si mostri che (X, τ) è uniformizzabile in modo completo se e solo se è completo nella sua uniformità universale $\mathcal{U}_\tau$. (usare 3)

5) Si provi che ogni struttura unif. ammissibile per uno sp. topologico (X, τ) contiene una struttura ammissibile precompatta (= totalm. lim.). (Sugg: si considerino le funzioni limitate unif. continue per la struttura data).

6) Sia X uno spazio discreto infinito. È sempre possibile trovare una metrica ammissibile per X tale che (X, d) <u>non</u> sia completo?.

7) Si provi che uno spazio completamente regolare (X, τ) ha una minima uniformità ammissibile se e solo se è localmente compatto. Si descriva, in tal caso, questa minima uniformità, e si dica chi è il completamento di (X, τ) per tale uniformità, supposto che (X, τ) sia per di più di Hausdorff.

8) <u>Importante</u>. <u>Sia</u> X <u>uno spazio di Tychonoff</u>, <u>e siano</u> $T, S \in \mathcal{K}(X)$, $S \leq T$. <u>Si provi che allora</u> $\varphi^T_S[T \setminus X] = S \setminus X$. (Sugg: basta mostrare che $(\varphi^T_S)^{\leftarrow}[X] = X$. Sia infatti $Y = (\varphi^T_S)^{\leftarrow}[X]$. Allora $X \subseteq Y \subseteq T$, e $\varphi^T_S | Y$ mappa Y in X, ed è

l'identità ~~su~~ su X. Ma l'insieme $\{y \in Y : \varphi^T_0(y) = y\}$ è chiuso in Y ...) 165

9) Si provi che $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ ha 2 componenti connesse, e cioè ~~$\beta\mathbb{R}_+$~~ $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}$, $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}_- \setminus \mathbb{R}$, ($\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_- = -\mathbb{R}_+$) (si ha infatti $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} cl_{\beta\mathbb{R}}([n, +\infty))$; si ricordi che l'intersezione di una catena di compatti T_2 connessi è un compatto connesso)

10) Si deduca da 9) che se $\alpha\mathbb{R}$ è una compattif. di $\mathbb{R}$ tale che $\alpha\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ è finito, allora $|\alpha\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}| = 1$ oppure $|\alpha\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}| = 2$.

11) Si provi che, se $n > 1$, $\beta\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$ è connesso; se ne deduca che l'unica compattif. $\alpha\mathbb{R}^n$ di $\mathbb{R}^n$ con il "resto" ($\alpha\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$) finito è quella con 1 punto.

12) Uno spazio di Tychonoff si dice <u>σ-compatto</u> quando è unione <u>numerabile</u> di suoi sottospazi compatti. Si provi:

(a) Ogni spazio σ-compatto è spazio di Lindelöf.

(b) Uno spazio localmente compatto T_2 è σ-compatto se e solo se è di Lindelöf.

(c) Sia X uno spazio di Tyconoff. Sono equivalenti:

(i) $\beta X \setminus X$ è uno zero-insieme di βX

(ii) Per ogni compattificazione T di X, $T \setminus X$ è zero-insieme di T

(iii) Per una compattif. S di X, $S \setminus X$ è zero insieme di S

(iv) X è localmente compatto e σ-compatto.

13) Sia X uno sp. di Tychonoff, ~~se~~ ~~[illegible]~~ Si provi che se $|\beta X \setminus X| = \xi \geq \aleph_0$, allora X ha almeno ξ compattificazioni distinte (si prendano 2 punti distin-

-ti $p, q \in \beta X \setminus X$, e si indichi con $S_{\{p,q\}}$ la compattif. di X ottenuta prendendo la compattif. con un punto di $\beta X \setminus \{p,q\}$. Si provi che se $\{u,v\} \neq \{p,q\}$, allora $S_{\{p,q\}}$ non è equivalente a $S_{\{u,v\}}$). Se ne deduca che per ogni sp. discreto infinito X, $|\mathcal{K}(X)| = \exp(\exp(|X|))$

14) Sia $(X, \mathcal{U})$ uno spazio uniforme, tale che $\mathcal{U}$ abbia una base $\mathcal{B}$ totalmente ordinata dall'inclusione. Si provi che allora X munito della topologia uniforme o è metrizzabile, o è uno spazio in cui ogni G_δ è aperto. In particolare, quindi, ogni zero insieme sarebbe, in questo secondo caso, aperto (uno sp. topologico così fatto, se è per di più di Tychonoff, si dice P-spazio). Sempre in questo secondo caso, si provi che $(X, \mathcal{U})$ non è precompatto (se lo fosse, il completamento sarebbe uno sp. compatto con la stessa proprietà, di avere una base totalm. ordinata per l'uniformità; si provi che ciò è impossibile se lo sp. non è metrizzabile).

15)