

Vedi
Thomson
p. 124-125
esempi di A.F.
non psicologici

Metodo di Thurstone

Le matrici
in un certo...

ISTITUTO DI PSICOLOGIA DELL'UNIVERSITA DI PADOVA

Testi per la scuola di specializzazione

avvertire
che non si
può leggere a pezzi

Fabio Metelli

un cap. paragrafo in piedi
in come Spearman
è arrivati alla
teoria dei due fattori

Non parte
(Spearman) e parte a

Analisi fattoriale

Introduzione al metodo
per psicologi, sociologi e pedagogisti

Tagliare il Δ dal
fattore di gruppo

A partire dal fattore
di gruppo, chiamare F
il fattore generale

chi è il
fattore di
errore?

e $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$



C. E. Giunti - Universitaria - Firenze

Appendici

1. Concetti statistici e formule necessari per l'A.F.
2. Funzioni goniometriche (seno, coseno, tangente)
3. Come preparare i dati per l'elabor. elettronica

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a header or title.

Second block of faint, illegible text.

Third block of faint, illegible text.

Fourth block of faint, illegible text.

Fifth block of faint, illegible text.

Sixth block of faint, illegible text at the bottom of the page.

PREFAZIONE

L'analisi fattoriale e' uno strumento di ricerca scientifica scoperto e sviluppato ad opera di psicologi. L'idea geniale di Spearman, che inizialmente appariva soltanto la soluzione matematico-statistica di una *impasse* in cui si trovava la Psicologia scientifica, o meglio quel capitolo della Psicologia scientifica che si occupa della misura delle costanti individuali per mezzo dei tests, generalizzata e radicalmente trasformata da Thurstone, e' diventata un metodo scientifico generale, utilizzabile e utilizzato dalle piu' diverse discipline scientifiche, ma di particolare utilita' soprattutto per le scienze sociali.

Infatti, se e' vero che l'analisi fattoriale puo' essere utilizzata anche la' dove e' possibile e fruttuosa la sperimentazione, come sussidio all'esperimento, e' certo che l'uso di questo strumento diventa prezioso e quasi insostituibile, dove le condizioni non si possono variare a piacere, dove l'esperimento rischia di creare situazioni artificiali, in cui cioe' la deformazione, inevitabile in ogni situazione sperimentale, riguarda proprio le condizioni che costituiscono l'obiettivo della ricerca. E' evidente che condizioni come l'eta', la costituzione, il sesso, l'intelligenza, non si possono variare a piacimento; ma e' altrettanto vero che non si possono variare indipendentemente le condizioni sociali, economiche, politiche, culturali.

E' per questo che le scienze sociali - e fra queste quella parte della Psicologia che rientra nell'ambito delle Scienze sociali - hanno dovuto piu' delle altre scienze fondarsi sul metodo statistico, di cui, pur nell'indipendenza della sua origine, l'analisi fattoriale costituisce un originale sviluppo.

I metodi statistici - a parte la descrizione sintetica dei risultati - offrono alla scienza due contributi essenziali: la logica della generalizzazione, con la sua interpretazione probabilistica, e il metodo di analisi di condizioni non manipolabili, cioe' delle condizioni che non sono suscettibili di essere variate *una per volta*, mantenendo costanti tutte le altre. Il contributo dell'analisi fattoriale puo' essere interpretato come un ulteriore progresso in questa direzione. Ma la sua funzione piu' importante e' di consentire una prima esplorazione di nuovi campi di ricerca, ai limiti della

IV - PRAFAZIONE

scienza (Thurstone), la' dove le conoscenze non sono sufficientemente fondate per suggerire ipotesi ben definite; dove le ipotesi sono vaghe o dove mancano del tutto, l'esplorazione fattoriale puo' offrire una prima sistemazione dei fatti, alla quale seguiranno ipotesi piu' definite, e controlli compiuti con i metodi della statistica classica.

La funzione essenziale dell'analisi fattoriale e', infatti, quella di scoprire le unita' funzionali in un insieme di variabili, cioe' di sostituire ad una piu' o meno grande quantita' di condizioni superficialmente apparenti, interrelate fra loro, un numero limitato di condizioni di fondo indipendenti, cioe' i fattori del fenomeno che e' oggetto dell'indagine.

A queste qualita', che fanno dell'analisi fattoriale un metodo insostituibile in quei campi in cui esso trova una naturale applicazione, fanno riscontro due limitazioni alla sua utilizzazione, una intrinseca e l'altra estrinseca. La prima e' costituita dalla indeterminazione della soluzione fattoriale. Nella generalizzazione di Thurstone il problema fattoriale ha un numero infinito di soluzioni; ed anche il criterio della "semplicita' della struttura", introdotto da Thurstone, stabilisce qual e' tra le infinite soluzioni matematicamente equivalenti la soluzione scientificamente accettabile, ma non garantisce in senso assoluto l'unicita' della soluzione, e soprattutto non offre il mezzo per stabilire se tale soluzione ottimale sia stata raggiunta, o sia, comunque, raggiungibile. Ma e' una difficolta' che si supera considerando il risultato di un'analisi fattoriale come un'ipotesi che va confermata, ricorrendo al criterio della riproducibilita' dei fattori e al controllo della sperimentazione e dei metodi della statistica classica.

La limitazione estrinseca e' dovuta alla natura fondamentale matematica della teoria e al fatto che gli studiosi delle diverse scienze sociali che dell'analisi fattoriale dovrebbero essere i consumatori non hanno, di regola, o per lo meno non avevano finora, una preparazione matematica.

Questa limitazione non ha mancato di influire sulla stesura dei trattati, anche sui trattati fondamentali dei pionieri, L.L. Thurstone, C. Burt e G. Thomson, i quali, ognuno in diversa misura, hanno tentato di tener conto del tipo di cultura degli studiosi ai quali era destinata l'esposizione del metodo, pur senza rinunciare all'esigenza di presentarne rigorosamente i fondamenti matematici e logici.

Gli altri autori di esposizioni piu' o meno ampie e complete adottano diverse forme di compromesso, che stanno fra due estremi: da un lato il trattato scritto in linguaggio matematico, praticamente illeggibile per il non-iniziato, e dall'altro il ricettario, un insieme di regole pratiche su come eseguire i calcoli, senza che ne sia spiegato il significato.

La presente trattazione e' destinata agli studiosi di scienze sociali non-matematici e tuttavia si propone di rendere comprensibile la teoria, non solo nella sua formulazione generale, ma giustificandone e rendendone comprensibili gli sviluppi e fornendo sempre, quando e' possibile, la prova dei diversi procedimenti. Le nozioni di algebra e di geometria richieste sono elementari e vengono utilizzate progressivamente, cosi' da richiamare delle cono-

scenze scolastiche in parte dimenticate. Le limitate nozioni non comprese nei programmi degli studi secondari, e tuttavia indispensabili alla trattazione dell'argomento, vengono presentate di volta in volta nel punto in cui si rendono necessarie. Questo procedimento e' stato preferito a quello piu' elegante, adottato da vari trattatisti, di far precedere la trattazione dell'analisi fattoriale da un'introduzione matematica in cui sono svolti quei capitoli della matematica la cui conoscenza e' presupposta nella trattazione; e cio' nella convinzione che, mentre e' relativamente facile richiedere al lettore che e' giunto ad un certo punto della trattazione, lo sforzo necessario per impadronirsi di un concetto o di un'operazione indispensabile a proseguire nella lettura, e' vano esigere lo studio di un capitolo di matematica come premessa alla lettura del libro.

L'esperienza didattica e' responsabile di alcune caratteristiche della trattazione. I brevi sviluppi algebrici sono inframmezzati da chiarimenti, che dal punto di vista matematico sono certamente superflui; ma si e' voluto di proposito che la mancanza di ridondanza, che rende cosi' difficile il linguaggio matematico, fosse evitata in un libro destinato a chi manca di questa preparazione specifica. Da questo stesso punto di vista si giustificano le ripetizioni, che di proposito sono state inserite ogni qualvolta viene ripreso un concetto la cui assimilazione e' necessaria per ulteriori sviluppi.

Anche le nozioni di statistica sono introdotte di volta in volta, quando sono richieste, tranne le due nozioni elementari di correlazione e di scarti ridotti, che sono presupposte. Sarebbe stato facile introdurre anche queste due nozioni, o presentarle in una premessa o in un'appendice; cio' non e' stato fatto in quanto e' ben difficile che chi non abbia dimestichezza con la statistica elementare e soprattutto con l'uso della correlazione - la cui nozione e' il fondamento di tutto l'edificio dell'analisi fattoriale - possa seguirne con profitto la trattazione.

Questa trattazione differisce dalle altre anche perche' non solo inizia con la teoria di Spearman - che giustamente ormai si considera superata, e di interesse esclusivamente storico - ma da' uno sviluppo abbastanza ampio alla trattazione di tale teoria. Cio' e' stato fatto nella convinzione - confortata dall'esperienza - che la teoria monofattoriale di Spearman, nella sua relativa semplicita', rappresentasse la migliore introduzione alla teoria plurifattoriale, molte delle cui difficolta' possono essere superate agevolmente partendo dalla conoscenza della teoria di Spearman. Cosi' pure, a differenza di quanto fa Thurstone, ma in accordo con la maggior parte dei trattatisti, sono state presentate prima le strutture e le rotazioni ortogonali e solo a partire da queste le strutture e le rotazioni oblique, benché, proprio come la teoria monofattoriale rispetto alla teoria plurifattoriale, le strutture e le rotazioni ortogonali rappresentino soltanto un caso particolare rispetto alle strutture e alle rotazioni oblique.

Un'ultima particolarita' di questa trattazione richiede di essere giustificata. Con Thurstone e soprattutto dopo Thurstone l'analisi fattoriale, che fino allora rappresentava soltanto un procedimento per sostituire a quelle

VI - PREFAZIONE

misure arbitrarie della personalita' che sono i tests, e che si erano moltiplicate in una varieta' caleidoscopica, un numero limitato di misure indipendenti e di significato ben determinato - *i fattori*, come tratti essenziali della personalita' - ha esteso le sue finalita' diventando un metodo generale per sostituire a delle variabili arbitrarie, scelte in base ad un giudizio intuitivo, le condizioni determinanti di un fenomeno. Il campo dei tests rappresenta, dunque, ormai, soltanto un particolare settore di applicazione dell'analisi fattoriale; e tuttavia in tutti i capitoli di questa trattazione, tranne nell'ultimo, si fa riferimento sempre e soltanto ai tests.

Quest'apparente incongruenza e' stata dettata dall'esigenza di chiarezza, o meglio di comprensibilita' della trattazione. La teoria e la tecnica fattoriale richiedono un notevole sforzo da parte di chi vi si appressa per la prima volta. Nel passare a considerare relazioni via via piu' complesse e' vitale per il lettore avere qualche cosa di stabile a cui riferirsi. Questo elemento stabile e' costituito dalla triade soggetti-tests-fattori che funziona da sistema di riferimento: la comprensione di ogni nuova struttura, di ogni nuova forma di rappresentazione geometrica avviene chiedendosi dove e come sono rappresentati i fattori, i tests e i soggetti. Se invece che di tests si fosse parlato di variabili, sarebbe venuto a mancare anche il riferimento stabile ai soggetti, poiche' la correlazione fra due variabili si puo' determinare in base a condizioni che nulla hanno a che fare con i soggetti umani. Per questa ragione si e' sempre fatto riferimento ai tests, accennando solo di tanto in tanto al fatto che invece di tests si possono prendere in considerazione altre variabili, allo scopo di creare un aggancio per la generalizzazione introdotta nell'ultimo capitolo.

Questo volume compare in edizione provvisoria per ragioni contingenti. Specializzandi e studenti hanno bisogno di avere a disposizione un testo che li introduca alla comprensione e all'utilizzazione del metodo. Limitatamente a tale finalita' la presente trattazione puo' considerarsi conclusa, in quanto comprende la teoria del metodo generalmente in uso e la descrizione dettagliata dei procedimenti necessari per applicarlo. Nell'edizione definitiva e' prevista, fra l'altro, la trattazione dei fattori di ordine superiore al primo, dei metodi di analisi diretta, senza rotazione, del metodo di analisi in componenti principali, del metodo analitico di rotazione di Horst, dei metodi automatici di analisi mediante i calcolatori elettronici, dei metodi di analisi dei dati grezzi (anziche' delle correlazioni fra i dati); inoltre sara' dato maggiore sviluppo agli argomenti trattati in appendice alla presente trattazione, ed in particolare ai campi di applicazione dell'analisi fattoriale (con esempi tratti dalla letteratura scientifica).

Nell'edizione provvisoria le citazioni sono ridotte al minimo; anche a questo difetto sara' posto riparo nell'edizione definitiva. Qui non mi resta che esprimere il mio debito di riconoscenza agli autori delle opere a cui devo prima di tutto la conoscenza dell'argomento - G. Thomson, L.L. Thurstone, C. Burt, R. Cattell, H.H. Harman, J.P. Guilford, R. Husson, B. Fruchter, K.J. Hplzinger - e dalle cui presentazioni ho tratto frequente ispirazione per le

vie seguite nella mia trattazione (1). Un particolare ringraziamento devo rivolgere alla mia assistente dott. Dora Capozza che ha riletto il dattiloscritto di questo volume e, appartenendo alla piccola ma eletta schiera degli utilizzatori dell'analisi fattoriale, mi ha permesso di evitare alcune sviste e imprecisioni, e alla sig.na Marcella Valesio, tecnico dell'Istituto di Psicologia sperimentale, che ha espletato con competenza il delicato e faticoso compito di eseguire tutti i calcoli. E ringrazio gli altri miei collaboratori e i miei allievi che con le loro intelligenti richieste di chiarimento mi hanno spinto a chiarire a me stesso, prima che agli altri, gli argomenti qui trattati.

(1) Purtroppo non ho potuto utilizzare che in minima parte l'elegante trattato del Reuchlin, che fra l'altro e' un modello di aggiornamento bibliografico e una miniera di notizie, perche' quando esso e' uscito avevo in gran parte concluso questa prima stesura. Conto di servirmene per l'edizione definitiva.

The first part of the report deals with the general situation of the country and the progress of the work done during the year. It is followed by a detailed account of the various projects and the results achieved. The report concludes with a summary of the work done and a list of the names of the persons who have been engaged in the work.

The second part of the report deals with the financial statement of the year. It shows the total amount of the income and the expenditure for the year. It also shows the balance of the fund at the beginning and at the end of the year. The report concludes with a list of the names of the persons who have been engaged in the work.

The third part of the report deals with the accounts of the various projects. It shows the progress of the work done during the year and the results achieved. It also shows the amount of the income and the expenditure for each project. The report concludes with a list of the names of the persons who have been engaged in the work.

The fourth part of the report deals with the accounts of the various projects. It shows the progress of the work done during the year and the results achieved. It also shows the amount of the income and the expenditure for each project. The report concludes with a list of the names of the persons who have been engaged in the work.

Parte Prima

LA TEORIA DEI DUE FATTORI

1914

LA TENDENCIA DEL MUNDO

El mundo se encuentra en un momento de gran agitación y de profunda crisis. Las fuerzas que se combaten en el campo de la guerra mundial, se reflejan en el campo de la cultura y de la ciencia. La guerra ha puesto de manifiesto la decadencia de la civilización occidental y ha abierto el camino a las nuevas fuerzas que se levantan en el oriente y en el sur.

La ciencia, que hasta ahora se había limitado a describir y explicar el mundo, se encuentra ahora en un momento de profunda crisis. Los descubrimientos de la física y de la química han puesto de manifiesto la limitación de la ciencia clásica y han abierto el camino a las nuevas ciencias que se levantan en el oriente y en el sur.

La cultura, que hasta ahora se había limitado a imitar y reproducir el mundo, se encuentra ahora en un momento de profunda crisis. Las nuevas corrientes de pensamiento que se levantan en el oriente y en el sur, están poniendo de manifiesto la limitación de la cultura occidental y están abriendo el camino a las nuevas culturas que se levantan en el oriente y en el sur.

En este momento de crisis, el mundo se encuentra en un momento de profunda agitación y de profunda crisis. Las fuerzas que se combaten en el campo de la guerra mundial, se reflejan en el campo de la cultura y de la ciencia. La guerra ha puesto de manifiesto la decadencia de la civilización occidental y ha abierto el camino a las nuevas fuerzas que se levantan en el oriente y en el sur.

1. La crisi della psicomatria all' inizio del secolo

I procedimenti di analisi fattoriale, che attualmente costituiscono un capitolo essenziale della metodologia quantitativa delle scienze sociali e vanno acquistando il carattere di metodo scientifico generale, non limitato alle sole scienze sociali, sono nati come corollario alla teoria dei tests mentali e devono la loro origine alla situazione di crisi, determinatasi dopo l'invenzione dei tests.

L'invenzione di strumenti obbiettivi per la misura delle funzioni mentali (1) e delle prestazioni professionali e scolastiche aveva suscitato entusiasmo e speranze ambiziose nei giovani psicologi. Il numero dei tests era cresciuto a dismisura, poiche' data la rudimentale metodologia, bastava un' idea originale a giustificare un nuovo test e un po' di iniziativa a realizzarlo e diffonderlo. Ma questa stessa ricchezza di strumenti contribuì a mettere in evidenza una serie di difficoltà insite nel loro uso.

In primo luogo, l'aumentare del numero dei tests mentre da un lato corrispondeva ad una creazione di strumenti destinati a misurare con finezza discriminativa sempre crescente, le diverse funzioni psichiche e le varie capacità acquisite dei singoli individui, d'altra parte si concretava anche in una sovrabbondanza di strumenti diversi, destinati alla misura di una stessa funzione o capacità. Vi erano allora, come vi sono attualmente, numerosi tests deputati a misurare l'intelligenza, numerosi tests di memoria, numerosi tests di attenzione, diversissimi nel contenuto, ma uguali nell' "etichetta". Erano tutti equivalenti, era cioè indifferente usare l'uno o l'altro, o si dovevano distinguere tests più o meno "buoni"? In quest'ultimo caso quale era il criterio per decidere se un test era migliore di un altro? E in che senso i tests

(1) In questo caso la parola "funzione" è usata nel suo significato biologico.

erano strumenti piu' o meno buoni? In quanto costituivano strumenti di misura piu' o meno inficiati da errori non sistematici, cioe' soggiacenti all'influenza di condizioni casuali, o perche' misuravano qualche cosa d'altro anziche' la funzione psichica che avrebbero dovuto misurare?

Lo stesso problema si ripresentava per altre vie. Diversi tests venivano presentati come misure differenziate di una stessa funzione fondamentale: "attenzione concentrata", "attenzione diffusa", "attenzione multipla". Si trattava di misure della stessa funzione, agente in condizioni diverse, o di funzioni diverse?

La questione piu' importante che si imponeva dai piu' diversi punti di vista era quella della legittimita' di attribuire le misure ottenute mediante il test, a una determinata funzione psichica: in base a che cosa poteva affermare l'inventore di un test, che si trattava di un test di intelligenza? La domanda ne presupponeva un'altra, sostanziale: che cos'e' l'intelligenza, l'attenzione, la memoria? Le risposte non mancavano, ma data la molteplicita' delle teorie, se il singolo test definiva la funzione in base a una determinata teoria ed era costruito in base ad essa, un altro test poteva essere costruito in base a un'altra teoria: cio' portava ad un'insoddisfacente relativita' delle misure e dei loro significati.

Non si trattava soltanto di questioni di natura teoretica che rendevano incerto il significato delle misure. Se si guardava soltanto ai risultati ottenuti applicando i tests ci si trovava di fronte allo stesso problema. Uno stesso individuo dava risultati diversi in due diversi tests portanti la stessa etichetta: a che cosa si doveva attribuire cio'? Alla diversita' essenziale dei tests o alle diverse condizioni in cui si trovava il soggetto quando era stato sottoposto all'uno o all'altro test?

Lo strumento obbiettivo che era apparso la grande conquista della psicologia alla fine del secolo, rivelava un grandissimo difetto, apparentemente ineliminabile: misurava obbiettivamente qualche cosa che non si poteva obbiettivamente definire.

2 Il controllo obbiettivo: la correlazione come misura dell'affinita'

Esisteva lo strumento adatto per una determinazione quantitativa dell'inquietante fenomeno: il calcolo delle correlazioni, applicato dal suo stesso inventore, Francis Galton, allo studio dei fenomeni psichici. In termini di correlazione il problema si poteva porre, grosso modo, nei seguenti termini. Se due diversi strumenti misurano la stessa variabile (1) possono bensì dare risultati diversi per lo stesso individuo, in seguito alla diversita' delle scale di misura usate per ogni singolo

(1) Ogni funzione rappresenta una variabile, in quanto assume valori diversi per i diversi individui.

strumento (1), ma la correlazione fra le due serie di misure dev' essere perfetta ($r = 1,00$) entro i limiti dell'errore casuale. D'altra parte le applicazioni dei tests offrono la possibilita' di controllare anche l'ipotesi inversa: le misure relative a due variabili (2) sembrerebbero dover risultare prive di correlazione ($r = 0,00$), sempre entro i limiti dell'errore casuale, ove si tratti di variabili diverse e indipendenti.

I risultati del calcolo delle correlazioni, pur nella loro diversita' rappresentano una sostanziale confutazione delle due predette ipotesi. La correlazione fra due tests deputati a misurare la stessa funzione psichica risulta non solo inferiore all'unita', ma nettamente al di sotto del limite determinato dall'incostanza dei tests impiegati (3), cioe', al di sotto del limite dell'errore casuale. D'altra parte le correlazioni fra tests destinati a misurare funzioni mentali diverse risultano di regola positive e significativamente diverse da zero.

In altre parole, quelle che dovevano essere misure di una stessa funzione mentale risultavano troppo diverse per essere misure di una stessa variabile, mentre quelle che dovevano essere misure di funzioni mentali diverse, risultavano troppo simili tra loro. Di conseguenza le correlazioni fra misure di diverse funzioni mentali risultavano essere di un ordine di grandezza se non analogo, almeno non molto diverso da quello delle correlazioni tra le misure di una stessa funzione psichica.

Il calcolo delle correlazioni confermava dunque in pieno la perplessita' sorta a proposito della validita' e del significato delle misure delle funzioni mentali. Solo una trasformazione radicale della concezione delle funzioni psichiche poteva far uscire la psicometria dall'impasse in cui si trovava. Non si trattava soltanto di sostituire una nuova teoria ad altre non accettabili, ma la nuova teoria per essere soddisfacente doveva avere carattere quantitativo e fondarsi proprio sul calcolo delle correlazioni, spiegando l'aspetto apparentemente antinomico dei risultati che avevano provato l'inaccettabilita' delle posizioni precedenti.

3. La soluzione di Spearman

La soluzione non giunse dai Laboratori di Psicologia ne' dagli studiosi accademici. Uno studioso inglese che, strano a dirsi, proveniva dalla carriera militare, invio' all'*American Journal of Psychology* un articolo intitolato "General Intelligence, objectively determined and

(1) I punteggi grezzi di due tests possono differire per es. per il diverso numero di problemi contenuti in ogni test.

(2) Per es.: intelligenza e memoria, intelligenza e attenzione.

(3) Una correlazione fra due tests non puo' superare una certa grandezza ($\sqrt{r_{xx}r_{yy}}$) che dipende dalla fedelta' (o costanza) di ogni singolo test (vedi Cap. II, § 6).

measured", che offriva una soluzione al problema posto dai risultati del calcolo delle correlazioni fra le misure delle funzioni psichiche. P Pubblicato nel 1904, l'articolo procurò immediatamente all'autore una posizione eminente fra gli studiosi di psicologia.

Charles Spearman, che da qualche anno aveva abbandonato definitivamente la carriera militare, si era stabilito a Lipsia per dedicarsi allo studio della psicologia con Wundt. Ma pochi anni dopo l'Università di Londra gli offerse un insegnamento ed un laboratorio, dove poteva svolgere le ricerche necessarie a dare un fondamento empirico alla sua teoria.

La teoria di Spearman è una teoria matematico-statistica e sarà esposta nei capitoli seguenti. È utile tuttavia far precedere una presentazione sommaria dell'originalissima concezione delle funzioni mentali di Spearman alla trattazione sistematica della teoria.

Vale La teoria di Spearman costituisce una soluzione della difficoltà, apparentemente insuperabile, rappresentata dal risultato del calcolo delle correlazioni tra i tests: che tutti i tests deputati a misurare funzioni mentali o abilità, sia quelli destinati a misurare la stessa funzione, sia quelli destinati a misurare funzioni diverse, sono positivamente correlati fra loro. Spearman risolve la difficoltà interpretando tale risultato come dovuto al fatto che tutti i tests funzionali e attitudinali, qualunque sia la loro "etichetta", rappresentano misure più o meno impure di una stessa funzione.

V misurabile Secondo la teoria di Spearman ogni prestazione dipende dalla cooperazione di due funzioni o fattori mentali indipendenti: un fattore generale (G), che agisce in tutte le prestazioni, ed un fattore specifico (S), diverso per ogni prestazione. Il test mentale rappresenta un comportamento particolare, una prestazione di cui si ottiene una misura, diversa da soggetto a soggetto: *il livello della prestazione dipende a sua volta dal livello di due fattori, G ed S , che sono presenti ciascuno in misura diversa nei singoli individui e concorrono in misura diversa in ogni diversa prestazione.* Essendo indipendenti, i due fattori sono ovviamente privi di correlazione fra loro.

2 Consideriamo un esempio. Un test t consistente in una serie di problemi espressi mediante disegni: il compito consiste nello scoprire dei rapporti di analogia fra figure. Con i procedimenti che saranno illustrati nel capitolo successivo, sia stata calcolata la formula fattoriale $Z_t = 0,90 G + 0,44 S_t$, per cui il test t risulta fortemente saturo del fattore G e poco saturo di un particolare fattore S_t , cioè il successo nel test dipende soprattutto dal fattore G , e relativamente poco dal fattore S_t .

Vediamo anzitutto che cosa può significare l'incidenza di G e di S per questo test. Nella prestazione che si richiede al soggetto vi è anzitutto il problema - la ricerca dell'analogia - che può essere presentato anche in forma diversa da quella assunta in questo particolare

test. Un test che richieda la ricerca di rapporti di analogia puo' essere costruito con una serie di disegni diversa da quella utilizzata: si puo' costruire tutta una serie di tests che pongono ai soggetti lo stesso compito utilizzando un diverso materiale.

Ma la variazione del "materiale" del test puo' andare molto al di la': si possono costruire tests di analogie che presentano il problema anziche' in forma "pittorica", in forma verbale, o numerica. In tutte queste variazioni del test il problema che si pone ai soggetti rimane sostanzialmente lo stesso, ed e' quindi comprensibile che l'abilita' di risolvere problemi di questo genere rappresenti qualche cosa di piu' generale, una caratteristica o attitudine che si mette a frutto in una varietas di situazioni. Ma non c'e' ragione di ritenere che tale attitudine consista soltanto in una limitata abilita' a cogliere le analogie: l'abilita' di comprendere i rapporti tra analogie puo' essere il sintomo di un'abilita' molto piu' generale.

D'altra parte il diverso risultato ottenuto da diversi soggetti nel test di analogie rappresentate con disegni non dipende soltanto dalla diversa capacita' di comprendere i rapporti tra analogie, ma anche dalla capacita' di cogliere il problema nella particolare forma in cui e' presentato. Lo stesso problema e' risolto piu' facilmente da un soggetto in termini verbali, da un altro se illustrato con disegni. Ma anche caratteristiche piu' particolari, come il tipo del disegno, schematico o no, le particolari classi di oggetti astratti o concreti, su cui vertono le analogie, il particolare tipo di conoscenze che essi implicano influiscono nel senso di rendere piu' o meno accessibile quel test a particolari soggetti.

Il test presenta dunque due aspetti nettamente diversi: sotto un aspetto e' il rappresentante di una grandissima varietas di tests (esistenti o possibili); per l'altro aspetto invece rappresenta una situazione unica per la sua fattispecie particolare. Tutti e due gli aspetti concorrono a determinare il rendimento di un soggetto, in quanto mettendo in gioco attitudini diverse e indipendenti, possono indipendentemente favorirlo o danneggiarlo.

Ma si tratta di due attitudini profondamente diverse. L'una e' un'attitudine che si riveleras utile in moltissime situazioni, e il test e' solo un'occasione per metterla in evidenza; l'altra e' un'attitudine particolarissima, tanto particolare, che e' utile soltanto a superare quel determinato test: il che equivale a riconoscerne l'inutilita'. Si tratta, in realtas, di qualche cosa che a nessuno puo' interessare di misurare mediante un test, cioe' di un disturbo, ma di un disturbo ineliminabile. Senza questo disturbo il test ci darebbe una misura pura dell'attitudine generale, che sarebbe di grande utilita'.

Il risultato conseguito da un soggetto nel test dipenderas dalla misura in cui egli dispone dei due fattori. La misura nella quale in questo ipotetico test i due fattori contribuiscono al successo e' di-

versa in quanto, come e' stato detto, $G : S = 0,9 : 0,42$; cioe' per questo test il fattore G conta circa il doppio del fattore S .

Di due soggetti la cui struttura mentale sia caratterizzata, per l'uno da un fattore G molto elevato e da un fattore S medio, per l'altro da un fattore G medio e da un fattore S molto elevato, il primo raggiungera' un risultato superiore nel test qui considerato. Con cio' pero' non si intende affermare che un soggetto che ha un fattore G piu' elevato di un altro soggetto *debba* percio' riuscire meglio nel test. Un fattore S molto piu' elevato puo' ipercompensare un fattore G relativamente basso e determinare un risultato migliore.

Conoscendo la misura in cui un soggetto dispone dei due fattori, si potrebbe prevedere esattamente (nei limiti dell'incidenza dei fattori casuali) il risultato del soggetto nel test; ma in realta' quello che si conosce (o si puo' conoscere, sottoponendo il soggetto al test) e' il risultato del soggetto nel test. Da questo solo dato non e' possibile ricavare la misura dei fattori del soggetto, poiche', come abbiamo veduto, lo stesso risultato nel test si puo' ottenere partendo da livelli fattoriali diversi (1).

Se abbandoniamo il test di analogie 1, di cui ci siamo finora occupati, per prendere in considerazione un altro test, 2, ci si puo' presentare un quadro completamente diverso. Analizzando il test col procedimento di Spearman otterremo, anche in questo caso, la composizione fattoriale del test in due fattori G , ed S_2 . Il fattore G e' sempre lo stesso, mentre il fattore specifico e' diverso per ogni test. Ed e' diversa la formula propria di ogni test.

Sia, ad esempio, il test 2 un test di attitudine musicale. In questo caso particolare la formula fattoriale sara' opposta a quella del test di analogie: la "saturazione" del test nel fattore G e' minima mentre e' massima la "saturazione" in un particolare fattore S . In altre

(1) Si tratta di un'equazione a due incognite $z_1 = 0,90 G + 0,44 S_1$ in cui z_1 e' un termine noto e le due incognite sono G ed S_1 . Per qualsiasi valore attribuito ad una delle due incognite si puo' calcolare il valore che deve assumere l'altro affinche' l'equazione sia valida. Cio' significa che qualunque sia il livello del fattore G di un soggetto (per quanto grande o per quanto piccolo sia) il risultato nel test puo' rimanere lo stesso, purché il livello della G sia compensato da un adeguato livello della S .

Per questa indeterminazione dell'equazione di specificazione fattoriale la determinazione del livello fattoriale di un soggetto costituisce un problema a se' (v. Cap. 3). Come il lettore puo' facilmente osservare, basterebbe una seconda equazione con le due stesse incognite per ottenere la misura dei due fattori. Puo' sembrare a tutta prima sufficiente sottoporre il soggetto ad un altro test, 2, ottenendo cosi' la stessa equazione per z_2 . Ma va tenuto presente che mentre il fattore G e' lo stesso, il fattore specifico del test 2, S_2 , e' diverso dal fattore specifico del test 1, S_1 . Si ottengono quindi due equazioni con tre incognite, G , S_1 , S_2 e quindi ci si trova nuovamente di fronte a un sistema indeterminato.

E' forse utile far presente che non servirebbe a nulla ottenere una seconda equazione sottoponendo un secondo soggetto al test, poiche' essendo ignote le misure di ogni soggetto nei due fattori, le incognite diventano quattro, cioe' G_A ed S_{1A} per il soggetto A , G_B ed S_{1B} per il soggetto B .

parole il fattore G dei soggetti contribuisce in misura minima al successo nel test, mentre e' essenziale a questo effetto il livello di un particolare fattore specifico.

Abbiamo preso in considerazione due casi che possono rappresentare gli estremi della serie delle composizioni fattoriali dei tests.

La conoscenza della composizione fattoriale di un largo campione di tests consente di formulare ipotesi interpretative sulla natura dei fattori. Va notato infatti che un carattere essenziale del metodo fattoriale consiste nell'inversione dell'ordine tradizionale delle operazioni nello studio di una funzione mentale. Il procedimento tradizionale partiva dalla definizione di una funzione mentale, poi costruiva lo strumento per misurarla; il ~~procedimento~~ ^{metodo} fattoriale parte dalle misurazioni empiriche con tests di cui non si sa che cosa in realta' misurino, procede quindi al calcolo della composizione fattoriale del test, cioe' della misura in cui il successo nel test dipende da fattori di significato ignoto, e infine, in base alle misure dell'incidenza del singolo fattore nei diversi tests, procede all'interpretazione, cioe' all'identificazione e definizione dei fattori.

Nella teoria fattoriale di Spearman il problema interpretativo riguarda un unico fattore, il fattore G, perche' i fattori S, con la loro estrema specificita' si identificano con l'aspetto specifico del singolo test e mancano in genere di interesse.

La natura del fattore G e' definita dalla natura delle prestazioni in cui tale fattore interviene e dalla misura in cui interviene. Va notato anzitutto che, secondo le ricerche di Spearman e della sua scuola, si tratta di un fattore generale in senso molto ampio, che interviene in ogni prestazione umana. Esso interviene in misura preponderante nelle prestazioni caratterizzate da operazioni logiche, mentre interviene in misura minima nelle prestazioni di natura strettamente sensoriale (capacita' di discriminazione tattile, visiva, acustica). Delle materie scolastiche, la matematica e le lingue classiche richiedono dagli allievi un alto livello in fattore G, mentre l'utilita' del G e' molto limitata nell'apprendimento del disegno e ancor piu' nell'apprendimento della musica.

Bastano questi pochi dati a suggerire un'interpretazione. Qual e' quella funzione mentale di cui ci si giova sempre, sia che si tratti di risolvere un problema di matematica, o di tradurre un brano da una lingua poco nota, o di scaricare una cassa pesante o di aprire una porta inceppata, ma che giova molto di piu' nei primi due casi che negli ultimi due, e che giova ben poco quando si tratta di confrontare due impressioni di peso, o di accordare il violino? La risposta ovvia e' "l'intelligenza". Spearman non si accontento' di questa soluzione che fa appello al senso comune e preferi' la definizione di "energia mentale".

Ad ogni modo, anche accettando l'analogia con la nozione comune di intelligenza, l'assimilazione di tale nozione al fattore generale deli-

mita e precisa il significato della nozione di intelligenza: del fattore G si sa dove serve e quanto serve, come puo' essere misurato o stimato e con quanta precisione. E' una nozione scientifica che viene a sostituirsi a quella del senso comune.

1. Equazione di specificazione fattoriale

La teoria dei due fattori di Spearman e' espressa sinteticamente dall'equazione di specificazione, cioe' dall'equazione che esprime il risultato di un soggetto in un test in funzione dei due fattori, generale e specifico indipendenti, cioe' privi di correlazione fra loro.

E' stata gia' presa in considerazione nel capitolo precedente l'equazione di specificazione di un ipotetico test di analogie

$$z_1 = 0,9 G + 0,44 S_1$$

in cui z_1 e' il risultato di un soggetto nel test 1 (in quanto abbiamo contrassegnato con tale numero il test di analogie), G e' il fattore generale e S_1 il fattore specifico relativo al test 1. Si e' precisato che i due coefficienti 0,9 e 0,44 stanno ad indicare, o meglio a misurare l'importanza relativa, o il *peso* che i due fattori hanno nel particolare test che ci e' servito di esempio. I due coefficienti sono diversi nei diversi tests, cioe' costituiscono una caratteristica del singolo test, in quanto esprimono la *composizione fattoriale del test*, la misura cioe' nella quale il risultato conseguito da un soggetto nel test dipende dall'azione dell'uno e dell'altro fattore. Tali coefficienti prendono il nome di *coefficienti di saturazione*, per cui si dice che un test e' molto o poco saturo di G (o di S) a seconda della grandezza dei coefficienti di saturazione.

I fattori G ed S rappresentano invece caratteristiche individuali. L'identificazione per quanto grossolanamente approssimativa di G con l'intelligenza serve a chiarire questo punto: ogni persona ha un suo livello intellettuale, generalmente diverso da quello di altre persone.

In altre parole, applicando un altro test allo stesso individuo, cambiano, nell'equazione di specificazione, i coefficienti, ma non le

misure dei fattori che sono costanti, per lo stesso individuo, entro i limiti dell'errore di misura (1). Sottoponendo invece due diversi individui allo stesso test, rimangono uguali i coefficienti e cambiano invece le misure dei fattori.

Restano ancora da precisare le unita' di misura usate per le variabili, cioe' per i fattori G ed S . E' ovvio che le unita' di misura in cui sono espressi i fattori dipendono dalle unita' di misura usate per esprimere il risultato del soggetto nel test. Il sistema di misure usato per esprimere tali risultati e' necessariamente quello degli scarti ridotti o unita' standard e di conseguenza anche i fattori risultano espressi in unita' standard (2).

L'equazione di specificazione assume dunque la forma seguente:

$$z_{pt} = a_t G_p + u_t S_{tp} \quad \text{per } r_{GS_t} = 0 \quad (1)$$

in cui

z_{pt} = risultato in unita' standard (z) della persona p nel test t

a_t = coefficiente di saturazione del test t nel fattore G

G_p = misura, in unita' standard, del fattore G della persona p

u_t = coefficiente di saturazione del test t nel fattore specifico del test t , S_t

S_{tp} = misura, in unita' standard, del fattore specifico del test t , S_t della persona p

r_{GS_t} = coefficiente di correlazione fra il fattore generale G e il fattore specifico S_t .

L'equazione di specificazione fattoriale di Spearman esprime dunque il risultato di un soggetto in un test mediante una somma di due fattori indipendenti, uno dei quali e' presente in ogni test, mentre l'altro e' specifico del singolo test (3).

(1) Questo vale soltanto se i fattori che saturano i due tests sono gli stessi. In realta' solo il fattore G e' presente nei due tests mentre i fattori specifici sono diversi.

(2) Ricordiamo che le unita' standard, espresse dal simbolo z sono scarti dalla media misurati in unita' di deviazione standard (σ), secondo la formula

$$z = \frac{X_{pt} - M_t}{\sigma_t}$$

(3) Il significato dell'equazione di specificazione fattoriale, che e' fondamentale per la comprensione dell'analisi fattoriale, puo' essere chiarito in base alle seguenti considerazioni. Il risultato che un soggetto consegue in un test dipende dall'attitudine del soggetto stesso e dalle caratteristiche del test. Infatti, due diversi soggetti ottengono in genere risultati diversi in uno stesso test, ed uno stesso soggetto ottiene risultati diversi in diversi tests.

Si noti che l'equazione di specificazione fattoriale potrebbe essere considerata espressione del risultato unificato di due tests, uno dei quali misura il fattore generale e uno un fattore specifico. G ed S sarebbero allora i risultati conseguiti dal soggetto nei due tests. Prima di venir addizionati, i due risultati vengono moltiplicati ciascuno per un coefficiente ponderale, che indica l'importanza che ognuno dei due risultati avra' nel determinare il ri-

Con cio' si viene a sostituire ad un sistema di misure (i tests) correlate tra loro, in quanto contenevano tutte lo stesso fattore, un altro sistema di misure (i fattori) prive di correlazione fra loro, cioe' indipendenti.

Va sottolineato infatti che nella soluzione fattoriale di Spearman i fattori sono, per definizione, tutti privi di correlazione fra loro. In altre parole, non solo non vi e' correlazione fra fattore generale e specifico ($r_{gs_t} = 0$), ma anche i fattori specifici dei diversi tests sono privi di correlazione fra loro ($r_{s_x s_y} = 0$).

2. L'annullamento delle differenze tetradiche

Il dato obbiettivo da cui Spearman e' partito e che gli ha permesso di giungere all'equazione di specificazione fattoriale e' la correlazione positiva riscontrata generalmente fra i tests. Ma, oltre ad essere positivi, tali coefficienti di correlazione presentavano un'altra importante caratteristica, osservata da Spearman e diventata il fondamento della sua teoria.

Per mettere in evidenza tale caratteristica conviene ordinare i coefficienti di correlazione nella forma indicata qui sotto, alla quale in matematica si da' il nome di *matrice*.

Una matrice e' un rettangolo di numeri costituito da m righe ed n colonne. Ogni numero, o *elemento* della matrice viene identificato mediante il numero della riga e il numero della colonna, secondo lo schema seguente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \dots & a_{1n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tabella 1.

nN

nella tabella
correggere i
particolarmente
e mettere le righe
e righe []

Poiche' i coefficienti di correlazione portano i due indici relativi ai due tests ai quali si riferisce la correlazione, riesce molto semplice e comodo ordinarli in una matrice. Così', ad esempio, le correlazioni fra i tests 1, 2, 3, 4, 5 costituiscono la seguente matrice R:

sultato complessivo. Naturalmente l'analogia finisce qui, perche' nell'equazione di specificazione fattoriale e' noto il "risultato complessivo" e sono ignoti i "risultati parziali".

	1	2	3	4	5
1		$r_{1,2}$	$r_{1,3}$	$r_{1,4}$	$r_{1,5}$
2	$r_{2,1}$		$r_{2,3}$	$r_{2,4}$	$r_{2,5}$
3	$r_{3,1}$	$r_{3,2}$		$r_{3,4}$	$r_{3,5}$
4	$r_{4,1}$	$r_{4,2}$	$r_{4,3}$		$r_{4,5}$
5	$r_{5,1}$	$r_{5,2}$	$r_{5,3}$	$r_{5,4}$	

Tabella 2.

La matrice delle correlazioni presenta una serie di particolarità:

- e' quadrata, cioe' ha lo stesso numero di righe e di colonne;
- manca degli elementi che costituiscono la diagonale che va da sinistra in alto a destra in basso (diagonale principale della matrice);
- e' simmetrica rispetto alla diagonale principale (cioe' $r_{21} = r_{12}$, $r_{32} = r_{23}$, ecc.).

Quest'ultima caratteristica deriva dal fatto che il coefficiente di correlazione fra il test 1 e il test 3 e' identico al coefficiente di correlazione fra il test 3 e il test 1 (1), per cui ogni coefficiente di correlazione e' ripetuto due volte nella matrice (2).

Quanto ai vuoti lungo la diagonale principale, si trovano in corrispondenza agli elementi che portano ripetuto lo stesso indice.

Che significato puo' avere una correlazione di un test con se stesso, per es. r_{11} , r_{22} , r_{33} ? Da un punto di vista teorico, trattandosi di correlazione di due serie di valori identici a due a due, l'autocorrelazione dovrebbe essere perfetta, e quindi si dovrebbe avere $r_{11} = r_{22} = r_{33} = \dots = 1$.

Ma si possono dare anche altre interpretazioni di r_{tt} , che saranno espone in seguito. Comunque, i dati su cui si fonda il procedimento dell'analisi fattoriale sono i coefficienti di correlazione fra i tests, che costituiscono la matrice delle correlazioni priva degli elementi della diagonale.

Nell'esaminare le matrici di correlazione fra tests, Spearman si accorse che presentavano costantemente una caratteristica che consente di operare l'analisi dei risultati dei tests in due fattori.

Consideriamo la matrice seguente che presenta appunto questa particolarità ed è stata nominata da Spearman matrice quadrata. (3)

(1) Come e' noto, si tratta di una proprietà che vale soltanto per la correlazione lineare: per la correlazione curvilinea $\eta_{xy} \neq \eta_{yx}$.

(2) Infatti, tra 5 tests vi sono 10 coefficienti di correlazione (in quanto sono 10 le combinazioni di 5 elementi a 2 a 2), mentre la matrice ne contiene 20.

perché
non tutti
sono sulla
diagonale

Spearman

fare in
matrice
quadrata
e []

	1	2	3	4	5	6	7
1		0,56	0,48	0,40	0,32	0,24	0,16
2	0,56		0,42	0,35	0,28	0,21	0,14
3	0,48	0,42		0,30	0,24	0,18	0,12
4	0,40	0,35	0,30		0,20	0,15	0,10
5	0,32	0,28	0,24	0,20		0,12	0,08
6	0,24	0,21	0,18	0,15	0,12		0,06
7	0,16	0,14	0,12	0,10	0,08	0,06	

Tabella 3.

Prendendo in esame due colonne qualsiasi, si nota che i numeri dell'una sono proporzionali ai numeri dell'altra. Infatti, nelle due prime colonne, trascurando il primo numero della prima colonna, al quale corrisponde, nella seconda colonna, il vuoto della diagonale osserviamo che $0,48 : 0,42 = 0,40 : 0,35 = 0,32 : 0,28$, ecc. E così nella 3a e 5a colonna $0,48 : 0,32 = 0,42 : 0,28$, ecc.

Questo carattere della matrice di correlazioni si può esprimere riferendosi a quelle che Spearman chiama *tetradi* (cioè quartetti di numeri disposti ai punti di incontro fra due righe e due colonne della matrice). Se prendiamo una tetrade qualsiasi della nostra matrice di correlazioni, per es. gli elementi

$$\begin{array}{rcc}
 r_{13} & r_{15} & 0,48 \quad 0,32 \\
 & & \text{cioè} \\
 r_{23} & r_{25} & 0,42 \quad 0,28
 \end{array}$$

possiamo esprimere il rapporto di proporzionalità già constatato $0,48 : 0,32 = 0,42 : 0,28$, moltiplicando tra loro in diagonale i termini della tetrade $0,48 \times 0,28$ e $0,42 \times 0,32$ (il che equivale a fare il prodotto dei termini esterni e dei termini interni della proporzione) e constatando che la differenza dei due prodotti è uguale a zero

$$\begin{aligned}
 r_{13} \cdot r_{25} - r_{23} \cdot r_{15} &= 0 \\
 0,48 \times 0,28 - 0,42 \times 0,32 &= 0
 \end{aligned}$$

L'annullarsi delle differenze tetradiche (1) (è la terminologia di Spearman) è la proprietà osservata da Spearman nelle matrici delle correlazioni tra i tests, ed è la condizione necessaria affinché i risultati dei relativi tests possano essere espressi come una somma di due fattori, uno generale, presente in tutti i tests, ed uno specifico, diverso per ogni test.

(1) In matematica il fenomeno dell'annullamento delle differenze tetradiche si esprime dicendo che i minori di ordine 2 si annullano. (V. Cap. I)

*I come si vedrà
in seguito*

* * *

A questo punto vien fatto di chiedersi come mai, se questa e' la condizione dell'analizzabilita' dei tests in G ed S , essendo relativamente semplice la verifica di tale condizione, si parli di una teoria dei due fattori, alla quale si contrappongono altre teorie fattoriali, e non di una legge dei due fattori.

Sta il fatto che mentre nella matrice che abbiamo esaminato - e che e' una matrice con dati fittizi, costruita appositamente a scopo dimostrativo - le tetradi si annullano effettivamente, nelle matrici di correlazione calcolate su dati sperimentali si riscontra soltanto una *tendenza all'annullamento delle tetradi*.

Il fatto che non si riscontri un effettivo annullarsi delle tetradi e' pienamente giustificato dal cosiddetto errore di campionatura.

Si tratta di un fenomeno che e' generalmente noto, o almeno immediatamente comprensibile anche a chi non abbia dimestichezza con la statistica se, anziche' al coefficiente di correlazione, ci si riferisce alla media aritmetica.

Consideriamo una "popolazione" corrispondente ad una determinata definizione (per es.: "gli italiani di sesso maschile al di sopra dei 21 anni" o "gli operai qualificati del Veneto") e, dopo aver compiuto i necessari rilievi su *tutti* i membri della popolazione relativamente a un determinato carattere (per es. la statura) ne calcoliamo la media aritmetica. Cio' implica un'enorme massa di lavoro, che assai di rado riesce possibile compiere. In mancanza di cio' si ricorre ad una *stima* di quel valore medio, compiendo i rilievi su un limitato campione di individui.

E' chiaro che la media del campione non sara', se non per un caso eccezionalissimo, uguale alla media della popolazione: nel campione puo' esserci, per caso, una proporzione di individui di statura superiore ai m. 1,70, maggiore o minore di quella che e' compresa nella popolazione. La statistica insegna percio' a calcolare l'entita' probabile dell'errore in cui si incorre servendosi della media di un campione come stima della media della popolazione.

Ma altrettanto vale per qualsiasi indice statistico e quindi anche per il coefficiente di correlazione. Anche un coefficiente di correlazione puo' essere calcolato in base ai rilievi compiuti su tutta una popolazione o invece stimato sulla base dei dati di un campione. E anche per l'indice di correlazione si puo' calcolare l'errore probabile della stima.

Se e' difficile disporre dei dati di un'intera popolazione relativamente ai rilievi antropometrici, cio' riesce praticamente impossibile nei riguardi dei dati psicometrici, tanto piu' complicati e difficili da rilevare. Infatti tutte le rilevazioni psicologiche sono state effettuate su campioni.

Ritornando alle differenze tetradiche, e' chiaro che una legge si verifica esattamente soltanto sui valori di popolazione e non sulle statistiche di campione, soggette ad oscillazioni dipendenti dalla casuale composizione del campione.

E' quindi ragionevole attendersi che se sussiste una legge dell'annullamento delle tetradi, valida per la popolazione, tale legge risulti valida solo approssimativamente per i campioni e che quindi nei dati sperimentali sia rilevabile soltanto un approssimativo annullamento o, in altre parole, una *tendenza all'annullamento delle tetradi*.

Cio' posto, ci si trova di fronte alla necessita' di disporre di un criterio per stabilire quando una differenza tetradica non nulla nel campione possa essere considerata compatibile con l'ipotesi della nullita' della differenza tetradica nella popolazione. Spearman si dedico' fin da principio alla ricerca di un criterio di nullita' delle differenze tetradiche giungendo infine alla formula dell'*errore tipo delle differenze tetradiche*.

Ma non e' questa la sola difficolta' incontrata da Spearman. Sta il fatto che non tutte le matrici di correlazione fra tests presentano tutte le differenze tetradiche approssimativamente nulle.

Una constatazione di questo genere non e' per se stessa in contraddizione con la teoria dei due fattori. Secondo la teoria infatti i tests sono in correlazione in quanto ognuno ripete, in parte, la stessa misura fornita dall'altro, cioe' la misura del fattore G dei soggetti. Ma se due tests sono molto simili fra loro, ripetono non solo la misura del fattore G ma anche quella del fattore S, in quanto i loro fattori specifici, anziche' essere l'uno diverso dall'altro, sono, in parte, uguali. In altre parole in questi casi la correlazione non e' prodotta soltanto dalla G, come per gli altri tests, ma anche dai due fattori specifici. Cio' porta ad un aumento del coefficiente di correlazione fra i due tests, rispetto ai coefficienti di correlazione dell'uno o dell'altro test con altri tests, e di conseguenza quando della tetrade entrano a far parte due tests molto simili, la differenza tetradica non si annulla (1).

In queste particolari situazioni, per poter effettuare l'analisi fattoriale, Spearman ricorre al rimedio di eliminare uno dei due tests "indebitamente simili", dalla batteria dei tests, eliminando quindi i coefficienti di correlazione relativi a tale test, dalla matrice delle correlazioni: procedimento che e' giustificato, sempreche' il criterio della somiglianza sia applicabile obbiettivamente.

Va notato infine che neppure il verificarsi costante del criterio delle differenze tetradiche costituirebbe una prova della teoria dei due fattori, ma soltanto della sua plausibilita'. Il criterio dell'an-

(1) E non rientra neppure tra quelle tetradi che si annullano approssimativamente, cioe' danno delle differenze che stanno entro i limiti dell'errore di campionatura.

nullamento delle tetradi e' infatti condizione *necessaria, ma non sufficiente* della teoria dei due fattori, ed esso quindi non esclude che altre teorie costituiscano spiegazioni altrettanto valide dei fatti.

Rimane da dimostrare come la teoria dei due fattori o, cio' che e' lo stesso, la relativa equazione di specificazione fattoriale, implichi il criterio di annullamento delle tetradi. La dimostrazione sara' data nel paragrafo seguente.

3. Implicazioni dell' equazione di specificazione fattoriale

L' equazione di specificazione fattoriale consente di esprimere in termini fattoriali la varianza di un test, la correlazione di un test col fattore G e la correlazione fra due tests.

a) *Espressione fattoriale della varianza:*

$$\sigma_z^2 = \frac{\sum_{p=1}^n z_{pt}^2}{n} = 1 .$$

La varianza di un test, *in unita' standard*, cioe' la media aritmetica dei quadrati dei risultati dei singoli soggetti, espressi in unita' standard, e' uguale a 1.

Infatti, il σ e' l'unita' di misura e se $\sigma = 1$, $\sigma^2 = 1$.

Sostituendo a z^2 l'espressione fattoriale secondo la formula $z_{pt} = a_t G_p + u_t S_{tp}$, si ha

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n (a_t G_p + u_t S_{tp})^2$$

Sviluppando il quadrato si ottiene:

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n (a_t^2 G_p^2 + 2 a_t G_p u_t S_{tp} + u_t^2 S_{tp}^2) .$$

Suddividendo, per le proprieta' associativa e distributiva dell'addizione, la sommatoria generale in tre sommatorie parziali, divise per n , si ottiene:

$$\sigma_z^2 = \frac{\sum_{p=1}^n a_t^2 G_p^2}{n} + \frac{\sum_{p=1}^n 2 a_t G_p u_t S_{tp}}{n} + \frac{\sum_{p=1}^n u_t^2 S_{tp}^2}{n}$$

Estraendo a fattore comune le costanti (1),

(1) va tenuto presente che la sommatoria viene compiuta soltanto rispetto

$$\sigma_z^2 = a_t^2 \frac{\sum_{p=1}^n G_p^2}{n} + 2 a_t u_t \frac{\sum_{p=1}^n G_p S_{tp}}{n} + u_t^2 \frac{\sum_{p=1}^n S_{tp}^2}{n}$$

le tre frazioni contenute nella precedente equazione risultano essere

espressioni note. Infatti $\frac{\sum_{p=1}^n G_p^2}{n}$ equivale a $\frac{\sum_{p=1}^n z_{Gp}^2}{n}$, in quanto i fattori, come i tests sono espressi in unita' standard. Così pure

$\frac{\sum_{p=1}^n S_{tp}^2}{n} \equiv \frac{\sum_{p=1}^n z_{S_{tp}}^2}{n}$; e l'uno e l'altra sono identiche alla

formula della varianza $\sigma_z^2 = \frac{\sum_{p=1}^n z_{tp}^2}{n}$. La prima esprime la *varianza del fattore G*, σ_G^2 , la seconda la *varianza del fattore S*, $\sigma_{S_t}^2$. Quanto al-

la seconda frazione $\frac{\sum_{p=1}^n G_p S_{tp}}{n} \equiv \frac{\sum_{p=1}^n z_{Gp} z_{S_{tp}}}{n}$ non e' altro che la formula del coefficiente di correlazione espressa in unita' standard, cioè il coefficiente di correlazione fra G ed S, cioè r_{GS} .

Va notato infine che una delle caratteristiche della scala standard e' che la varianza e' 1; quindi ricordando che in analisi fattoriale tanto i tests che i fattori sono espressi in unita' standard, possiamo scrivere

$$\sigma_z^2 = \sigma_G^2 = \sigma_{S_t}^2 = 1.$$

Quanto alla correlazione fra G ed S, ricordiamo che essa e' nulla. Di conseguenza $r_{GS} = 0$.

Ritornando all'espressione della varianza in termini fattoriali, vediamo che essa si semplifica radicalmente, in quanto il secondo termine si annulla (essendo le costanti moltiplicate per zero) mentre nel

all'indice p; pertanto i simboli che non portano l'indice p sono delle costanti che costituiscono i fattori comuni degli addendi. Così

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n a_t^2 G_p^2 &= a_t^2 G_1^2 + a_t^2 G_2^2 + a_t^2 G_3^2 + \dots + a_t^2 G_n^2 = \\ &= a_t^2 (G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 + \dots + G_n^2) = a_t^2 \sum_{p=1}^n G_p^2 \end{aligned}$$

primo e nel terzo termine le costanti sono moltiplicate per 1 e tutta l'espressione e' uguale a 1. Si ha quindi

$$\sigma_{z_t}^2 = 1 = a_t^2 + u_t^2$$

la varianza di un test in termini fattoriali e' uguale alla somma dei quadrati delle saturazioni del test nei fattori generale e specifico e' uguale a uno.

Si noti inoltre che conoscendo la saturazione di un test nel fattore generale, si puo' calcolare la sua saturazione nel fattore specifico, in quanto

$$u^2 = 1 - a^2$$

$$u = \sqrt{1 - a^2}$$

b) Correlazione di un test col fattore G:

$$r_{tG} = \frac{\sum_{p=1}^n z_{tp} G_p}{n} \quad (1)$$

Sostituendo a z_{tp} l'espressione fattoriale secondo l'equazione di specificazione, si ha

$$r_{tG} = \frac{\sum_{p=1}^n [(a_t G_p + u_t S_{tp}) G_p]}{n} = \frac{\sum_{p=1}^n (a_t G_p^2 + u_t G_p S_{tp})}{n}$$

Suddividendo la sommatoria generale in due sommatorie parziali, divise ciascuna per n si ottiene

$$r_{tG} = \frac{\sum_{p=1}^n a_t G_p^2}{n} + \frac{\sum_{p=1}^n u_t G_p S_{tp}}{n}$$

Estraendo le costanti dalla sommatoria

$$r_{tG} = a_t \frac{\sum_{p=1}^n G_p^2}{n} + u_t \frac{\sum_{p=1}^n G_p S_{tp}}{n}$$

si constata, ancora una volta, che la prima frazione e' la varianza di G, $\sigma_G^2 = 1$ e la seconda, la correlazione fra G ed S, $r_{GS} = 0$; quindi

(1) Quando i dati sono espressi in unita' standard, la formula del coefficiente di correlazione di Pearson $r_{xy} = \frac{\sum xy}{n \sigma_x \sigma_y}$ si riduce a $\frac{\sum z_x z_y}{n}$; di conseguenza la correlazione di un test t col fattore G e' espressa dalla formula sopraindicata.

$r_{tG} = a_t$, cioè il coefficiente di saturazione di un test nel fattore generale equivale al coefficiente di correlazione dello stesso test col fattore generale.

Va notato infine che partendo dalla formula della correlazione di un test t col suo fattore specifico S_t e procedendo allo stesso modo si giunge all'analogha conclusione

$$r_{tS_t} = u_t$$

cioè il coefficiente di saturazione di un test nel suo fattore specifico equivale al coefficiente di correlazione dello stesso test col suo fattore specifico.

c) *Correlazione fra due tests espressa in termini fattoriali:*

$$r_{xy} = \frac{\sum_{p=1}^n z_{xp} z_{yp}}{n}$$

Correlazione di due tests, X e Y , in unita' standard.

Esprimendo i risultati dei tests in termini di fattori, si ottiene:

$$r_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n [(a_x G_p + u_x S_{xp}) (a_y G_p + u_y S_{yp})]$$

e procedendo come per le precedenti espressioni:

$$r_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n (a_x a_y G_p^2 + a_x u_y G_p S_{yp} + u_x a_y G_p S_{xp} + u_x u_y S_{xp} S_{yp})$$

$$r_{xy} = a_x a_y \frac{\sum_{p=1}^n G_p^2}{n} + a_x u_y \frac{\sum_{p=1}^n G_p S_{yp}}{n} + u_x a_y \frac{\sum_{p=1}^n G_p S_{xp}}{n} +$$

$$+ u_x u_y \frac{\sum_{p=1}^n S_{xp} S_{yp}}{n} ;$$

ma la prima frazione è $\sigma_G^2 = 1$, le altre tre sono r_{GS_y} , r_{GS_x} , $r_{S_x S_y}$ tutte uguali a zero.

Di conseguenza i tre ultimi termini si annullano e rimane soltanto il primo termine ridotto ai soli coefficienti, per cui $r_{xy} = a_x a_y$.

Il coefficiente di correlazione fra due tests X ed Y equivale al prodotto delle saturazioni dei due tests nel fattore generale.

d) *Correlazioni e differenze tetradiche:* dalla ^{equat.} formula della correlazione fra due tests espressa in termini fattoriali deriva un'interessante conseguenza:

Tests	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}	r_{16}	r_{17}	r_{18}	r_{19}
2	r_{21}		r_{23}	r_{24}			r_{27}		
3									
4									
5								r_{58}	r_{59}
6								r_{68}	r_{69}
7									
8									
9				r_{94}			r_{97}		

Tabella 4.

Prendiamo in considerazione le due tetradi messe in evidenza nella matrice di Tab. 4, e calcoliamo le relative differenze tetradiche, cioè'

$$r_{24}r_{97} - r_{94}r_{27} \quad \text{ed} \quad r_{58}r_{69} - r_{68}r_{59}$$

Procedendo quindi a sostituire ai coefficienti di correlazione i prodotti delle saturazioni in base alla formula $r_{xy} = a_x a_y$, si ottiene

$$a_2 a_4 a_9 a_7 - a_9 a_4 a_2 a_7 \quad \text{e} \quad a_5 a_8 a_6 a_9 - a_6 a_8 a_5 a_9$$

cioè, tanto per l'una quanto per l'altra tetrade i due termini della differenza tetradica sono identici e quindi la differenza tetradica è nulla.

Si dimostra che ciò vale per qualsiasi tetrade in quanto:

- 1) Ogni riga (ed ogni colonna) della matrice dei coefficienti di correlazione riguarda un particolare test, simboleggiato dal numero (della riga o della colonna).
- 2) Ogni elemento della matrice è un coefficiente di correlazione fra due tests, corrispondenti ai numeri della riga e della colonna a cui appartiene l'elemento.
- 3) Ogni tetrade è costituita dagli elementi della matrice che si trovano ai 4 punti di incontro di due righe con due colonne.
- 4) È evidente che i numeri delle due righe non possono essere uguali tra loro, e neppure i numeri delle due colonne; ma non è possibile neppure scegliere una riga e una colonna con lo stesso numero, perché esse si incrocerebbero su un termine della diagonale principale, che è vuota. Quindi ogni tetrade è costituita dai coefficienti di correlazione che si trovano ai punti di incontro fra due colonne e due righe, tutte e quattro di numero diverso.

5) Dunque i quattro coefficienti di correlazione di una tetrade riguardano non meno e non piu' di quattro tests.

6) *I due coefficienti di correlazione che si trovano ai vertici opposti di una tetrade, appartenendo ciascuno ad una riga e ad una colonna diversa dall'altra non possono riguardare gli stessi tests, e quindi, implicando ciascuno dei tests diversi tra loro e diversi da quelli dell'altro coefficiente, implicano tutti e quattro i tests della tetrade.*

7) Una differenza tetradica e' una differenza fra prodotti di coefficienti di correlazione che si trovano ai vertici opposti di una tetrade, e quindi, riguardando la tetrade quattro tests, *i due termini della differenza tetradica implicano ciascuno gli stessi quattro tests.*

8) L'equazione della correlazione $r_{xy} = a_x a_y$ consente di esprimere un coefficiente di correlazione fra due tests con il prodotto dei due coefficienti di saturazione nel fattore G.

9) I due termini della differenza tetradica risultano dunque identici (in quanto prodotti di elementi identici) e la differenza tetradica e' necessariamente nulla.

Siamo giunti in tal modo a dimostrare quanto ci eravamo proposti nel § 2 del presente capitolo, che cioe' l'equazione di specificazione fattoriale di Spearman implica l'annullamento delle differenze tetradiche. Abbiamo infatti veduto: a) che dall'equazione di specificazione fattoriale discende l'equazione fattoriale della correlazione (1), e b) che dall'equazione fattoriale della correlazione discende la nullita' delle differenze tetradiche. Da cio' possiamo dedurre che dall'equazione di specificazione fattoriale discende la nullita' delle differenze tetradiche, o in altre parole, che l'equazione di specificazione implica l'annullamento delle differenze tetradiche, o ancora che l'annullamento delle tetradi e' condizione necessaria dell'equazione di specificazione di Spearman (2), o ancora, schematicamente:

$$z_p t = a_t G_p + u_t S_{tp} \rightarrow [r_{xy} = a_x a_y] \rightarrow [r_{ab} r_{pq} - r_{ap} r_{bq} = 0]$$

(1) Cap. II, 3, c).

(2) Per maggiore chiarezza puo' essere utile percorrere la stessa strada in senso inverso, considerando le conseguenze della constatazione del non-annullamento delle tetradi.

Si tratti della tetrade

$$\begin{matrix} r_{34} & r_{36} \\ r_{74} & r_{76} \end{matrix} .$$

Se $r_{34} r_{76} - r_{36} r_{74} \neq 0$ avremo di conseguenza, in applicazione della $r_{xy} = a_x a_y$

$$a_3 a_4 a_7 a_6 - a_3 a_6 a_7 a_4 \neq 0$$

cioe'

$$a_3 a_4 a_6 a_7 \neq a_3 a_4 a_6 a_7 .$$

Cio' e' assurdo; quindi si deve considerare non valida l'equazione $r_{xy} =$

4. Calcolo delle saturazioni fattoriali

La formula fattoriale del coefficiente di correlazione fra due tests

$$r_{xy} = a_x a_y$$

da' modo di calcolare i coefficienti di saturazione dei tests nel fattore G.

Infatti

$$r_{12}r_{13} = a_1 a_2 a_1 a_3 = a_1^2 a_2 a_3$$

ma $a_2 a_3 = r_{23}$, quindi $r_{12}r_{13} = a_1^2 r_{23}$, da cui

$$a_1^2 = \frac{r_{12}r_{13}}{r_{23}}$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{r_{12}r_{13}}{r_{23}}}$$

in termini generali $a_k = \sqrt{\frac{r_{km}r_{kn}}{r_{mn}}}$, in cui k, m, n , sono tre tests qualsiasi della batteria.

Siamo in grado ora di calcolare i coefficienti di saturazione dei tests ai quali si riferisce la matrice di correlazioni di Tab. 5.

tests	1	2	3	4	5	6	7
1.		0,6930	0,5400	0,7700	0,3940	0,2700	0,2550
2.	0,6930		0,4620	0,4181	0,3542	0,2310	0,1925
3.	0,5400	0,4620		0,3180	0,2760	0,1800	0,1500
4.	0,4770	0,4181	0,3180		0,2438	0,1590	0,1325
5.	0,3940	0,3542	0,2760	0,2438		0,1380	0,1150
6.	0,2700	0,2310	0,1800	0,1590	0,1380		0,7500
7.	0,2550	0,1925	0,1500	0,1325	0,1150	0,7500	

Tabella 5.

$= a_x a_y$ che ha permesso di tradurre la differenza tetradica in termini di saturazioni fattoriali. Ma a sua volta questa equazione era stata ottenuta sostituendo nel coefficiente di correlazione di Pearson, alle variabili, i loro equivalenti, nell'equazione di specificazione fattoriale di Spearman.

Va quindi respinta l'equazione di specificazione fattoriale o in altre parole, i dati a disposizione non si possono spiegare con l'azione di due fattori, generale e specifico.

Si deve quindi concludere che non è valida l'equazione di specificazione fattoriale.

Per calcolare a_1 occorrono le intercorrelazioni fra tre tests di cui uno dev' essere il test 1. Per es., scegliendo i tests 1, 2, 3,

$$r_{12} = 0,6930; \quad r_{13} = 0,5400; \quad r_{23} = 0,4620$$

oppure, scegliendo i tests 1, 2, 4,

$$r_{12} = 0,6930; \quad r_{14} = 0,4770; \quad r_{24} = 0,4181 \text{ e cosi' via.}$$

Applicando la formula si avra'

$$a_1 = \sqrt{\frac{0,6930 \cdot 0,5400}{0,4620}} = \sqrt{\frac{0,6930 \cdot 0,4770}{0,4181}} = 0,90.$$

Per calcolare a_2 si puo' scegliere pure una terna qualsiasi di tests, fra i quali sia compreso il test 2. Scegliendo, ad esempio, i tests 2, 5, 7, ed utilizzando quindi le intercorrelazioni

$$r_{25} = 0,3542 \quad r_{27} = 0,1925 \quad r_{57} = 0,115$$

avremo

$$a_2 = \sqrt{\frac{0,3542 \cdot 0,1925}{0,115}} = 0,77.$$

Proseguendo cosi' si ottengono i coefficienti di saturazione nel fattore G di tutti i tests della batteria; e per mezzo della formula $u_t = \sqrt{1 - a_t^2}$ si possono quindi calcolare anche le saturazioni nei rispettivi fattori specifici. Cosi' ad esempio $u_1 = \sqrt{1 - a_1^2} = \sqrt{1 - 0,9^2} = \sqrt{1 - 0,81} = \sqrt{0,19} = 0,436 \approx 0,44$.

Calcolate anche le saturazioni nei fattori specifici si dispongono i risultati nella forma di una matrice.

per tests

SATURAZIONE NEI FATTORI

Tests	G	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	S ₇
1	0,9	0,44						
2	0,77		0,64					
3	0,6			0,8				
4	0,53				0,85			
5	0,46					0,88		
6	0,3						0,95	
7	0,25							0,97

Tabella 6.

Anziche' nella forma di una *matrice fattoriale* i risultati possono essere ovviamente presentati nella forma di equazioni di specificazione (1) dei rispettivi tests:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0,9 G + 0,44 S_1 \\ z_2 &= 0,77 G + 0,64 S_2 \\ z_3 &= 0,6 G + 0,8 S_3 \\ z_4 &= 0,53 G + 0,85 S_4 \\ z_5 &= 0,46 G + 0,88 S_5 \\ z_6 &= 0,3 G + 0,95 S_6 \\ z_7 &= 0,25 G + 0,97 S_7 \end{aligned}$$

La matrice fattoriale completa (comprendente anche gli specifici) sottolinea un punto importante. Mentre i coefficienti a (di saturazione nel fattore G) sono incolonnati, i coefficienti b (di saturazione nel fattore S) sono disposti uno per colonna. Cio' dipende dal fatto che, mentre vi e' un unico fattore G , ci sono tanti fattori specifici quanti sono i tests. La disposizione su diverse colonne mette cioe' in evidenza che, per es. il fattore S_1 satura soltanto il test 1 e non e' presente in alcun modo (o, in altre parole, ha saturazione zero) negli altri tests.

Dalla matrice fattoriale si calcola agevolmente (cio' in base alla formula $a_t^2 + u_t^2 = 1$) la matrice delle varianze (2) dalla quale risulta quale quota della varianza di ogni test e' dovuta al fattore generale e quale al fattore specifico. Ricordiamo che essendo stata adottata la scala standard, la varianza dei singoli tests e' 1.

CONTRIBUTO DI VARIANZA DI CIASCUN FATTORE

Test	Varianza comune	Varianza specifica	Totale
1	0,8100	0,1900	1,0000
2	0,5929	0,4071	1,0000
3	0,3600	0,6400	1,0000
4	0,2809	0,7191	1,0000
5	0,2116	0,7884	1,0000
6	0,0900	0,9100	1,0000
7	0,0625	0,9375	1,0000

Tabella 7.

(1) Per semplificare la scrittura omettiamo l'indice p . Ma la forma precisa dell'equazione di specificazione e' quella precedentemente indicata.

(2) In realta' le quote di varianza (a_t^2 e $u_t^2 = 1 - a_t^2$) sono state gia' calcolate per effettuare il calcolo delle saturazioni nei fattori specifici.

5. Calcolo delle saturazioni ed errore di campionatura

Il calcolo delle saturazioni, effettuato nel paragrafo precedente si riferiva a dati fittizi, ad una matrice di correlazione costruita appositamente in modo che tutte le differenze tetradiche risultassero uguali a zero. Come e' stato detto in precedenza, le matrici di correlazioni ottenute in seguito all'applicazione di una batteria di tests a un campione di soggetti si adeguano solo approssimativamente alla condizione fondamentale di Spearman: le differenze tetradiche tendono ad annullarsi, ma non si annullano completamente. E' chiaro che mentre con una matrice di correlazioni che si adegua rigorosamente al criterio di Spearman, e' indifferente la scelta dei tre tests le cui intercorrelazioni vengono usate per calcolare il coefficiente di saturazione nel fattore G, in quanto tutte le possibili triadi di tests danno lo stesso risultato, cio' non vale per una matrice di correlazioni calcolate su dati sperimentali o comunque su misure; infatti, essendo ogni coefficiente di correlazione soggetto all'errore di campionatura, ed essendo ogni errore di entita' diversa, c' e' una certa diversita' nel risultato del calcolo delle saturazioni, in dipendenza dei tre tests scelti, e delle relative tre intercorrelazioni utilizzate per il calcolo.

Ma la soluzione della difficolta' e' ovvia: trattandosi di errori casuali, per cui nel campione le correlazioni (e di conseguenza le saturazioni calcolate sulla base delle correlazioni) hanno uguale probabilita' di risultare accresciute o diminuite rispetto al loro valore nella popolazione (1), e poiche' in questo caso gli errori tendono a cancellarsi, cioe' a compensarsi, se addizionati, converra' computare le saturazioni in tutti i modi possibili, cioe' con tutte le terne di correlazioni utilizzabili a tale scopo, e poi calcolare la media aritmetica dei risultati cosi' ottenuti.

Per semplificare i calcoli conviene utilizzare una formula che permetta di calcolare direttamente tale media aritmetica, che si ricava molto facilmente, ma e' comoda da usare soltanto per piccole matrici di correlazioni.

Diamo un esempio della formula per il calcolo di a_1 , da una matrice di correlazioni fra 5 tests (v. tabella 8).

(1) Se dipendono da errore di campionatura, le differenze tetradiche hanno uguale probabilita' di risultare positive o negative.

	1	2	3	4	5
1	-	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}
2	r_{21}	-	r_{23}	r_{24}	r_{25}
3	r_{31}	r_{32}	-	r_{34}	r_{35}
4	r_{41}	r_{42}	r_{43}	-	r_{45}
5	r_{51}	r_{52}	r_{53}	r_{54}	-

Tabella 8.

In relazione a quanto e' stato esposto nel precedente paragrafo, prendiamo in considerazione successivamente tutte le possibili terne di tests che comprendono il test 1 (1, 2, 3; 1, 2, 4; 1, 2, 5; 1, 3, 4; 1, 3, 5; 1, 4, 5) e scriviamo una sotto l'altra le rispettive equazioni nella forma $r_{kn}r_{kn} = a_1^2 r_{nn}$.

$$r_{12}r_{13} = a_1^2 r_{23}$$

$$r_{12}r_{14} = a_1^2 r_{24}$$

$$r_{12}r_{15} = a_1^2 r_{25}$$

$$r_{13}r_{14} = a_1^2 r_{34}$$

$$r_{13}r_{15} = a_1^2 r_{35}$$

$$r_{14}r_{15} = a_1^2 r_{45}$$

Sommando le equazioni si ottiene la seguente equazione:

$$\begin{aligned} r_{12}r_{13} + r_{12}r_{14} + r_{12}r_{15} + r_{13}r_{14} + r_{13}r_{15} + r_{14}r_{15} = \\ = a_1^2 (r_{23} + r_{24} + r_{25} + r_{34} + r_{35} + r_{45}) \end{aligned}$$

da cui:

$$a_1^2 = \frac{r_{12}r_{13} + r_{12}r_{14} + r_{12}r_{15} + r_{13}r_{14} + r_{13}r_{15} + r_{14}r_{15}}{r_{23} + r_{24} + r_{25} + r_{34} + r_{35} + r_{45}}$$

Quando invece si opera su matrici di ordine piu' elevato (1) conviene procedere diversamente, usando la formula

$$a_1^2 = \frac{A_1^2 - A_1'}{T - 2 A_1}$$

in cui:

(1) L'ordine di una matrice quadrata e' dato dal numero delle righe (o delle colonne).

- A_1 e' la somma degli elementi (cioe' dei coefficienti di correlazione) della riga i ,
 A_1' e' la somma dei quadrati degli elementi della stessa riga,
 T e' la somma di tutti gli elementi della matrice (cioe' il doppio della somma di tutti i coefficienti di correlazione),
 i e' il numero della riga e rispettivamente il numero del test: i cui coefficienti di correlazione con gli altri tests costituiscono la relativa riga.

La formula equivale algebricamente alla precedente (1).

Applicheremo tale formula ad una matrice di correlazioni (Tab. 9) ottenute dall'applicazione sperimentale di una batteria di tests (2).

Elenchiamo l'ordine delle operazioni.

1. Sommare gli elementi di ogni riga della matrice e segnare i risultati nella colonna intestata A . (Es.: $.54 + .47 + .50 + .24 = 1.75$).
2. Sommare, per controllo, gli elementi di ogni colonna della matrice e vedere se le somme delle colonne sono identiche alle somme delle righe. (Es.: somma 1a riga = somma 1a colonna = 1.75).
3. Sommare le somme delle righe della matrice (cioe' aggiungere la colonna A) e contrassegnare il risultato col simbolo T (si tratta infatti del totale generale, cioe' della somma di tutti gli elementi della matrice). (Es.: $1.75 + 1.60 + 1.31 + 1.29 + 1.07 = 7.02$). Controllare se la somma delle somme delle colonne da' come risultato T .
4. Innalzare al quadrato le somme delle righe (cioe' gli elementi della colonna A) e registrare i risultati della colonna A^2 . [Esempio: $(1.75)^2 = 3.062$; $(1.60)^2 = 2.560$].

(1) L'identita' delle due formule si puo' constatare applicando la formula alla stessa matrice di correlazioni fra 5 tests, per il calcolo di a_1 .

$$\begin{aligned}
 A_1^2 &= (r_{12} + r_{13} + r_{14} + r_{15})^2 \\
 A_1' &= r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{14}^2 + r_{15}^2 \\
 A_1^2 - A_1' &= r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{14}^2 + r_{15}^2 + 2 r_{12}r_{13} + 2 r_{12}r_{14} + 2 r_{12}r_{15} + \\
 &+ 2 r_{13}r_{14} + 2 r_{13}r_{15} + 2 r_{14}r_{15} - (r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{14}^2 + r_{15}^2) = \\
 &= 2 (r_{12}r_{13} + r_{12}r_{14} + r_{12}r_{15} + r_{13}r_{14} + r_{13}r_{15} + r_{14}r_{15}),
 \end{aligned}$$

che e' il doppio del numeratore della formula precedente.

Il denominatore e' pure il doppio del denominatore della formula precedente. Infatti il denominatore della formula precedente comprende la somma dei coefficienti di correlazione tra tutti i tests, escluso il primo. E se da T che e' il doppio della somma dei coefficienti di correlazione fra tutti i tests (poiche' nella matrice ogni coefficiente di correlazione e' ripetuto due volte) si toglie il doppio della somma dei coefficienti di correlazione del test 1 con gli altri tests ($T - 2 A_1$) rimane il doppio della somma dei coefficienti di correlazione tra tutti i tests, escluso il primo.

(2) Cioe' ad una parte di una matrice ottenuta da Holzinger applicando i tests di Otis a 50 bambini (v. SPEARMAN, *The Aptitudes of Man*, p. 148).

5. Costruire una nuova matrice (Tab. 10) dello stesso ordine, avente come elementi i quadrati degli elementi dell'altra matrice. (Tale matrice e' necessaria per calcolare i valori A'). (Es.: gli elementi della prima riga della nuova matrice: $.54^2 = .292$; $.47^2 = .221$; $.50^2 = .250$; $.24^2 = .058$).

6. Addizionare, riga per riga, gli elementi di questa seconda matrice, e segnare le somme delle righe nella colonna intestata A' . (Esempio: $.292 + .221 + .250 + .058 = .821$).

Fare, per controllo, le somme delle colonne e vedere se corrispondono alle somme delle righe.

7. Costruire una tabella con 7 colonne e tante righe quanti sono i tests della batteria. Intestare ogni singola colonna corrispondentemente al modello dato in Tab. 11 e completare le due prime colonne (A^2 ed A') riportando da Tab. 9 e 10 i dati precedentemente calcolati.

8. Costruire la 3a colonna, intestata $A^2 - A'$, sottraendo, riga per riga, i dati della 2a colonna dai dati della 1a. (Es.: $3.062 - .821 = 2.241$; $2.560 - .708 = 1.852$).

Controllo: Somma della 3a colonna = Somma della 1a colonna - Somma della 2a colonna (1) (Es.: $10.147 - 2.866 = 7.281$).

9. Costruire la colonna $2A$, moltiplicando per 2 i dati della colonna A della 1a matrice. [Es.: $2(1.75) = 3.50$].

Controllo: la somma della colonna $2A$ e' uguale a $2T(2)$. [Esempio: $14.04 = 2(7.02)$].

10. Costruire la colonna $T - 2A$, sottraendo ciascun elemento della precedente colonna $2A$ dalla somma di tutti gli elementi della 1a matrice, T . (Es.: $7.02 - 3.50 = 3.52$).

Controllo: la somma della colonna $T - 2A = (m-2)T(3)$. [Esempio: $21.06 = (5-2)(7.02) = 3(7.02) = 21.06$].

11. Costruire la colonna $\frac{A^2 - A'}{T - 2A}$ dividendo, riga per riga, i numeri della 3a colonna per i numeri della 5a colonna. (Esempio: $2.241 : 3.52 = .6366$).

12. Costruire l'ultima colonna, cioe' calcolare le saturazioni dei tests nel fattore G , estraendo la radice quadrata dei numeri della precedente colonna. (Esempio: $\sqrt{.6366} = .79$).

Calcolate le saturazioni dei tests nel fattore G , si puo' ricostruire la matrice delle correlazioni in base alla formula $r_{1j} = a_1 a_j$ in modo da controllare l'entita' delle differenze fra le correlazioni originarie e le correlazioni ricalcolate.

$$(1) \sum (A^2 - A') = \sum A^2 - \sum A'$$

$$(2) \sum A = T; \sum 2A = 2 \sum A = 2T$$

(3) $\sum (T - 2A) = mT - \sum 2A = mT - 2T = (m-2)T$ in cui m e' il numero dei tests della batteria, cioe' il numero di righe (o di colonne) della matrice delle correlazioni.

	1	2	3	4	5	A	A ²
1	-	.54	.47	.50	.24	1.75	3.062
2	.54	-	.52	.27	.27	1.60	2.560
3	.47	.52	-	.14	.18	1.31	1.716
4	.50	.27	.14	-	.38	1.29	1.664
5	.24	.27	.18	.38	-	1.07	1.145
	1.75	1.60	1.31	1.29	1.07	7.02 = T	10.147

Tabella 9.

	1	2	3	4	5	A'
1	-	.292	.221	.250	.058	.821
2	.292	-	.270	.073	.073	.708
3	.221	.270	-	.020	.032	.543
4	.250	.073	.020	-	.144	.487
5	.058	.073	.032	.144	-	.307
	.821	.708	.543	.487	.307	2.866

Tabella 10.

	A ²	A'	A ² - A'	2 A	T - 2 A	$\frac{A^2 - A'}{T - 2A} = a_1^2$	Saturazioni nel fattore G (= a ₁)
1	3.062	.821	2.241	3.50	3.52	.6366	.79
2	2.560	.708	1.852	3.20	3.82	.4848	.69
3	1.716	.543	1.173	2.62	4.40	.2665	.51
4	1.664	.487	1.177	2.58	4.44	.2650	.51
5	1.145	.307	.838	2.14	4.88	.1717	.41
	10.147	2.866	7.281	14.04	21.06	1.8246	2.91

$$(\sum a_1)^2 = 8.4681$$

Tabella 11.

A tale scopo si costruisce una matrice di ordine m come la matrice delle correlazioni originarie, intestando righe e colonne con i coefficienti di saturazione dei rispettivi tests (vedi tabella).

Tests Saturazioni	1 (.79)	2 (.69)	3 (.51)	4 (.51)	5 (.41)
1 (.79)	-	.54	.40	.40	.32
2 (.69)	.54	-	.35	.35	.28
3 (.51)	.40	.35	-	.26	.21
4 (.51)	.40	.35	.26	-	.21
5 (.41)	.32	.28	.21	.21	-

Tabella 12.

Ogni elemento della matrice si ottiene moltiplicando tra loro i coefficienti di saturazione intestati alla riga ed alla colonna di cui l'elemento fa parte.

Es.: r_{12} (riga 1, colonna 2) = $.79 \times .69 = .5451$.

Completata la matrice, si sottraggono, elemento per elemento, gli elementi della matrice così calcolata dai corrispondenti elementi della matrice originaria, ottenendo la matrice dei residui (Tab. 13):

	1	2	3	4	5
1	--	.00	.07	.10	-.08
2	.00	--	.17	-.08	-.01
3	.07	.17	--	-.12	-.03
4	.10	-.08	-.12	--	.17
5	-.08	-.01	-.03	.17	--

Tabella 13.

Es.: $.54 - .54 = 0$; $.47 - .40 = .07$

La matrice fattoriale (tab. 14), comprendente le saturazioni nel fattore G e nei rispettivi fattori S, rappresenta il risultato dell'analisi.

Tests	a G	u_1 S ₁	u_2 S ₂	u_3 S ₃	u_4 S ₄	u_5 S ₅
1	.79	.62				
2	.69		.72			
3	.51			.86		
4	.51				.86	
5	.41					.91

Tabella 14.

Dalla matrice fattoriale si puo' ricavare, in base alla formula $a_t^2 + u_t^2 = 1$, la matrice delle varianze (Tab. 15), dalla quale risulta in quale proporzione la varianza di ogni test e' suddivisa nei due fattori.

Matrice delle varianze

Test.	Varianza generale	Varianza specifica	Totale
1	.6366	.3634	1.000
2	.4848	.5152	1.000
3	.2665	.7335	1.000
4	.2650	.7350	1.000
5	.1717	.8283	1.000

Tabella 15.

Con cio' e' giunta a termine l'analisi fattoriale della batteria di tests. Si tratta, in questo caso, di veri e propri tests applicati ad un campione di soggetti, con l'unica limitazione del numero troppo piccolo di tests, scelto allo scopo di non appesantire i calcoli.

L'utilita' dell'analisi sta nell'aver chiarito il significato dei singoli tests, giungendo a conoscenza della loro composizione fattoriale; nell'aver cioe' stabilito in che misura il risultato nel test dipende dal fattore G, e in che misura da un particolare fattore, specifico di quel test.

Data l'importanza del fattore G nelle piu' diverse prestazioni, e' evidente l'utilita' di un test fortemente saturo di G, su cui l'azione esercitata da S si possa considerare trascurabile. Tale test avra' il carattere di una misura approssimativa di G. Va notato tuttavia che quando ci si propone di misurare qualche cosa di diverso da G, la presenza di G costituisce una seria difficolta'. L'analisi fattoriale ha dimostrato infatti piu' volte che strumenti costruiti allo scopo di mettere in evidenza un'attitudine specifica risultavano tanto saturi di G da costituire in realta' delle misure di G, per quanto grossolane ed approssimative.

Il primo dei 5 tests della batteria, dato l'alto coefficiente di saturazione in G ($a_1 = 0.79$) si puo' considerare una misura approssimativa del fattore G.

6. Calcolo delle saturazioni per approssimazioni successive

Finora abbiamo fatto uso della matrice delle correlazioni incompleta, cioe' con la diagonale principale vuota. Come si e' detto, gli

elementi mancanti sono le autocorrelazioni, r_{11} , cioè le correlazioni di ogni singolo test con se stesso. E' chiaro che da un punto di vista teorico un coefficiente di autocorrelazione, qualunque sia il test, dev' essere uguale all' unita' :

$$r_{11} = r_{22} = r_{33} = r_{11} = 1. \quad (\text{v. Tab. 16a})$$

Infatti si tratterebbe di calcolare la correlazione tra una serie di risultati, ottenuti applicando il test ad un campione di soggetti, e quella stessa serie di risultati. Si e' detto anche che se si procede ^{come} sperimentalmente facendo ripetere (ove la ripetizione sia possibile) lo stesso test agli stessi soggetti (1), si ottiene $r_{tt} < 1$, perche' le due serie di risultati non sono identiche, in quanto per l'azione esercitata da fattori casuali, ripetendo il test non si ottiene la stessa misura. Di questo fenomeno si puo' tener conto nell'equazione di specificazione fattoriale, la quale assume allora la forma

$$z_{tp} = a_t G_p + u_t S_{tp} + e_t E_{tp}$$

in quanto si viene ad aggiungere una variabile E_{tp} = errore casuale, con il relativo coefficiente e_t (2).

(1) Quando cioè il test ripetuto conserva sostanzialmente lo stesso significato e non diventa un test di memoria o di apprendimento.

(2) Anche per l'entita' della variazione dovuta all'azione di condizioni incontrollabili e agenti in forma non sistematica, e' legittimo distinguere quanto e' dovuto al test e quanto e' dovuto al soggetto.

Vi sono infatti tests piu' o meno sensibili all'azione di tali condizioni come pure soggetti piu' o meno sensibili. Abbiamo quindi un fattore specifico di infedelta' E_p che misura l'infedelta' del singolo soggetto nel singolo test e un coefficiente di infedelta' e_t che misura l'infedelta' del test. Riportiamo la deduzione dell'equazione fattoriale della varianza, completa della saturazione del fattore di errore:

$$\begin{aligned} \sigma_{z_t}^2 &= 1 = \frac{\sum_{p=1}^n z_{tp}^2}{n} = \frac{\sum_{p=1}^n (a_t G_p + u_t S_{tp} + e_t E_{tp})^2}{n} = \\ &= a_t^2 \frac{\sum_{p=1}^n G_p^2}{n} + u_t^2 \frac{\sum_{p=1}^n S_{tp}^2}{n} + e_t^2 \frac{\sum_{p=1}^n E_{tp}^2}{n} + 2 a_t u_t \frac{\sum_{p=1}^n G_p S_{tp}}{n} + \\ &+ 2 a_t e_t \frac{\sum_{p=1}^n G_p E_{tp}}{n} + 2 u_t e_t \frac{\sum_{p=1}^n S_{tp} E_{tp}}{n} = \\ &= a_t^2 \sigma_G^2 + u_t^2 \sigma_{S_t}^2 + e_t^2 \sigma_{E_t}^2 + 2 a_t u_t r_{GS_t} + 2 a_t e_t r_{GE_t} + 2 u_t e_t r_{S_t E_t} \end{aligned}$$

Ma i fattori sono privi di correlazione fra loro, quindi tutti i coefficienti di correlazione fra fattori sono uguali a zero.

nel caso particolare della matrice gerarchica + fra saturazione del test e misura fattoriale, ecc.

questo è dovuto alla correlazione tra i test e quanto è dovuto alla saturazione del test

90 sostituendo nell'equazione della varianza $\frac{\sum z_{tp}^2}{N}$, e' equazione (1) specificazione al posto di z_{tp} , 2' ottenne

Cap. II, 6]

Con procedimento analogo a quello precedentemente usato al § 3 si ricava dall'equazione di specificazione l'equazione della varianza:

$$1 = a_t^2 + u_t^2 + e_t^2$$

in cui la varianza del test e' suddivisa in varianza comune, varianza specifica e varianza di errore (1).

Il coefficiente di autocorrelazione r_{tt} (coefficiente di fedelta') e' una misura della costanza del test, in quanto risulta piu' elevato quanto meno sul risultato del test incidono le variabili casuali, cioe' quanto piu' i risultati del test ripetuto sono simili a quelli ottenuti applicando il test la prima volta sullo stesso campione di soggetti. Si puo' agevolmente dimostrare (2) che $r_{11} = a_1^2 + u_1^2 = 1 - e_1^2$ cioe' il coefficiente di autocorrelazione e' uguale alla varianza si-

Le varianze (σ^2) in unita' standard sono uguali a 1, quindi l'espressione si riduce a:

$$\sigma_{z_t}^2 = a_t^2 + u_t^2 + e_t^2 = 1.$$

(1) Va tenuto presente che quando si trascura la varianza di errore e si utilizza la formula $1 = a^2 + u^2$ per calcolare il coefficiente u_t (saturazione del test t nel fattore specifico) si congloba nel coefficiente u_t anche il coefficiente e_t .

Poiche' in genere si trascura il fattore specifico e la relativa saturazione, questa imprecisione non porta ad alcuna conseguenza.

(2) Il punto di partenza e', al solito, la formula del coefficiente di correlazione, in cui z_{t_1p} e z_{t_2p} sono i risultati di un soggetto in due forme parallele dello stesso test. L'indice t senza contrassegno (cioe' t in luogo di t_1 o t_2) che compare nel successivo sviluppo dell'equazione, sta ad indicare che la misura espressa dal simbolo che porta l'indice t e' identica nelle due forme parallele del test. Infatti dalla definizione di tests paralleli (H. GULLIKSEN, *Theory of Mental Tests*) si deduce che essi si differenziano fattorialmente soltanto per il fattore E , di errore casuale; cioe', in due tests paralleli non soltanto il fattore G , ma anche il fattore S e' uguale ($S_{t_1} = S_{t_2}$, ma $E_{t_1} \neq E_{t_2}$): e cio' vale a fortiori per due ripetizioni di

uno stesso test.

$$r_{t_1 t_2} = \frac{\sum_{p=1}^n z_{t_1 p} z_{t_2 p}}{n} =$$

$$= \frac{\sum_{p=1}^n [(a_{t_1} G_p + u_{t_1} S_{t_1 p} + e_{t_1} E_{t_1 p}) (a_{t_2} G_p + u_{t_2} S_{t_2 p} + e_{t_2} E_{t_2 p})]}{n} =$$

$$= a_t^2 \frac{\sum_{p=1}^n G_p^2}{n} + a_t u_t \frac{\sum_{p=1}^n G_p S_{tp}}{n} + a_t e_t \frac{\sum_{p=1}^n G_p E_{t_2 p}}{n} + u_t a_t \frac{\sum_{p=1}^n S_{tp} G_p}{n} +$$

$$+ u_t^2 \frac{\sum_{p=1}^n S_{tp}^2}{n} + u_t e_t \frac{\sum_{p=1}^n S_{tp} E_{t_2 p}}{n} + e_t a_t \frac{\sum_{p=1}^n E_{t_1} G_p}{n} + e_t u_t \frac{\sum_{p=1}^n E_{t_2} S_{tp}}{n} + e_t^2 \frac{\sum_{p=1}^n E_{t_1} E_{t_2}}{n} =$$

$$= a_t^2 \sigma_G^2 + a_t u_t r_{G S_t} + a_t e_t r_{G E_{t_2}} + u_t a_t r_{S_t G} + u_t^2 \sigma_{S_t}^2 + u_t e_t r_{S_t E_{t_2}} + e_t a_t r_{E_{t_1} G} +$$

$$+ e_t u_t r_{E_{t_2} S_t} + e_t^2 r_{E_{t_1} E_{t_2}}$$

stematica (= non-casuale) del test (1). *Va notato che nella matrice per la* In altre parole, mentre tutte le correlazioni sono determinate dalle saturazioni dei tests nel fattore generale e soltanto da queste, le autocorrelazioni sono determinate dalle saturazioni nel fattore generale e dalle saturazioni nei fattori specifici. E' evidente infatti che mentre fra due tests diversi la correlazione non puo' dipendere che dal fattore comune e non da due fattori completamente diversi, nel caso di uno stesso test ripetuto e' comune non solo il fattore ^{comune} ma anche lo specifico e quindi tutti e due determinano l'ammontare della correlazione (Tab. 16 b).

Con cio' abbiamo considerato due possibilita' di completare la diagonale principale della matrice delle correlazioni, inserendo o l'unita' o i coefficienti di fedelta' dei rispettivi tests. Una terza possibilita' consiste nel riempire i vuoti in modo che le tetradi di cui fanno parte gli elementi della diagonale si annullino. Per raggiungere questo scopo basta riempire i vuoti della matrice con le quote di correlazione che sono dovute all'azione del fattore generale escludendo lo specifico, cioe' scrivere nelle caselle della diagonale principale a_t^2 anziche' $a_t^2 + u_t^2$.

Infatti, se in una matrice di correlazioni in cui tutte le tetradi si annullano, prendiamo le tetradi incomplete (cioe' quelle tetradi che mancano di un elemento (in quanto tale elemento fa parte della diagonale principale) e, esprimendo gli altri tre elementi in termini di saturazioni fattoriali calcoliamo l'elemento mancante, otteniamo sempre che l'elemento mancante e' a_t^2 , cioe' il quadrato della saturazione nel fattore G del relativo test t (2). *Così ad esempio, prendendo*

Esempio: prendiamo la tetrade

$$\begin{matrix} r_{12} & r_{13} \\ (r_{22}) & r_{23} \end{matrix}$$

che, espressa in termini fattoriali, applicando la formula $r_{ij} = a_i a_j$ diventa

$$\begin{matrix} a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ (X) & a_2 a_3 \end{matrix}$$

st assumendo che la differenza tetrade
 $a_1 a_2 a_2 a_3 - X a_1 a_3$

Essendo le varianze uguali a 1 e le correlazioni nulle, l'espressione si riduce a

$$r_{t_1 t_2} = a_t^2 + u_t^2$$

Va notato che e_t^2 si annulla poiche' in due forme parallele dello stesso test, gli errori casuali non sono correlati.

- (1) Sempreche' naturalmente i risultati siano espressi in unita' standard.
- (2) Cioe' del test (o, in generale, della variabile) corrispondente alla riga e alla colonna alle quali appartiene l'elemento della diagonale della matrice.

	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
1	1	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}	1	$1-e_1^2$	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}
2	r_{21}	1	r_{23}	r_{24}	r_{25}	2	r_{21}	$1-e_2^2$	r_{23}	r_{24}	r_{25}
3	r_{31}	r_{32}	1	r_{34}	r_{35}	3	r_{31}	r_{32}	$1-e_3^2$	r_{34}	r_{35}
4	r_{41}	r_{42}	r_{43}	1	r_{45}	4	r_{41}	r_{42}	r_{43}	$1-e_4^2$	r_{45}
5	r_{51}	r_{52}	r_{53}	r_{54}	1	5	r_{51}	r_{52}	r_{53}	r_{54}	$1-e_5^2$

A: Gli elementi della diagonale principale sono le misure teoriche di r_{tt} . Infatti

$$r_{tt} = a_t^2 + u_t^2 = 1$$

se non ci sono errori casuali.

B: Gli elementi della diagonale sono le misure sperimentali di r_{11} . Essendo

$$a_t^2 + u_t^2 + e_t^2 = 1$$

si ha

$$r_{tt} = a_t^2 + u_t^2 = 1 - e_t^2$$

cioe' $r_{tt} < 1$.

a)

b)

	1	2	3	4	5
1	a_1^2	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}
2	r_{21}	a_2^2	r_{23}	r_{24}	r_{25}
3	r_{31}	r_{32}	a_3^2	r_{34}	r_{35}
4	r_{41}	r_{42}	r_{43}	a_4^2	r_{45}
5	r_{51}	r_{52}	r_{53}	r_{54}	a_5^2

C: Gli elementi della diagonale principale sono le comunanze

$$a_t^2 = r_{tt} - (u_t^2 + e_t^2)$$

cioe' le quote di autocorrelazione dei tests che sono dovute all'azione del fattore generale. *cancelled*

la differenza tra le varianze

Tabella 16.

ria uguale a zero, si ha
l'equazione tetradica e'

$$a_1 a_2 a_2 a_3 = X a_1 a_3$$

da cui si ricava il valore di X , che è a_2^2 .

$$X = \frac{a_1 a_2 a_2 a_3}{a_1 a_3} = a_2^2$$

Completando con i quadrati delle saturazioni dei tests nel fattore generale (a_1^2) (la matrice delle correlazioni) si ottiene una matrice di coefficienti di correlazione che, coerentemente alla teoria dei due fattori, dipendono tutti e soltanto dall'azione del fattore comune. Gli elementi della diagonale principale (che rappresentano le quote di autocorrelazione dei tests, dovute all'azione del fattore comune) prendono il nome di *comunanze* (v. Tab. 16 c).

Un elegante metodo di calcolo delle saturazioni dei tests nel fattore comune si fonda sulle caratteristiche della matrice delle correlazioni completa di comunanze.

Per renderci conto del significato delle singole operazioni, conviene eseguirle su una matrice in cui le correlazioni siano espresse in termini di saturazioni fattoriali.

	1	2	3	4
1	a_1^2	$a_1 a_2$	$a_1 a_3$	$a_1 a_4$
2	$a_2 a_1$	a_2^2	$a_2 a_3$	$a_2 a_4$
3	$a_3 a_1$	$a_3 a_2$	a_3^2	$a_3 a_4$
4	$a_4 a_1$	$a_4 a_2$	$a_4 a_3$	a_4^2
	$\Sigma_1 =$ $= a_1(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$	$\Sigma_2 =$ $= a_2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$	$\Sigma_3 =$ $= a_3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$	$\Sigma_4 =$ $= a_4(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$

$$T = a_1 (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + a_2 (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + a_3 (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + a_4 (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) =$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2$$

Tabella 17.

La prima operazione consiste nell'addizionare gli elementi di ogni singola colonna. Si nota immediatamente che nella prima colonna il fattore a_1 si ripete in tutti gli elementi, e perciò nella somma a_1 può essere estratto a fattore comune; altrettanto vale per a_2 nella II colonna, per a_3 nella III colonna, ecc. La somma della I colonna (Σ_1) risulta $a_1 (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$, cioè è il prodotto della satu-

$X-X$ e con elementi (correlazioni e quote di autocorrelazioni)

(1) Si tenga presente che qui le espressioni "fattore" e "fattore comune" sono usate nel loro significato astratto e non hanno niente a che fare con

fattori comuni e occupi fattoriali

razione del I test nel fattore generale per la somma delle saturazioni (nel fattore generale) di tutti i tests della batteria (cioè di tutte le variabili della matrice); la somma della II colonna (Σ_2) risulta $a_2 (a_1+a_2+a_3 + \dots + a_n)$ cioè il prodotto della saturazione del II test nel fattore G per la somma delle saturazioni di tutti i tests nel fattore G; e così per le altre colonne.

E' chiaro che se si conosce la somma delle saturazioni di tutti i tests, cioè $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$ si potranno calcolare facilmente le singole saturazioni, perché basterà dividere la somma di ogni singola colonna (Σ_i) per la somma delle saturazioni di tutti i tests per

ottenere le singole saturazioni. Infatti $\frac{\Sigma_1}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n} = a_1$
 in quanto $\Sigma_1 = a_1(a_1+a_2+a_3 + \dots + a_n)$, cioè $\frac{a_1(a_1+a_2+a_3 + \dots + a_n)}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n} = a_1$;
 $\frac{\Sigma_2}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n} = a_2$, ecc.

D'altronde la somma delle saturazioni nei tests si calcola agevolmente dalla stessa matrice. Infatti addizionando le somme delle colonne della matrice

$$T = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 = a_1(a_1+a_2+a_3+a_4) + a_2(a_1+a_2+a_3+a_4) + a_3(a_1+a_2+a_3+a_4) + a_4(a_1+a_2+a_3+a_4)$$

si osserva che il fattore $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$ e' presente in tutte le somme e puo' essere quindi raccolto a fattore comune.

La somma delle somme, (cioè T, la somma di tutti i termini della matrice) risulta quindi

$$(a_1+a_2+a_3+\dots+a_n) (a_1+a_2+a_3+\dots+a_n) = (a_1+a_2+a_3+\dots+a_n)^2$$

Bastera' allora estrarre la radice quadrata della somma delle somme, cioè calcolare $\sqrt{T} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ per ottenere il divisore che ci permette di calcolare le singole saturazioni.

In altre parole $\frac{\Sigma_1}{\sqrt{T}} = a_1$; $\frac{\Sigma_2}{\sqrt{T}} = a_2$; ... $\frac{\Sigma_n}{\sqrt{T}} = a_n$.

La semplicita' del procedimento non deve tuttavia farci perdere di vista il punto di partenza. Siamo partiti dalla matrice completa, mentre in realta' i dati di cui disponiamo e dai quali dobbiamo ricavare i coefficienti di saturazione, sono soltanto le correlazioni tra i tests. In altre parole noi disponiamo soltanto della matrice delle correlazioni *priva delle comunanze*. E' ovvio del resto che se disponessimo delle comunanze, a_i^2 , basterebbe estrarre la radice quadrata da ogni singola comunanza per ottenere i coefficienti di saturazione, in quanto $\sqrt{a_i^2} = a_i$.

Tuttavia il procedimento richiede che la matrice delle correlazioni sia completa di comunanze. Si deve quindi ricorrere ad un artificio, mettendo cioè, al posto delle comunanze ignote, delle stime, per quanto grossolane.⁽¹⁾

(1) *Sintetico* Un coefficiente di correlazione può assumere tutti i valori da -1 a +1, ma una comunanza, essendo il quadrato di un numero (a_i^2) può assumere soltanto valori positivi; ed essendo il quadrato di un coefficiente di correlazione (1) può assumere soltanto i valori tra 0 e +1. D'altronde, poiché l'autocorrelazione $r_{11} = a_1^2 + u_1^2$ è minore di 1 per l'incostanza dei tests, sappiamo che $a_1^2 < 1$.

Come prima approssimazione si usa assumere come comunanza il coefficiente di correlazione più elevato della colonna; ma anche una stima così grossolana è utilizzabile agli effetti del calcolo, *perché il procedimento*

Si calcolano cioè si procede cioè al calcolo dei coefficienti di saturazione col procedimento precedentemente descritto. Ottenuti i valori $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, si innalzano al quadrato, ottenendo in tal modo una seconda approssimazione delle comunanze. Si inseriscono quindi le nuove comunanze nella matrice di correlazione e si rifanno i calcoli continuando così finché si raggiunge il grado di approssimazione desiderato (2). Quando poi la matrice è di ordine superiore a 10 (cioè il numero dei tests relativamente ai quali sono state calcolate le correlazioni è maggiore di 10) l'imprecisione dovuta alla stima delle comunanze è trascurabile e ci si può accontentare della prima approssimazione, cioè si accetta senz'altro il risultato del calcolo (3). *non necessario approssimazioni, senza provvedere alla prima fase a nuove stime delle comunanze*

PROCEDIMENTO

1. Completare con le stime delle comunanze la matrice delle correlazioni inserendo, tra parentesi, nella casella vuota di ogni colonna, il coefficiente di correlazione più alto della stessa colonna.

2. Aggiungere gli elementi delle colonne della matrice (comprese le stime delle comunanze).

3. Aggiungere le somme delle colonne della matrice

$$(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_n) = T$$

4. Estrarre la radice quadrata della somma delle somme

$$\sqrt{T} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

(1) Ricordiamo che il coefficiente di saturazione a_i è il coefficiente di correlazione del test z_i col fattore G e quindi può assumere tutti i valori tra -1 e +1.

(2) Il grado di approssimazione risulta dal numero di decimali uguali ottenuti in due approssimazioni successive. È chiaro che si tratta di ottenere per le comunanze lo stesso grado di approssimazione (cioè lo stesso numero di decimali) degli altri coefficienti di correlazione della matrice.

(3) È chiaro che, essendo basato il calcolo delle saturazioni sulle somme delle colonne, l'imprecisione introdotta da un addendo è tanto più piccola, quanto più grande è il numero degli addendi.

d'altronde, essendo $a_i^2 < r_{ii}$ (perché $r_{ii} = a_i^2 + u_i^2$); salvo il caso, teoricamente possibile di un test senza saturazione specifica ($u_i = 0$) essa non essere superiore a 1

5. Calcolare i coefficienti di saturazione dei singoli tests nel fattore generale, dividendo le singole somme per \sqrt{T}

$$\frac{\Sigma_1}{\sqrt{T}} = a_1 \quad \frac{\Sigma_2}{\sqrt{T}} = a_2 \quad \text{ecc.}$$

(5a. Anziche' dividere le somme per \sqrt{T} conviene in genere calcolare $\frac{1}{\sqrt{T}}$ e moltiplicare per $\frac{1}{\sqrt{T}} = e$ le varie somme $\Sigma_1 = a_1$ e $\Sigma_2 = a_2$, ecc.).

Se l'ordine della matrice, cioe' il numero delle variabili, $m > 9$, l'analisi e' compiuta e non resta che costruire la matrice fattoriale e la matrice delle varianze. Se invece il numero delle variabili e' $m < 10$:

6. Innalzare al quadrato le saturazioni in modo da ottenere la seconda approssimazione delle comunanze.

7. Inserire la nuova stima della comunanza nella matrice e ripetere le operazioni 2-6, fino ad ottenere l'approssimazione desiderata.

1. Soggetti e tests

I risultati di un campione di n soggetti in una batteria di m tests si possono riunire in una matrice le cui righe corrispondono ai diversi tests e le colonne ai diversi soggetti (Tabb. 18 e 20). Un elemento X_{tp} sta ad indicare il risultato nel test t del soggetto p (1).

no campione
1.28
 $X =$

		Soggetti						
		1	2	3	...	p	...	n
tests	1	X ₁₁	X ₁₂	X ₁₃	...	X _{1p}	...	X _{1n}
	2	X ₂₁	X ₂₂	X ₂₃	...	X _{2p}	...	X _{2n}
	3	X ₃₁	X ₃₂	X ₃₃	...	X _{3p}	...	X _{3n}

	t	X _{t1}	X _{t2}	X _{t3}	...	X _{tp}	.	.
.
.
m	X _{m1}	X _{m2}	X _{m3}	.	X _{mp}	.	.	X _{mn}

m *n*

Tabella 18.

Sottoponendo ogni elemento della matrice alla trasformazione secondo la formula

$$z_{tp} = \frac{X_{tp} - \bar{X}_t}{S_t}$$

(1) Va notato che nella matrice dei risultati dei soggetti nei tests, gli elementi della diagonale principale non presentano alcuna particolarità che li differenzi dagli altri elementi.

(in cui \bar{X}_t e' la media aritmetica dei risultati di un campione di soggetti nel test t , e S_t e' la deviazione standard), si ottiene una matrice di cui gli elementi sono i risultati in unita' standard dei soggetti nei tests (Tabb. 19 e 21) (1).

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & \dots & z_{1p} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & \dots & z_{2p} & \dots & z_{2n} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & \dots & z_{3p} & \dots & z_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{t1} & z_{t2} & z_{t3} & \dots & z_{tp} & \dots & z_{tn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & z_{n3} & \dots & z_{np} & \dots & z_{nn} \end{bmatrix}$$

Tabella 19

Ogni riga della matrice X e' costituita da una sequenza di numeri che rappresentano i risultati dei soggetti in un determinato test (ossia i punteggi conseguiti dai soggetti in quel test).

Come e' noto i numeri reali possono essere rappresentati dai punti di una retta, quando si sia scelto un punto della retta come origine, un segmento come unita' e un verso come positivo.

Così ad esempio possiamo rappresentare su una retta (fissata l'origine, il verso positivo e l'unita' di misura) i numeri della prima riga della matrice X , cioe' i risultati dei soggetti nel test 1, risultati che si trovano tutti sulla semiretta positiva (v. fig. 1). Agli stessi risultati, espressi in unita' standard (prima riga della matrice Z) - trattandosi di numeri di cui alcuni sono positivi, altri negativi - corrisponderanno invece dei punti di cui alcuni sono al di qua, altri al di la' dell'origine (v. fig. 2).

Analogamente si possono rappresentare su un'altra retta i punti conseguiti dagli stessi soggetti in un altro test (2a riga della matrice Z). Convienè compiere tale operazione sulla retta che, essendo perpendicolare alla prima, la incontra nel punto 0. Assumendo il punto 0 come origine anche per la seconda retta, bastera' fissare il verso positivo e l'unita' di misura (2) per essere in grado di rappresentare i

(1) Le matrici dei risultati nei tests non si scrivono quasi mai, data la loro ampiezza; infatti per l'analisi fattoriale si ricorre a campioni di almeno 300-400 soggetti e si usano in genere batterie di oltre 10 tests. La matrice X e la matrice Z (tabelle 20 e 21) raccolgono i risultati di 10 soggetti in 5 tests, cioe' rappresentano una piccola parte di una matrice di risultati di un campione di soggetti.

(2) Poiche' la scala di misura e' la stessa per tutti i tests e' giusto usare sempre la stessa unita' di misura.

S o g g e t t i

	1	2	3	4	5	6.	7	8	9	10	\bar{X}	S
1	26	20	32	18	30	10	22	24	32	16	22	4
2	35	26	24	28	47	19	33	19	40	31	26	7
3	8	7	7	19	13	10	14	16	15	10	10	3
4	81	71	100	81	93	79	105	57	87	60	81	12
5	43	23	57	40	33	17	49	41	33	25	33	8

Matrice X (punteggi grezzi)

Tabella 20.

S o g g e t t i

	1	.2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	+1.00	- .50	+2.50	-1.00	+2.00	-3.00	0.00	+ .50	+2.50	-1.50
2	+1.28	0.00	- .28	+ .28	+3.00	-1.00	+1.00	-1.00	+2.00	+ .71
3	- .67	-1.00	-1.00	+3.00	+1.00	0.00	-2.00	+2.00	+1.67	0.00
4	0.00	- .83	+1.58	0.00	+1.00	- .17	+2.00	-2.00	+ .50	-1.75
5	+1.25	-1.25	+3.00	+ .87	0.00	-2.00	+2.00	+1.00	0.00	-1.00

Matrice Z (risultati in unita' standard)

Tabella 21.

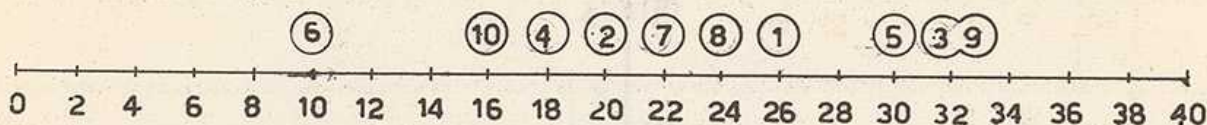


Fig. 1. - Rappresentazione grafica dei risultati dei 10 soggetti nel test 1 (punteggi grezzi). I numeri cerchiati rappresentano i soggetti.

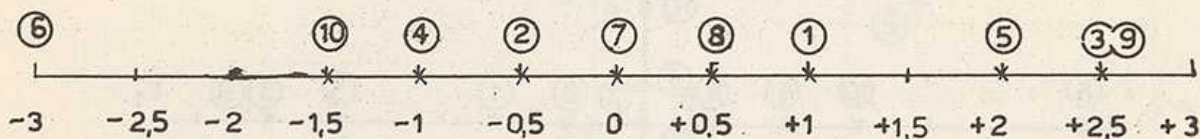


Fig. 2. - Rappresentazione grafica dei risultati dei 10 soggetti nel test 1 (unita' standard).

risultati del secondo test (v. fig. 3).

Ma i risultati sono associati a due a due, in quanto ogni singolo soggetto ha conseguito un risultato nell'uno o nell'altro test. Questo carattere dei dati, che risulta dalla matrice in quanto i risultati dello stesso soggetto appartengono alla stessa colonna, puo' essere messo in evidenza anche nella rappresentazione geometrica.

Consideriamo infatti la perpendicolare alla retta t_1 nel punto che corrisponde al risultato di un soggetto nel test 1, e la perpendicolare alla retta t_2 nel punto che corrisponde al risultato dello stesso soggetto nel test 2; essendo perpendicolari fra loro, esse si incontrano in un punto P_1'' . Tale punto gode della proprieta' che le sue perpendicolari rispetto agli assi t_1 e t_2 individuano i punti corrispondenti ai risultati dello stesso soggetto nei due tests; esso puo' dunque essere assunto a rappresentare tale soggetto (fig. 4).

o proiezioni ortogonali

Disponiamo cosi' di un modello adeguato per rappresentare due tests, con i rispettivi risultati e i soggetti che hanno conseguito quei risultati (fig. 5).

Ma la matrice non comprende soltanto due tests. Ci conviene quindi estendere il modello in modo da comprendere anche le altre righe della matrice.

L'estensione del modello da due a tre tests e' agevole. A rappresentare i risultati del 3° test si introduce un terzo asse, cioe' una terza retta (t_3), perpendicolare alle altre due, che passa per l'origine comune. Fissato il verso positivo, l'origine (che coincide con l'origine degli altri due assi) e' assunta la stessa unita' di misura, si possono rappresentare sul terzo asse i risultati del campione dei soggetti nel 3° test.

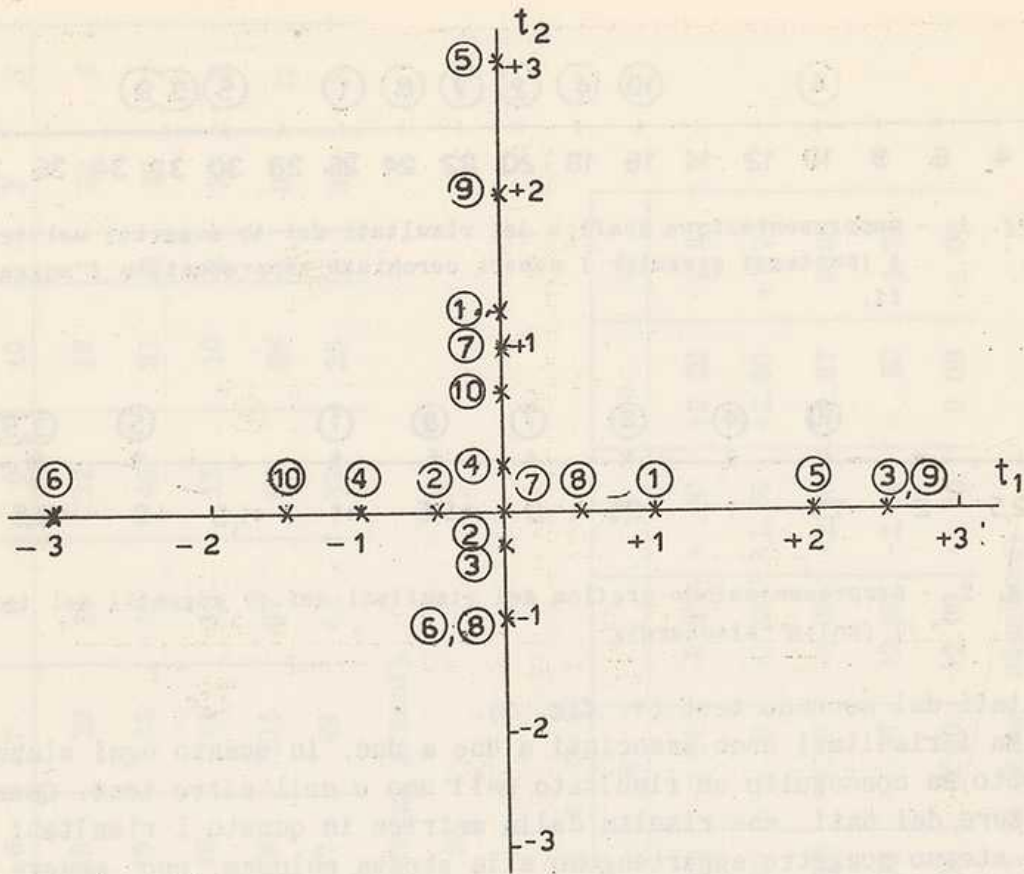


Figura 3.

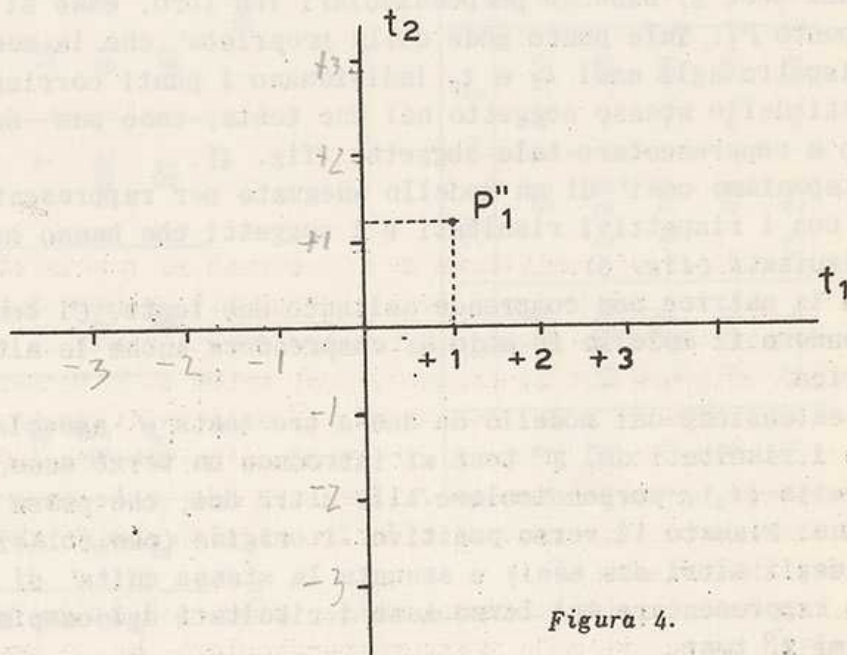


Figura 4.

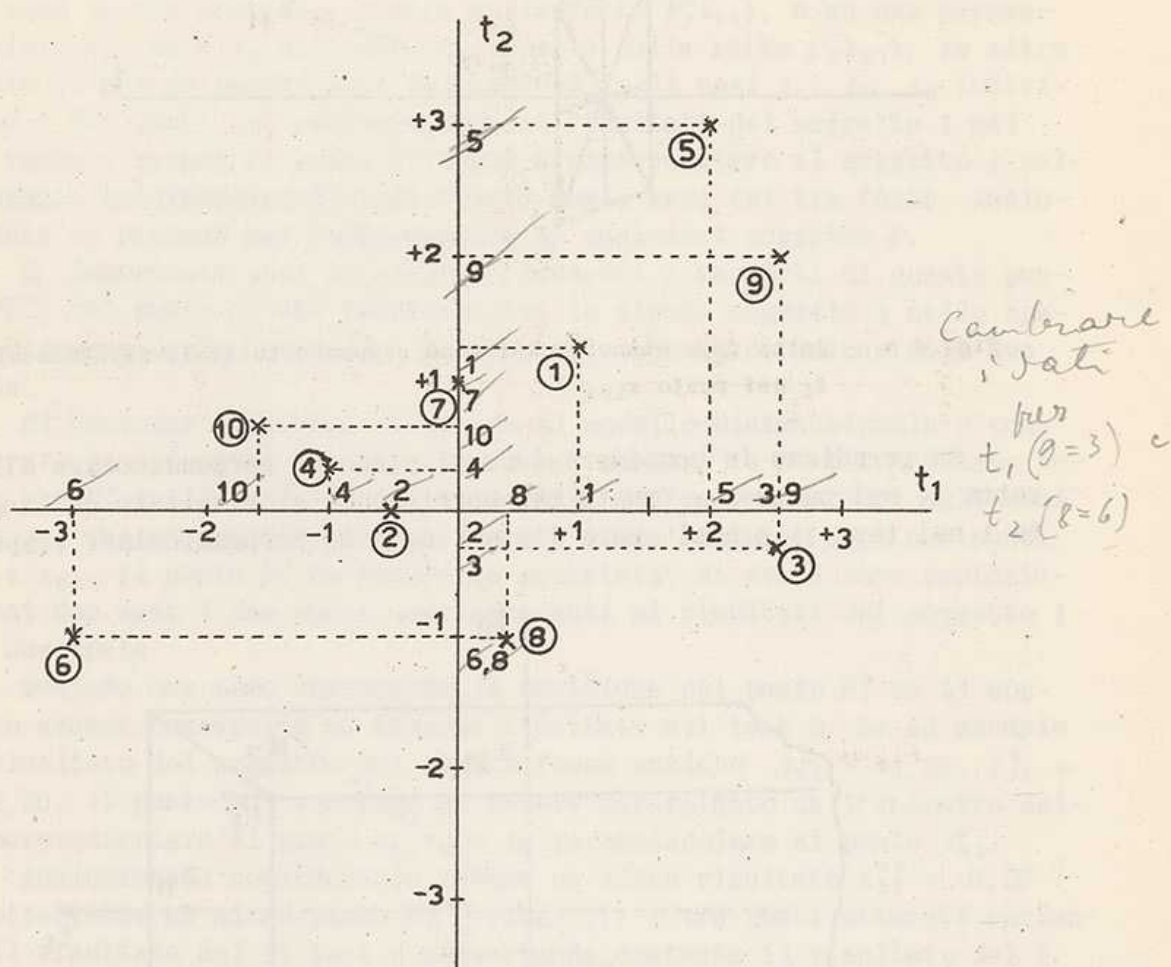


Figura 5.

Le operazioni si complicano un po' quando si tratta di individuare i punti che rappresentano i singoli soggetti. Mentre infatti due rette perpendicolari stanno in un piano e quindi tutte le operazioni geometriche relative al sistema delle due rette si riferiscono al piano, cioè allo spazio a due dimensioni da esse individuato, tre rette che si incontrano in un punto e sono perpendicolari tra loro non stanno in un piano, ma nello spazio tridimensionale, e le operazioni relative al sistema dei tre assi si riferiscono allo spazio tridimensionale da essi individuato.

Mentre nello spazio bidimensionale, cioè nel piano, per un punto di una retta passa una sola retta perpendicolare, nello spazio tridimensionale per un punto di una retta passano infinite perpendicolari,

le quali fanno tutte parte di un piano perpendicolare alla retta stessa (fig. 6. a).

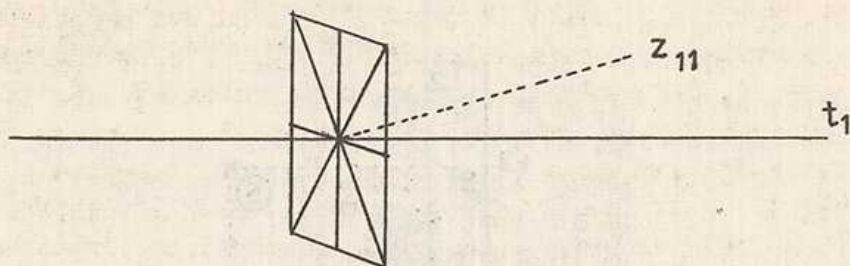


Fig. 6 a. - Retta t_1 e piano in cui sono comprese tutte le perpendicolari a t_1 nel punto z_{11} .

Se prendiamo in considerazione il piano α_1 perpendicolare alla retta t_1 nel punto z_{11} (punto che corrisponde al risultato del soggetto 1 nel test 1) e così pure i piani α_2 e α_3 perpendicolari rispetti-

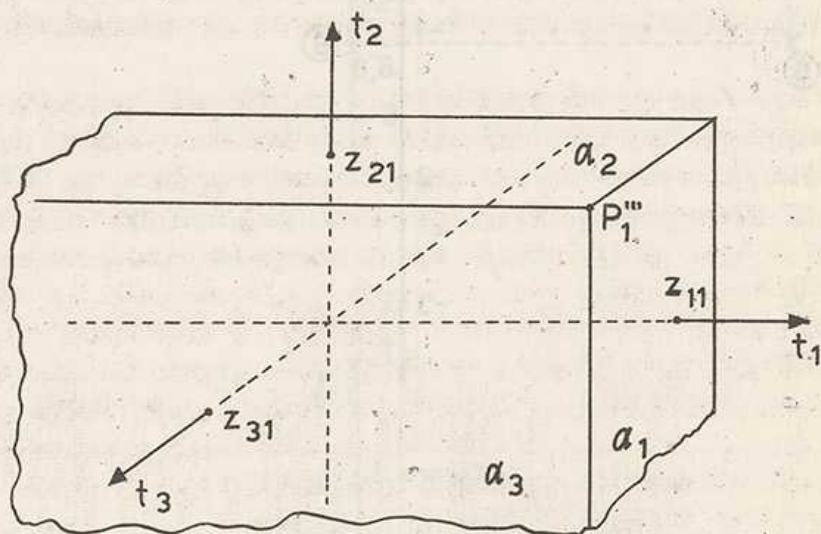


Figura 6 b.

vamente alla retta t_2 , alla retta t_3 nei punti z_{21} e z_{31} , corrispondenti ai risultati dello stesso soggetto nei tests 2 e 3, questi tre piani perpendicolari tra loro si incontrano nel punto P_1''' (fig. 6b) (1).

(1) Non a tutti riesce agevole rappresentarsi tre piani perpendicolari a tre rette fra loro perpendicolari ed a loro volta perpendicolari fra loro. Sa-

Tale punto, appartenendo contemporaneamente ai tre piani suddetti ha la proprietà di giacere contemporaneamente su una perpendicolare all'asse t_1 nel punto z_{11} (ossia la retta $P''_1 z_{11}$) su una perpendicolare all'asse t_2 nel punto z_{21} (ossia sulla retta $P''_1 z_{21}$), e su una perpendicolare all'asse t_3 nel punto z_{31} (ossia sulla retta $P''_1 z_{31}$). In altre parole le tre perpendicolari dal punto P''_1 agli assi t_1 , t_2 , t_3 individuano i tre punti che corrispondono ai risultati del soggetto 1 nei tre tests e quindi il punto P''_1 viene a rappresentare il soggetto 1 nello spazio tridimensionale individuato dagli assi dei tre tests. Analogamente si procede per rappresentare un qualsiasi soggetto P .

È importante aver chiaramente presenti i rapporti di questo punto (P''_1) col punto P'_1 che rappresentava lo stesso soggetto 1 nello spazio bidimensionale, quando si erano presi in considerazione solo due tests.

Ci conviene anzitutto ritornare al modello bidimensionale e considerare la relazione che sussiste fra i punti P'' e P' (1). Abbiamo veduto che P''_1 è il punto di incontro delle due perpendicolari agli assi t_1 e t_2 , che incontrano rispettivamente i due suddetti assi nei punti z_{11} e z_{21} . Il punto P'' ha dunque la proprietà di avere come proiezioni sui due assi i due punti corrispondenti ai risultati del soggetto 1 nei due tests.

Vediamo ora come varierebbe la posizione del punto P''_1 se il soggetto avesse conseguito un diverso risultato nel test 2. Se ad esempio il risultato del soggetto nel test 2 fosse anziché $z_{21} = +1,28$, $z_{21}^* = -2,50$, il punto P''_1^* verrebbe ad essere determinato dall'incontro della perpendicolare al punto z_{11} con la perpendicolare al punto z_{21}^* .

Analogamente considerando invece un altro risultato $z_{21}^{**} = +0,50$ si otterrebbe un altro punto P''_1^{**} (fig. 7). I tre punti ottenuti variando il risultato del II test e conservando costante il risultato del I test vengono a trovarsi sulla stessa retta r , cioè sulla perpendicolare al punto z_{11} che è il luogo dei punti che rappresentano i soggetti che nel test 1 hanno ottenuto il risultato $+1,28$. Va dunque tenuto presente che la proiezione del punto P'' sull'asse t_1 è sempre il punto z_{11} , in quanto il punto P'' , qualunque sia il risultato z_{21} nell'altro test t_2 , deve stare sulla perpendicolare all'asse 1 nel punto z_{11} .

Lo stesso fatto può essere prospettato da un altro punto di vista. Se il soggetto 1 è stato sottoposto a due tests, è rappresentato adeguatamente in un modello bidimensionale, come un punto del pia-

ra' utile perciò considerare un esempio che si ha sempre sotto gli occhi, cioè tre facce di un cubo che si incontrano in un punto, cioè uno spigolo del cubo, e così due pareti di una stanza e il soffitto che si incontrano in un angolo della stanza (fig. 6b).

(1) I punti P' sono i punti che rappresentano il risultato di un soggetto nei singoli assi-test (spazi a una dimensione), cioè i punti z_{pt} .

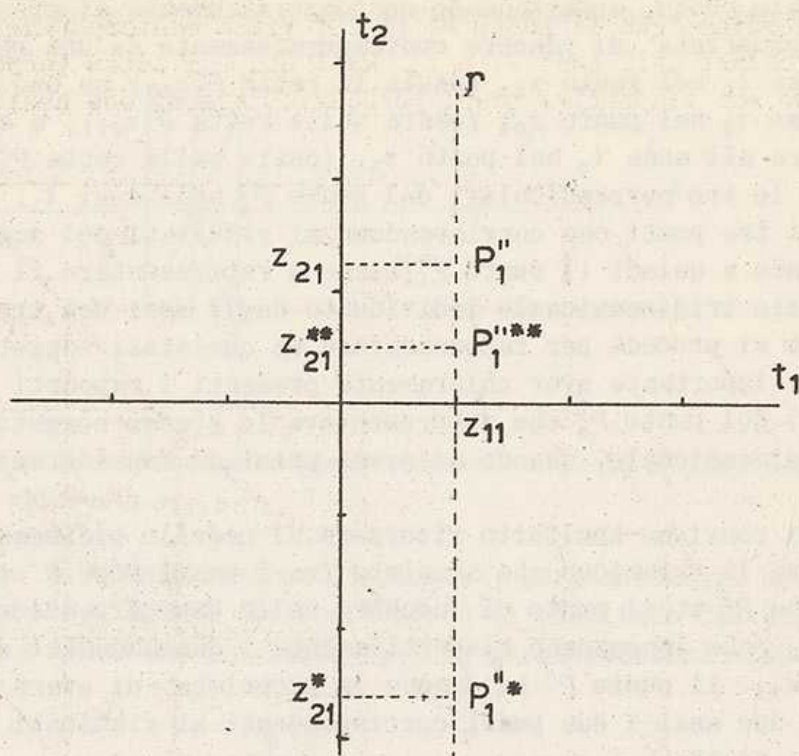


Figura 7.

no, individuato dagli assi dei due tests. Se però conosciamo il risultato del soggetto 1 in uno solo dei due tests [per es. il risultato nel test 1 (z_{11})], la posizione del punto nel piano non ci è nota, e rimane indeterminata. Però tale indeterminazione non è assoluta: il punto che rappresenta il soggetto non può essere un punto qualsiasi del piano, ma soltanto uno dei punti della retta r , i quali hanno come proiezione sull'asse 1 il punto z_{11} .

Passiamo ora a considerare il modello tridimensionale (fig. 8).

Abbiamo veduto che il punto P_1''' è determinato dall'intersezione dei tre piani α_1 , α_2 e α_3 , perpendicolari, rispettivamente, agli assi t_1 , t_2 e t_3 in corrispondenza ai punti z_{11} , z_{21} , z_{31} , i quali rappresentano i risultati del soggetto 1 nei tre tests, e che il punto P_1''' , appartenendo ai suddetti tre piani perpendicolari agli assi ha come proiezioni ortogonali sui tre assi i punti z_{11} , z_{21} , z_{31} e perciò rappresenta il soggetto 1 nello spazio tridimensionale individuato dagli assi dei tre tests.

Possiamo quindi precisare la relazione geometrica fra P_1''' e P_1'' , cioè fra il punto che rappresenta un soggetto nello spazio tridimensionale e il punto che rappresenta lo stesso soggetto in uno spazio a due dimensioni, per es. nel piano individuati dai due assi t_1 e t_2 (1).

(1) Va tenuto presente che a un punto P_1''' corrispondono 3 punti P_1'' , uno

Ricordiamo che il punto P_1'' (1, 2) giace contemporaneamente sulle perpendicolari agli assi t_1 e t_2 . Ma l'una e l'altra perpendicolare giacciono sui rispettivi piani perpendicolari ai due assi. quindi il

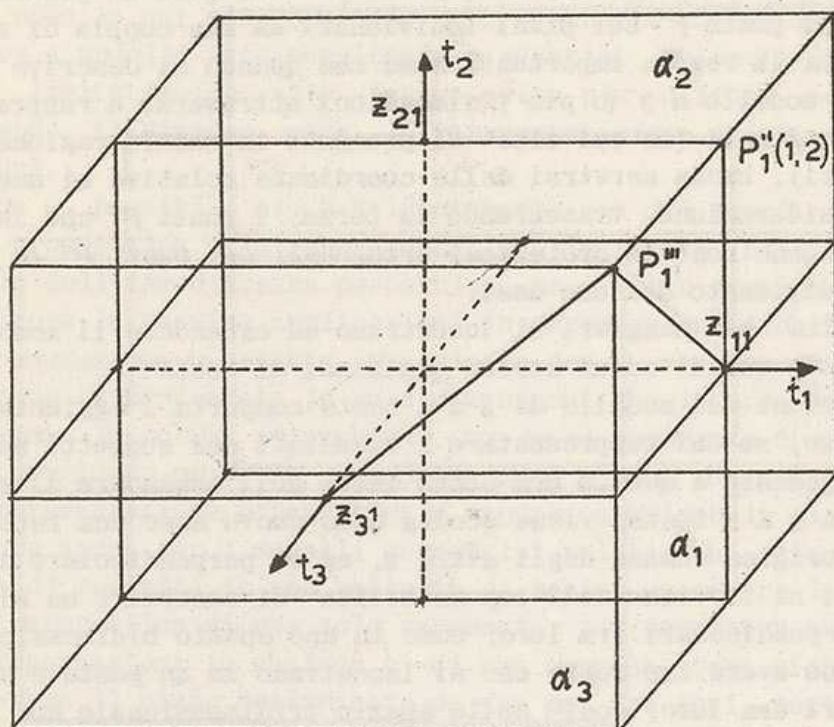


Figura 8.

punto P_1'' (1, 2) giace contemporaneamente sui due suddetti piani e cioè sullo spigolo che i due piani determinano incontrandosi. Ma anche il punto P_1''' giace, per costruzione, sui piani perpendicolari ai tre assi, e quindi giace anch'esso, come il punto P_1'' (1, 2) sullo spigolo individuato dai due piani α_1 e α_2 perpendicolari agli assi t_1 e t_2 (1).

Essendo i due suddetti piani perpendicolari agli assi t_1 e t_2 , sono perpendicolari anche al piano individuato dai due assi; allora il piano individuato dai due assi [che è il piano in cui giace P_1'' (1, 2)] è perpendicolare allo spigolo che i due piani formano incontrandosi. Di conseguenza il punto P_1'' (1, 2) è la proiezione ortogonale del punto P_1''' sul piano individuato dagli assi 1 e 2.

Si è dunque dimostrato che i punti z_{tp} ($= P'$) sono le proiezioni ortogonali sui rispettivi assi (ognuno dei quali rappresenta uno spa-

nel piano individuato degli assi t_1 e t_2 , uno nel piano individuato dagli assi t_2 e t_3 ed il terzo nel piano individuato dagli assi t_1 e t_3 .

Per distinguerli dovremo indicarli con P'' (1, 2), P'' (1, 3), P'' (2, 3).

(1) Il punto P_1''' giace nel punto d'incontro dei tre piani α_1 , α_2 e α_3 e quindi su tutti e tre gli spigoli formati dall'incontro dei piani suddetti.

zio a una dimensione) dei punti P'' , i quali rappresentano i soggetti nel piano determinato da due assi-tests (spazio a due dimensioni); ma i punti z_{tp} sono anche le proiezioni ortogonali dei punti P''' che rappresentano i soggetti nello spazio determinato da 3 assi-tests ortogonali (spazio a tre dimensioni); e i punti P'' sono pure le proiezioni ortogonali del punto P''' sui piani individuati da una coppia di assi t .

Ne deriva la regola importantissima che quando si descrive analiticamente un modello a 3 (o piu') dimensioni attraverso a rappresentazioni bidimensionali (in cui cioè si prendono in considerazione soltanto due assi), basta servirsi delle coordinate relative ai due assi presi in considerazione, trascurando la terza: i punti P'' che in tal modo si ottengono sono le proiezioni ortogonali dei punti P''' (o $P >'''$) sul piano individuato dai due assi.

Difficoltà ben maggiori si incontrano ad estendere il modello a quattro tests e quindi ad un numero qualsiasi di tests.

L'estensione del modello da 3 a 4 tests comporta l'aggiunta di un ulteriore asse, su cui rappresentare i risultati dei soggetti nel 4° test. Analogamente a quanto era stato fatto nell'estendere il modello da 1 a 2 e da 2 a 3 tests, viene scelta come nuovo asse una retta che passa per l'origine comune degli altri 3, ed è perpendicolare agli altri 3. Ma noi ci troviamo nell'impossibilità di costruire un sistema di 4 assi perpendicolari fra loro: come in uno spazio bidimensionale non si possono avere tre rette che si incontrano in un punto e sono perpendicolari tra loro, così nello spazio tridimensionale non si possono avere quattro rette che presentano questa caratteristica. E come per avere tre rette perpendicolari tra loro si era dovuti passare da uno spazio bidimensionale a uno spazio tridimensionale, così per avere 4 rette perpendicolari tra loro bisogna passare da uno spazio tridimensionale a uno spazio quadridimensionale. Solo che, mentre uno spazio tridimensionale fa parte della nostra esperienza percettiva e rappresentativa, uno spazio quadridimensionale è irrepresentabile. Si tratta di una pura costruzione matematica senza riscontro nella realtà percettiva e rappresentativa a cui vengono estesi, senza contraddizione, assiomi, definizioni, teoremi e dimostrazioni. E come si passa da uno spazio a tre dimensioni ad uno spazio a quattro dimensioni, così si passa da uno spazio a quattro dimensioni ad uno spazio a cinque dimensioni (caratterizzato dalla possibilità di avere 5 rette perpendicolari fra loro) e in generale da uno spazio a $n-1$ dimensioni a uno spazio a n dimensioni.

Ritornando alla matrice dei risultati dei soggetti nei tests, vi è la possibilità di sviluppare ulteriormente il modello geometrico, a patto di far riferimento ad uno spazio pluridimensionale (o iperspazio) con un numero di dimensioni pari al numero delle righe della matrice, cioè dei tests della batteria.

Vien fatto di chiedersi allora quale vantaggio possa portare un

modello geometrico irrepresentabile.

Per rispondere a questa obiezione ci conviene ritornare allo spazio tridimensionale.

Poiche' la realta' in cui si vive e si agisce e' tridimensionale, il solo modo in cui sia possibile rappresentarla adeguatamente, e' di ricorrere a modelli tridimensionali o plastici. Tuttavia l'uso di plastici e' limitatissimo, ed e' invece molto piu' diffuso, perche' molto piu' comodo, il disegno, cioe' la rappresentazione in uno spazio a due dimensioni.

Come e' possibile cio'? Evidentemente con due mezzi: la rappresentazione prospettica e la rappresentazione in pianta. La prima ha il vantaggio dell'immediatezza percettiva, ma e' poco pratica, mentre quella che trova le massime applicazioni in campo scientifico e tecnico e' la rappresentazione in pianta. Una pianta non e' che una sezione piana, in cui sono rappresentate le sole dimensioni che interessano il piano della sezione. Di solito, naturalmente, non ci si accontenta di una sezione, ma se ne rappresentano parecchie, scegliendo piani secanti diversi.

Rappresentazione prospettica e rappresentazione in pianta si possono usare anche per i modelli geometrici relativi ai risultati di un campione di soggetti in una batteria di tests, ma mentre la rappresentazione prospettica si usa solo raramente, con carattere ausiliario, la rappresentazione in sezione e' di uso normale. Come piano di sezione si assume il piano determinato da due dei tre assi, mentre il terzo asse e' rappresentato soltanto dal punto di incrocio degli altri due.

Nel caso di modelli relativi ai risultati di un campione di soggetti in tre tests, i punti che rappresentano i soggetti si trovano solo eccezionalmente nel piano individuato da due assi; cio' avviene evidentemente soltanto nel caso in cui un soggetto ha risultato 0 (cioe' trattandosi di unita' standard, risultato medio) nel test corrispondente all'asse che non fa parte del piano considerato. Tuttavia si rappresentano nel piano le proiezioni dei punti che sono fuori del piano, le quali corrispondono alle posizioni che tali punti avrebbero nel diagramma tridimensionale se i soggetti avessero risultati 0 nel test corrispondente all'asse che non fa parte del piano considerato. In altre parole la posizione della proiezione del singolo punto-soggetto e' determinata soltanto dai risultati del soggetto nei due tests i cui assi sono rappresentati nel diagramma.

Consideriamo i risultati dei soggetti 1, 2, 5, 6 nei tests 1, 2, 3 (matrice Z).

	1	2	...	5	6
1	+1.00	- .50		+2.00	-3.00
2	+1.29	0.00		+3.00	-1.00
3	- .67	- 1.00		+1.00	0.00

Tabella 22.

3 Tests

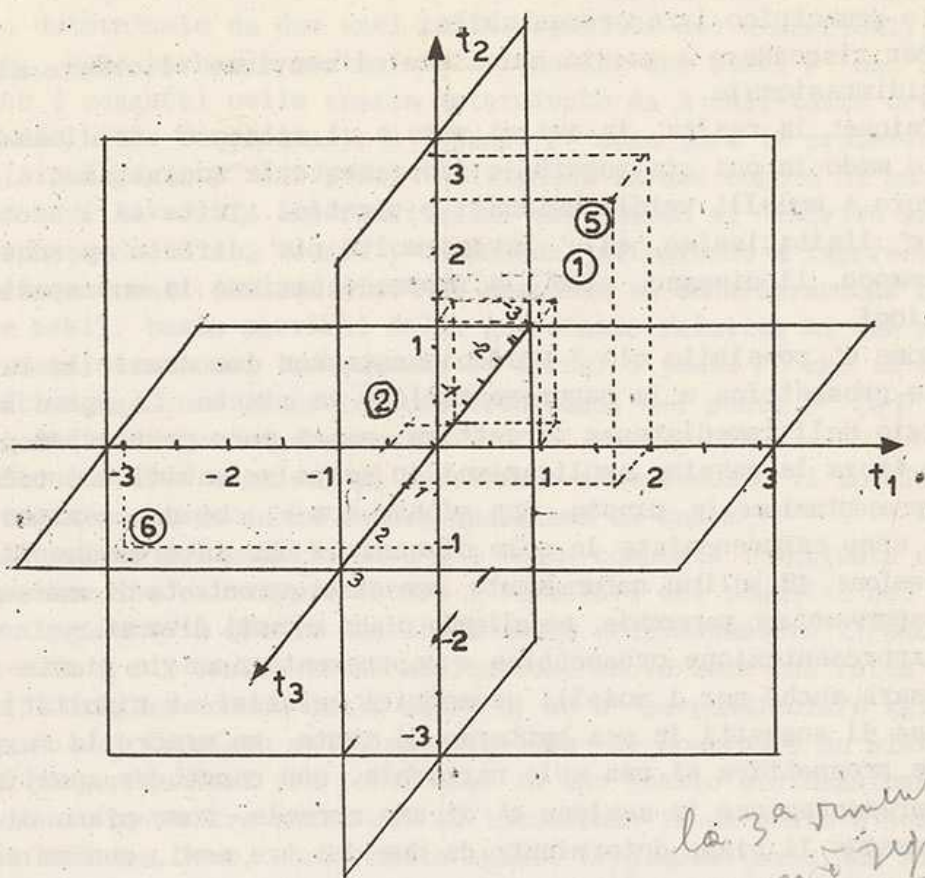


Figura 9.

*la 3^a dimensione
non è riprota
esattamente*

In fig. 9 sono rappresentati in prospettiva i punti 1, 2, 5, 6, ognuno individuato dai risultati nei 3 tests; ed inoltre i 3 piani comprendenti ciascuno 2 assi con le rispettive rappresentazioni in pianta. Nelle successive figg. 10, 11 e 12 sono rappresentati gli stessi dati sui tre piani individuati rispettivamente dagli assi $t_1 t_2$, $t_2 t_3$, $t_1 t_3$ (1).

Ma la stessa possibilita' di rappresentare cioè *esattamente* su un piano la situazione relativa a due variabili per volta (cioè, nel nostro caso, relativa a due tests per volta), sussiste anche quando si

(1) Per avere un'esperienza diretta della relazione fra rappresentazione bidimensionale, rispetto a due soli assi e rappresentazione tridimensionale, conviene passare dalla rappresentazione bidimensionale alla rappresentazione tridimensionale, reintroducendo la terza dimensione che si era soppressa. Bastera' a tale scopo usare un piano di materia plastica (meglio se trasparente), riportare su di esso il disegno della sezione comprendente i due assi ortogonali e le proiezioni dei punti-soggetti; forare il piano in corrispondenza ai punti e adattarvi delle asticcioline perpendicolari al piano, e di lunghezza corrispondente al risultato nel 3° test. Naturalmente quando si tratta di risultati negativi (cioè inferiori alla media) le asticcioline devono sporgere al di sotto del piano.

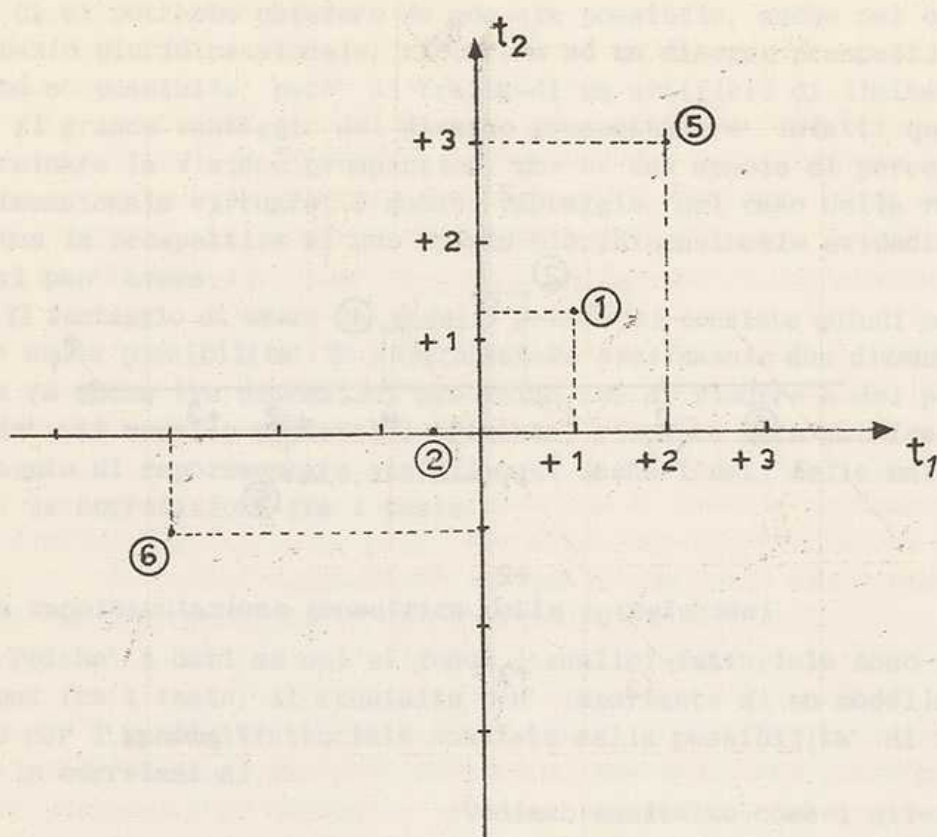


Figura 10.

passa dal modello tridimensionale al modello pluridimensionale. In questo caso, nel piano determinato da una coppia di assi vengono localizzate le proiezioni dei punti-soggetti, che appartengono ad uno spazio pluridimensionale. Ma anche in questo caso le proiezioni corrispondono alle posizioni che i punti avrebbero se tutte le altre dimensioni, escluse le due considerate, fossero zero; cioè per trovare tali proiezioni basta prendere in considerazione le due dimensioni da rappresentare nel diagramma (cioè i risultati dei soggetti nei due tests i cui assi sono rappresentati nel diagramma). Unica complicazione, il maggior numero di diagrammi necessari per rappresentare la situazione relativa a tutte le coppie possibili di assi. Infatti mentre per un modello tridimensionale, essendo tre gli assi, occorreranno tre diagrammi (un diagramma con gli assi t_1 e t_2 , un altro con gli assi t_1 e t_3 e un terzo con gli assi t_2 e t_3), per un modello quadridimensionale occorreranno 6 diagrammi (t_1-t_2 ; t_1-t_3 ; t_1-t_4 ; t_2-t_3 ; t_2-t_4 ; t_3-t_4), per un modello a 5 dimensioni, 10 diagrammi, ecc.

Si tratta soltanto di esaminare il modello da tutti i "punti di vista".

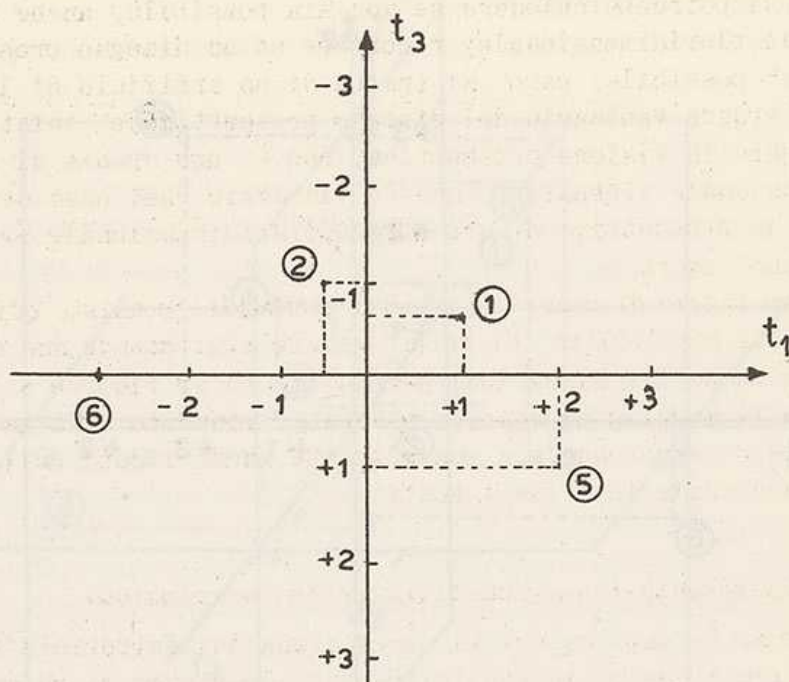


Figura 11.

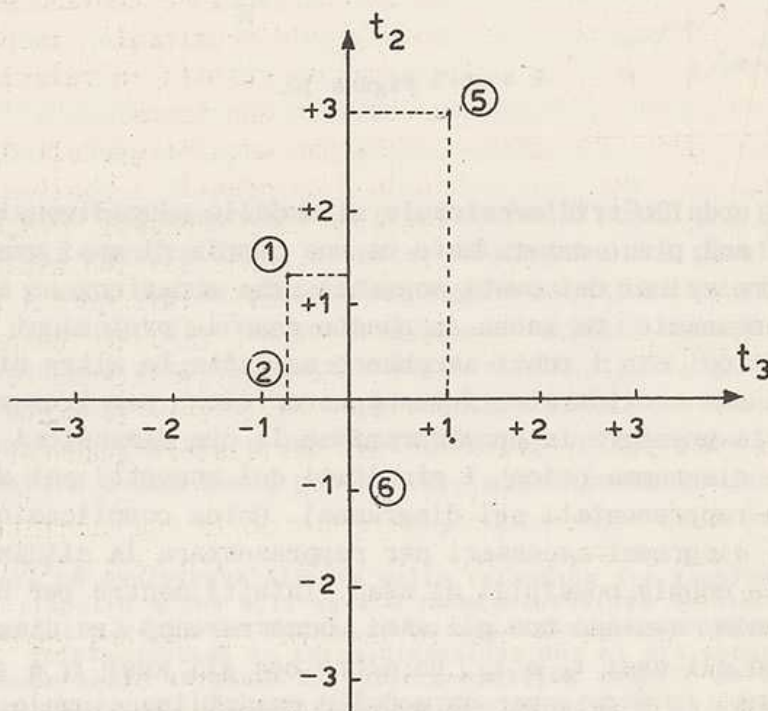


Figura 12.

Ci si potrebbe chiedere se non sia possibile, anche nel caso di uno spazio pluridimensionale, ricorrere ad un disegno prospettico. Anche questo e' possibile; pero' si tratta di un artificio di limitata utilita'. Il grande vantaggio del disegno prospettico e' infatti quello di determinare la visione prospettica, che e' una specie di percezione tridimensionale virtuale; e questo vantaggio, nel caso della rappresentazione in prospettiva di uno spazio pluridimensionale evidentemente non si puo' avere.

Il vantaggio di usare dei modelli geometrici consiste quindi essenzialmente nella possibilita' di rappresentare *esattamente* due dimensioni per volta (o anche tre dimensioni per volta, se si ricorre a dei plastici). In piu', il modello geometrico presenta, rispetto alla matrice Z , il vantaggio di rappresentare visibilmente anche i dati della matrice R , cioe' le correlazioni fra i tests.

2. La rappresentazione geometrica delle correlazioni

Poiche' i dati su cui si fonda l'analisi fattoriale sono le correlazioni fra i tests, il requisito piu' importante di un modello geometrico per l'analisi fattoriale consiste nella possibilita' di rappresentare le correlazioni.

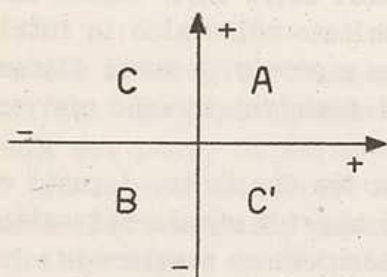


Figura 13.

Vediamo anzitutto come i diversi gradi di correlazione trovano espressione nel modello bidimensionale, in cui si rappresentano i soggetti in relazione ai loro risultati in due tests.

I due assi ortogonali dividono il piano in 4 quadranti, i quali sono limitati ciascuno da 2 semiassi. Chiameremo A il quadrante limitato dai due semiassi positivi, B il quadrante limitato dai due semiassi negativi e C e C' i due quadranti limitati da un semiasse positivo e da un semiasse negativo (fig. 13). Il punto che rappresen-

ta un soggetto puo' trovarsi in uno dei quattro quadranti o su uno degli assi.

Si trovera' su uno degli assi quando la sua coordinata rispetto all'altro asse e' zero (cioe' se il risultato nell'altro test e' uguale al risultato medio del campione).

In tutti gli altri casi si trovera' in uno dei quattro quadranti, e precisamente: nel quadrante A se i risultati di tutti e due i tests sono positivi (cioe' sono superiori alle rispettive medie aritmetiche); nel quadrante B se i risultati in tutti e due i tests sono negativi (cioe' sono inferiori alle rispettive medie aritmetiche); in uno dei due quadranti C o C' , se il risultato e' positivo in uno dei due tests e

negativo nell'altro (cioè se il risultato in uno dei due tests è superiore alla media aritmetica dei risultati, mentre nell'altro test è inferiore alla media aritmetica dei risultati).

Così ad esempio in fig. 12 il soggetto 1 che nel test 2 ha ottenuto il risultato $z_{21} = +1.29$ mentre nel test 3 ha il risultato $z_{31} = -.67$ è rappresentato da un punto che si trova nel quadrante C; il soggetto 2 che nel test 2 ha ottenuto il risultato $z_{22} = 0.00$ e nel test 3 il risultato $z_{32} = -1.00$ è rappresentato da un punto che si trova sull'asse t_3 (sul semiasse negativo); il soggetto 5, che ha conseguito nel test 2 il risultato $z_{25} = +3$ e nel test 3 il risultato $z_{35} = +1$ è rappresentato da un punto che si trova nel quadrante A.

Consideriamo ora la relazione tra correlazione e distribuzione dei punti nei quattro quadranti.

Quando fra due tests vi è una correlazione positiva, i risultati di un soggetto nei due tests (espressi in unità standard) sono più spesso simili che diversi e tanto più spesso simili e tanto più simili quanto maggiore è la correlazione. Di conseguenza saranno più frequenti i soggetti che hanno tutti e due i risultati superiori alla media e tutti e due i risultati inferiori alla media, che i soggetti che hanno il risultato in un test superiore alla media e il risultato nell'altro test inferiore alla media. Cioè saranno più numerosi i punti nei quadranti A e B che non i punti nei quadranti C, C'. Inoltre sarà estremamente raro il caso di un soggetto che abbia un risultato molto alto in un test e un risultato molto basso nell'altro test, mentre sarà meno raro il caso di un soggetto che abbia un risultato molto alto in tutti e due i tests o molto basso in tutti e due i tests; e perciò i punti distanti dall'origine dei due assi (cioè dal loro punto di incontro) saranno più rari nei settori C e C' che nei settori A e B.

Dunque quando c'è una correlazione positiva fra due tests, i punti che rappresentano i soggetti saranno non soltanto in maggior numero nei settori AB che nei settori CC', ma nei settori AB si estenderanno maggiormente raggiungendo distanze maggiori dall'origine di quanto avvenga nei settori CC'. Perciò la "nuvola" di punti assumerà una forma ellittica, con l'asse maggiore dell'ellisse in corrispondenza della bisettrice dei settori A e B (fig. 14).

È chiaro che, poiché tali caratteristiche si accentuano tanto più quanto più è elevata la correlazione, col crescere della correlazione l'ellisse diventerà sempre più allungata.

Quando invece si ha una correlazione inversa, è più frequente che ad un risultato basso in un test se ne associi uno alto nell'altro, che non che i risultati siano tutti e due alti o tutti e due bassi. Perciò i punti si localizzano più frequentemente nei settori C e C' che nei settori A e B, e sono più frequenti i casi in cui ad un risultato molto alto in un test se ne associa uno molto basso nell'altro, che non i casi in cui ad un risultato molto alto in un test se ne associa uno molto alto nell'altro, oppure i casi in cui ad un risultato molto basso in un test se ne associa uno molto basso nell'altro. Di conseguenza la nuvola

dei punti avra' la forma di un'ellisse orientata lungo la bisettrice dei settori C e C' .

Infine, quando c'e' assenza di correlazione, vi e' uguale probabilita' che un risultato alto in un test si associ con un risultato al-

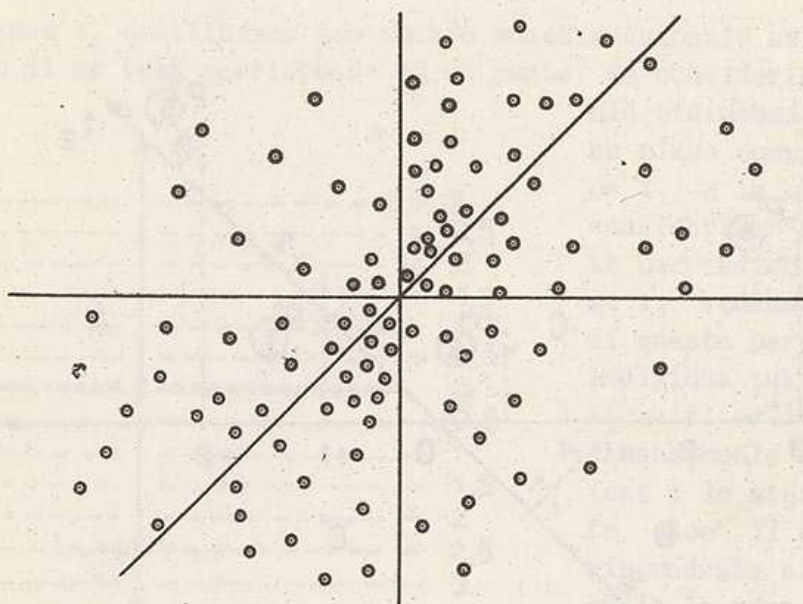


Figura 14.

to o con un risultato basso nell'altro test. Percio' vi e' uguale probabilita' che i punti vadano a cadere nei quattro settori, e quindi la nuvola dei punti ha forma circolare.

La rappresentazione dei punti corrispondenti ai soggetti in un diagramma bidimensionale consente dunque di riconoscere se c'e' correlazione fra i tests e se e' positiva o negativa, elevata o bassa. Tuttavia tale rappresentazione non permette di leggere dal diagramma il coefficiente di correlazione fra i tests ed e' quindi inadeguata alle esigenze dell'analisi fattoriale.

Percio', per ottenere un modello nel quale siano rappresentabili non soltanto i soggetti ed i tests ma anche i coefficienti di correlazione fra i tests, si e' introdotta un'innovazione: anziche' mantenere gli assi dei tests perpendicolari fra loro si e' convenuto di far variare l'angolo tra gli assi in funzione della correlazione fra i tests.

3 L'obliquita' degli assi-tests

Vediamo anzitutto come si comporta il nostro modello bidimensionale in seguito a questa modificazione.

Ammettiamo che in seguito alla relazione (che dobbiamo ancora precisare) tra coefficienti di correlazione ed angoli fra gli assi, ad un

determinato coefficiente di correlazione $r_{t_1 t_2}$ fra due tests corrispon-
da un angolo di 45° fra i versi positivi degli assi (fig. 15).

Rappresentati gli assi t_1 e t_2 col loro angolo di inclinazione, pro-
cediamo come al solito per localizzare i punti-soggetti determinati dai
loro risultati nei due tests.

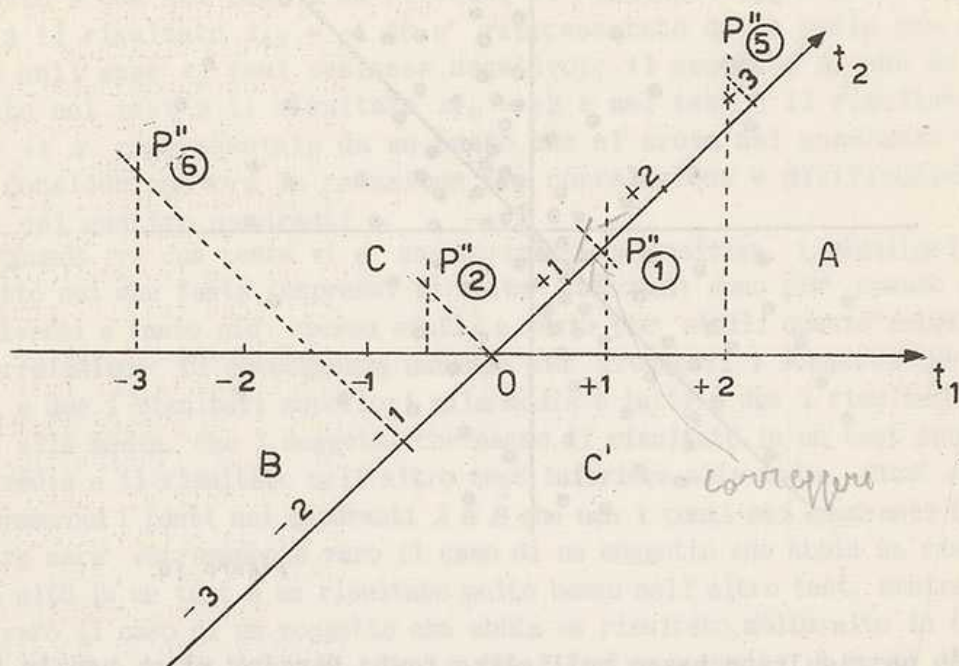


Figura 15.

Consideriamo i risultati dei soggetti 1, 2, 5, 6 rappresentati nel
diagramma di fig. 10.

Dal confronto, i due diagrammi risultano diversissimi. Nel model-
lo ad assi ortogonali (fig. 10) i soggetti 1 e 5 avendo risultati posi-
tivi in tutti e due i tests sono rappresentati da due punti del quadran-
te A; il soggetto 2, avendo ottenuto il risultato medio nel 2° test
($z_{22} = 0$) e' rappresentato da un punto localizzato sull'asse t_1 ; e il
soggetto 6, avendo ottenuto risultati inferiori alla media, e quindi ne-
gativi in tutti e due i tests e' rappresentato da un punto del quadrante
B. Nel modello ad assi obliqui invece il soggetto 5, pur avendo risul-
tati superiori alla media in tutti e due i tests e' rappresentato da un punto
della zona C, e altrettanto avviene per il soggetto 6, che invece ha conse-
guito in tutti e due i tests risultati inferiori alla media; e il sog-
getto 2, pur avendo ottenuto un risultato medio in un test, non e' rap-

presentato da un punto localizzato sull'asse dell'altro test.

Le quattro zone delimitate dalle coppie di semiassi *non* conservano dunque le caratteristiche che avevano quando gli assi erano ortogonali.

Le ragioni di questo fenomeno risultano dalle seguenti considerazioni.

Un asse t_1 costituisce uno spazio monodimensionale nel quale ogni risultato di un test corrisponde ad un punto. Se consideriamo uno spazio bidimensionale, ossia

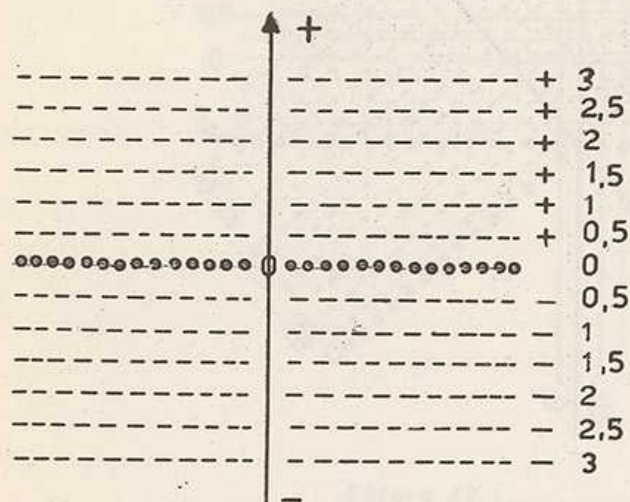


Figura 16.

un piano comprendente l'asse t_1 , e in questo piano consideriamo tutte le rette perpendicolari all'asse t_1 , vediamo che ognuna di queste perpendicolari individua tutti i punti-soggetti dello spazio bidimensionale che hanno nel test 1 lo stesso risultato, cioè' il risultato corrispondente al punto nel quale la perpendicolare incontra l'asse (fig. 16).

Particolarmente importante è una di queste perpendicolari: quella che

incontra l'asse all'origine 0, e comprende tutti i punti-soggetti dello spazio bidimensionale che hanno risultato 0 (cioè' risultato medio) nel test 1.

Se invece di uno spazio bidimensionale, consideriamo uno spazio tridimensionale, dovremo prendere in considerazione, in questo spazio, tutti i piani perpendicolari all'asse t_1 , ognuno dei quali individua tutti i punti dello spazio tridimensionale, i quali rappresentano i soggetti che hanno lo stesso risultato nel test 1, cioè' il risultato corrispondente al punto nel quale il piano perpendicolare taglia l'asse. Ed in questo caso merita particolare considerazione il piano che taglia l'asse all'origine.

Ritornando allo spazio bidimensionale, va notato che la perpendicolare all'origine dell'asse divide i punti-soggetti dello spazio bidimensionale che hanno un risultato positivo (cioè' superiore alla media) nel test 1 dai punti-soggetti che hanno un risultato negativo (cioè' inferiori alla media).

Consideriamo ora anche il secondo dei due assi-tests che determinano lo spazio a due dimensioni, escludendo tuttavia la condizione restrittiva che fissava l'ortogonalità degli assi, lasciando cioè' inde-

figure!
o tutte a tratto
o tutte linee

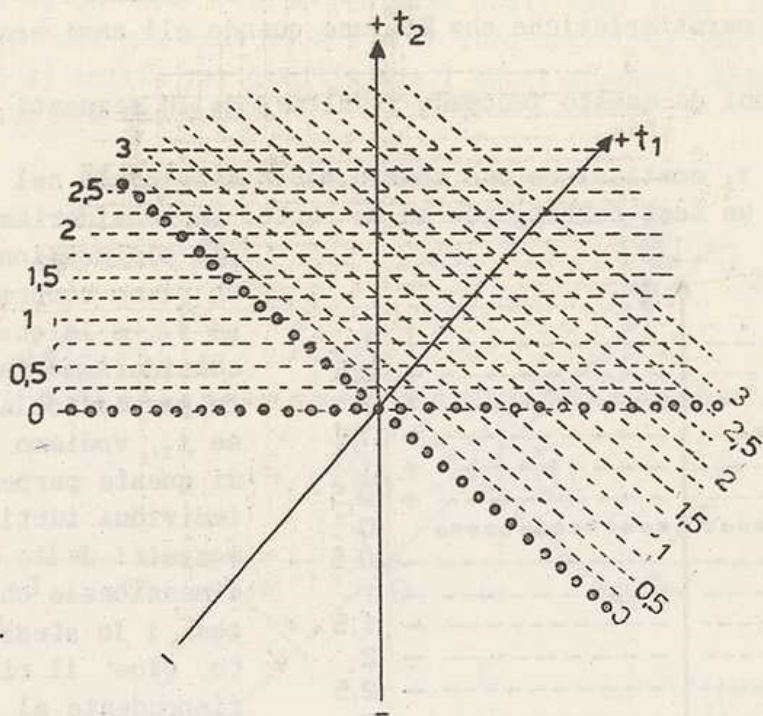


Figura 17 a.

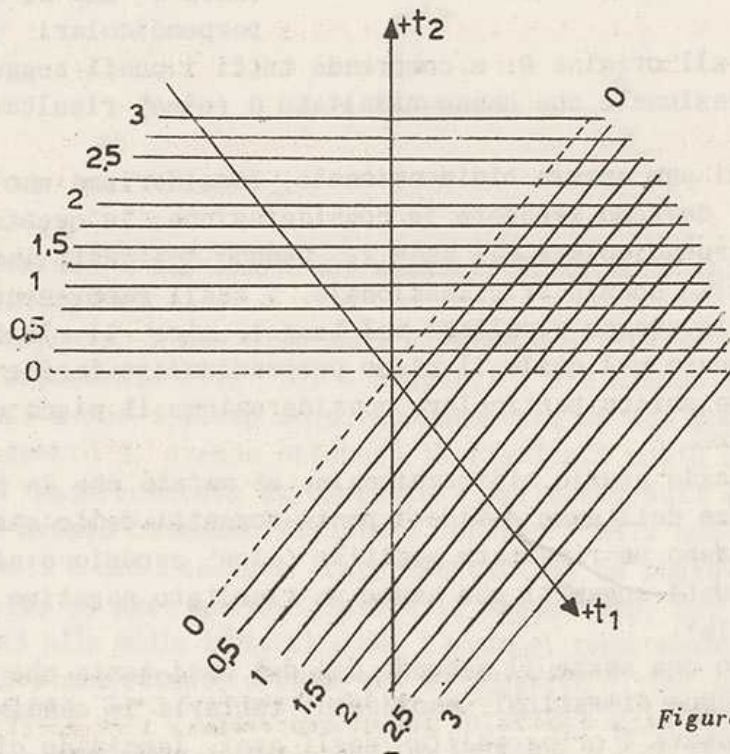


Figura 17.b.

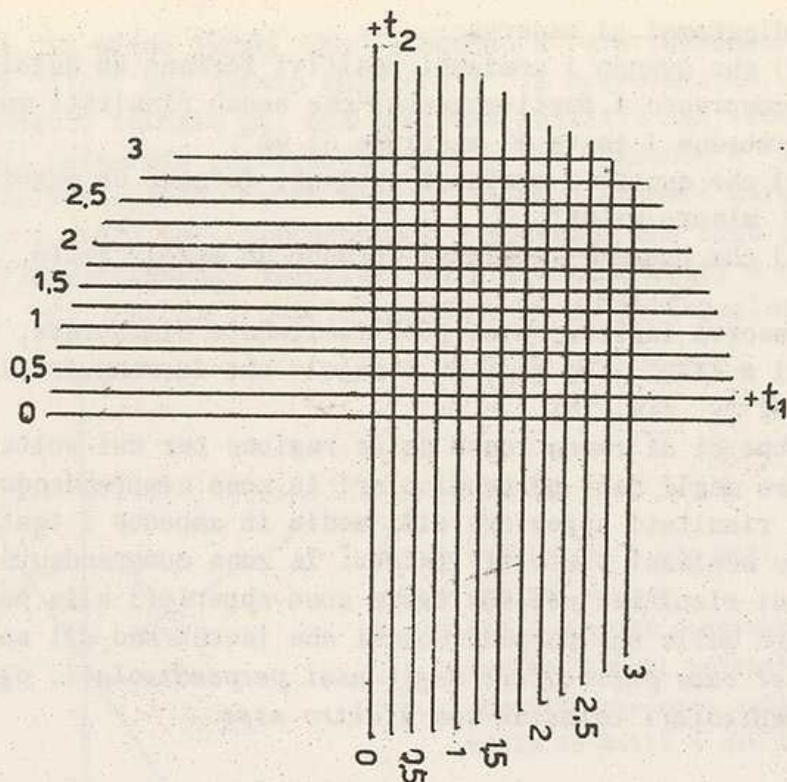


Figura 17 c.

terminato l'angolo fra gli assi.

Esamineremo tre casi particolari e cioè:

- a) il caso in cui i versi positivi degli assi formano un angolo acuto;
- b) il caso in cui tale angolo è ottuso;
- c) il caso in cui l'angolo è retto (figg. 17 a, b, c).

Per rendere più facile la spiegazione rappresentiamo nei diagrammi soltanto le rette isometriche di proiezione (1) corrispondenti ai risultati positivi (superiori alla media). La retta corrispondente al risultato zero (risultato medio) è tratteggiata. Poiché in tal modo le rette parallele perpendicolari ad un asse stanno a simboleggiare l'insieme dei punti-soggetti che hanno risultati positivi (superiori alla media rispetto a quell'asse) è evidente che *i punti che appartengono contemporaneamente alle rette perpendicolari all'uno e all'altro asse corrispondono a soggetti che hanno risultati superiori alla media (positivi) in tutti e due i tests.*

(1) Chiamiamo rette isometriche di proiezione le rette perpendicolari ad un asse-test, poiché ognuna di queste rette comprende i punti che hanno uguale proiezione nel rispettivo asse, e quindi rappresenta i soggetti che hanno ottenuto un risultato uguale nel test rappresentato da quell'asse.

Dai diagrammi si osserva:

a) che quando i semiassi positivi formano un angolo acuto, la zona che comprende i punti-soggetti che hanno risultati superiori alla media in ambedue i tests e' maggiore di 90° ;

b) che quando i semiassi omologhi formano un angolo ottuso, tale zona e' minore di 90° ;

c) che quando i semiassi formano un angolo retto, tale zona e' di 90° .

Si osserva inoltre, e si puo' facilmente dimostrare, che tale zona e' pari a $(180^\circ - \theta)$ se θ e' l'angolo che formano fra loro i semiassi omologhi (v. fig. 18).

Inoltre ci si rende conto della ragione per cui soltanto nel caso particolare degli assi perpendicolari la zona comprendendo i punti-soggetti con risultati superiori alla media in ambedue i tests e' limitata dai due semiassi positivi. Infatti la zona comprendente i punti-soggetti i cui risultati nei due tests sono superiori alla media e' limitata sempre dalle due perpendicolari che incontrano gli assi nell'origine (1); nel caso particolare degli assi perpendicolari, ognuna di queste perpendicolari coincide con l'altro asse.

4. La convenzione del coseno

Dopo aver preso conoscenza di alcune delle complicazioni che porta con se' l'abbandono della perpendicolarita' degli assi, possiamo introdurre concretamente la rappresentazione geometrica della correlazione. Si conviene di disporre gli assi-tests in modo che l'angolo intercettato fra i semiassi positivi sia tale che il suo coseno sia proporzionale al coefficiente di correlazione (2). Si tratta di una convenzione, cioe' di una decisione arbitraria; tuttavia la scelta di questa particolare funzione risulta particolarmente vantaggiosa.

(1) Piu' esattamente, dalle due semirette perpendicolari all'origine degli assi, che si trovano ognuna nella zona positiva rispetto all'altro asse.

(2) La relazione e'

$$r_{ij} = h_i h_j \cos \theta_{ij}$$

in cui

r_{ij} e' il coefficiente di correlazione fra i due tests i e j ,

$h_i h_j$ sono le lunghezze dei due vettori che nel modello geometrico rappresentano i due tests i e j ,

θ_{ij} e' l'angolo intercettato dai due vettori suddetti.

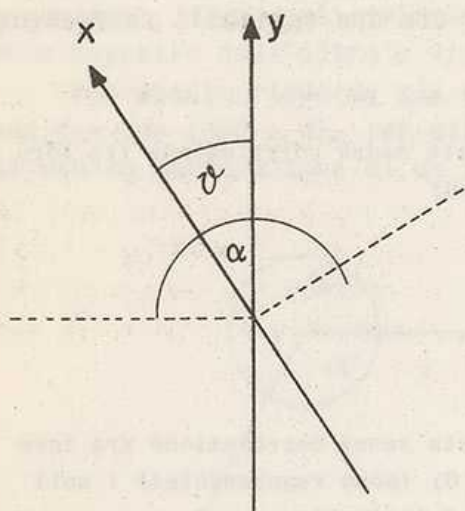
Ma la relazione suddetta si semplifica diventando

$$r_{ij} = \cos \theta_{ij}$$

quando il modello geometrico rappresenta lo spazio dei tests, cioe' uno spazio che ha tante dimensioni quanti sono i tests presi in considerazione; infatti, nello spazio dei tests, i vettori che rappresentano i tests sono unitari, e quindi, essendo $h_i = h_j = 1$, la formula si riduce a quella sopraindicata.

La formula completa dei vettori h_i e h_j sara' utilizzata in seguito, quando si passera' alla rappresentazione vettoriale dei tests nello spazio dei fattori comuni (v. Parte II).

Va notato, in primo luogo, che il coseno e' una funzione decrescente dell'angolo, cioe' che quanto maggiore e' la correlazione, tanto minore sara' l'angolo formato dai due semiassi positivi. Ma, come e' stato mostrato nel paragrafo precedente, quanto piu' piccolo e' l'angolo che formano due assi-tests, tanto maggiori sono i settori circolari entro cui cadono i punti che rappresentano i soggetti che sono superiori alla media o rispettivamente inferiori alla media in tutti e due i tests (v. fig. 18). Percio', quanto maggiore e' la correlazione fra due



θ = angolo fra i due assi x e y = 30°
 $r_{xy} = \cos 30^\circ = .866$
 $\alpha = 180 - \theta = 150 =$ settore entro cui cadono i punti corrispondenti ai soggetti che sono superiori alla media in tutti e due i tests.

Fig. 18.

tests, tanto maggiori sono i settori circolari suddetti (e tanto piu' piccoli sono i settori in cui cadono i punti che rappresentano i soggetti che sono superiori alla media in uno dei due tests e inferiori alla media nell'altro).

Quindi, quanto maggiore e' la correlazione (e quindi quanto maggiore e' la proporzione dei punti che corrispondono a risultati ambedue superiori o inferiori alla media) e tanto piu' grande e' la zona entro cui cadono questi punti. Accade percio' - e lo si puo' dimostrare, ma e' comprensibile per le ragioni suesposte - che nel modello ad assi obliqui non si determina quel cambiamento di forma della nuvola dei punti-soggetti da circolare ad ellittica che nella rappresentazione ad assi ortogonali va di pari passo colla grandezza della correlazione; *nella rappresentazione ad assi obliqui i punti si dispongono sempre, indipendentemente dalla direzione e dalla grandezza della correlazione, in forma circolare intorno all'origine del sistema di assi, con densita' degradante dal centro verso la periferia (fig. 18).*

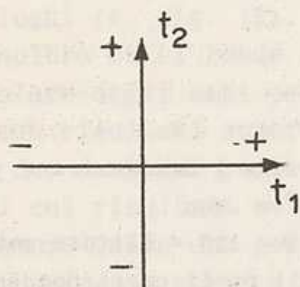
In secondo luogo il coseno e' una funzione che assume una gamma di valori che vanno da un minimo di -1 a un massimo di $+1$, come il coefficiente di correlazione.

In terzo luogo, ai coefficienti di correlazione $+1$, 0 , -1 che rap-

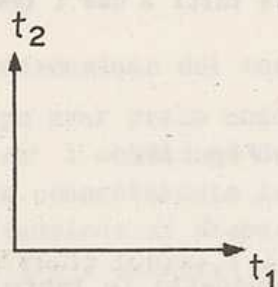
presentano dei punti di riferimento in base ai quali si valutano, in quanto vi si approssimano piu' o meno, i coefficienti di correlazione sperimentali, corrispondono, nella rappresentazione angolare dei coefficienti di correlazione, dei punti di riferimento altrettanto evidenti, in quanto

$$+1 = \cos 0^\circ \quad 0 = \cos 90^\circ \quad -1 = \cos 180^\circ$$

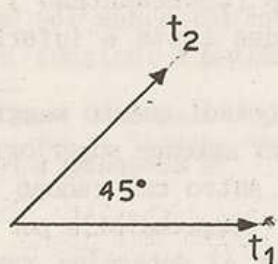
In altre parole, quando nella rappresentazione grafica vediamo un angolo di 90° fra due assi sappiamo che fra due variabili rappresenta-



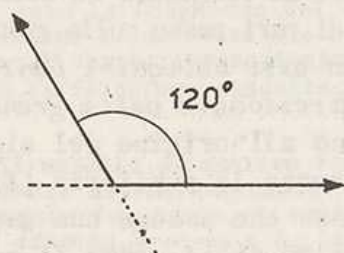
due tests senza correlazione fra loro
($r_{12} = 0$)



due tests senza correlazione fra loro
($r_{12} = 0$) (sono rappresentati i soli
semiassi positivi)



due tests in correlazione positiva
($r_{12} = .707$) (sono rappresentati i soli
semiassi positivi)



due tests in correlazione negativa
($r_{12} = -.50$) (i semiassi sono rappre-
sentati a tratti)

Fig. 19.

te dai due assi non c'è correlazione; quando due assi formano un angolo acuto (1), significa che tra quelle due variabili c'è una correla-

(1) Va tenuto presente che l'angolo si misura fra i due semiassi positi-

zione positiva, tanto piu' elevata, quanto piu' piccolo e' l'angolo; quando due assi formano un angolo ottuso, significa che tra le due variabili rappresentate dai due assi c' e' una correlazione negativa, tanto piu' elevata (cioe' tanto piu' vicina a -1) quanto piu' grande e' l'angolo (fig. 19). Infine, la correlazione perfetta positiva ($r = +1$), che in realta' non vi e' mai necessita' di rappresentare, sarebbe rappresentata da due assi che coincidono, mentre la correlazione negativa perfetta sarebbe rappresentata da due assi pure coincidenti, ma di verso opposto, cioe' col semiasse positivo dell'uno coincidente col semiasse negativo dell'altro e viceversa (1).

Per quanto riguarda gli angoli convessi, e' bene ricordare che $\cos \alpha = \cos (360 - \alpha)$, per cui per es. un angolo di 210° rappresenta la stessa correlazione di un angolo di $360 - 210 = 150^\circ$; in altre paro-

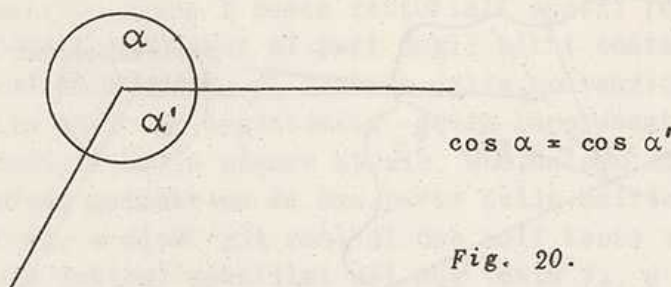


Fig. 20.

le, in luogo dell'angolo convesso, si considera l'angolo concavo racchiuso dagli stessi semiasse (fig. 20).

La tabella dei coseni, riportata in appendice, indica la corrispondenza fra angoli e coefficienti di correlazione. (2).

* * *

Prendendo in considerazione un terzo test, ci si trova a dover rappresentare 3 coefficienti di correlazione: r_{12} , r_{13} , r_{23} . Per rappresentare tre assi e' necessario, in genere, uscire dal piano, in quanto i tre assi stanno in un piano soltanto nel caso particolare in cui uno degli angoli e' uguale alla somma degli altri due (3).

vi. Del resto vedremo che per lo piu' si rappresenta soltanto il semiasse positivo di un test.

(1) Rappresentando soltanto i semiasse positivi non vi e' difficolta' a rappresentare la correlazione negativa perfetta fra due tests.

(2) Va tuttavia ricordato che la formula e quindi la rappresentazione grafica del coefficiente di correlazione tiene conto anche dei coefficienti (h_1 e h_2) che considereremo in seguito.

Come e' stato detto in precedenza, nel caso qui considerato tali coefficienti sono uguali a 1 e quindi vale la corrispondenza fra coseno e coefficiente di correlazione.

(3) Tale caso si verifica proprio nel modello di Spearman, in cui, come si vedra', l'asse del fattore G, l'asse del test T_2 e l'asse del fattore S_x stanno in uno stesso piano.

Va notato inoltre che la rappresentazione dei tre tests diventa impossibile se uno degli angoli e' maggiore della somma degli altri due.

Così 4 assi richiedono generalmente uno spazio a 4 dimensioni, e in generale m tests uno spazio ad m dimensioni, come nel caso della rappresentazione con assi ortogonali. Ma l'introduzione della convenzione del coseno, e l'obliquità tra gli assi che ne deriva di conseguenza (dato che le correlazioni fra i tests sono in genere non-nulle) porta ad una complicazione. Mentre con i modelli ad assi ortogonali, ricorrendo ad una rappresentazione in pianta, su uno dei piani individuati da una coppia di assi, gli altri assi non compaiono, poiché la loro proiezione sul suddetto piano si riduce ad un punto che coincide col punto di incrocio degli assi, con i modelli ad assi obliqui secondo la convenzione del coseno, il terzo asse (se si tratta di un modello tridimensionale) o gli altri assi (se si tratta di un modello pluridimen-

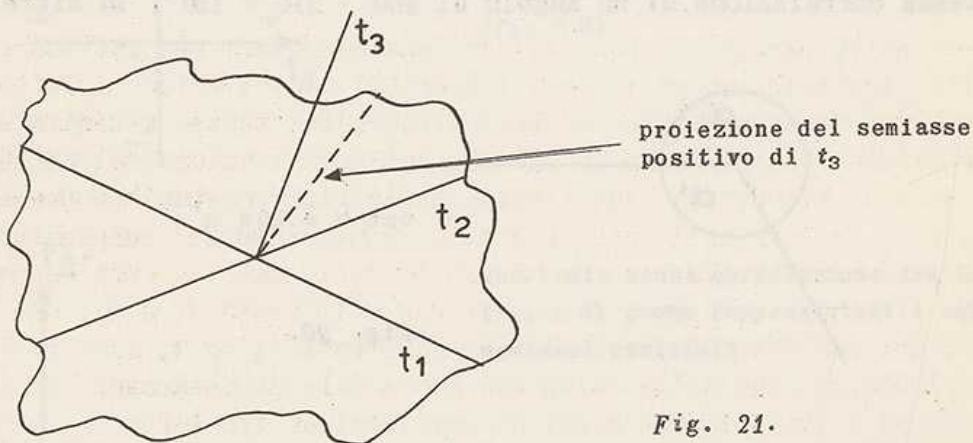


Fig. 21.

sionale) hanno come proiezioni sul piano individuato da due tests, delle rette (v. fig. 21).

È questa una caratteristica che rende utilissimi questi diagrammi in analisi fattoriale. I dati essenziali su cui si fonda l'analisi fattoriale sono le correlazioni fra i tests; interessa dunque rappresentare nei diagrammi i fattori, i tests e le loro relazioni, e solo eccezionalmente i soggetti. E siccome l'unico mezzo per rappresentare tali relazioni, che implicano uno spazio pluridimensionale, è la proiezione su un piano, è essenziale che in tale proiezione compaiano gli assi dei diversi tests.

5 Rappresentazione geometrica della soluzione fattoriale di Spearman

Il modello geometrico che abbiamo definito nei precedenti paragrafi ci permette di rappresentare tests, correlazioni fra tests, e soggetti ai quali i tests sono stati applicati. Ma lo scopo del modello era di rappresentare geometricamente le soluzioni fattoriali. Si tratta dunque ora di introdurre nel modello la rappresentazione dei fattori.

Mentre è chiaro che un fattore può essere rappresentato al pari

di un test mediante un asse, i cui punti corrispondono alle misure dei diversi soggetti nel fattore, non appare immediatamente evidente se sia lecito introdurre nel modello gli assi fattoriali.

Tuttavia questa difficoltà può essere agevolmente superata mediante un artificio. Nulla ci vieta di ammettere che si possano costruire dei tests che misurino esattamente i singoli fattori (1).

Di ognuno di questi ipotetici tests fattoriali "perfetti" noi conosciamo le correlazioni con gli altri tests; siamo cioè in grado di costruire una matrice delle correlazioni che comprende oltre ai tests della batteria, anche gli ipotetici tests fattoriali. Infatti conosciamo le intercorrelazioni fra i fattori che sono nulle, e le correlazioni fra i fattori e i tests, che sono i coefficienti di saturazione (v. Tab. 22).

In altre parole, disponiamo dei dati necessari per introdurre nel modello geometrico anche i tests fattoriali esatti (cioè i fattori) che si rappresentano quindi al pari degli altri tests, mediante assi la cui posizione nello spazio è fissata dalla convenzione del coseno.

Stabilita così la legittimità della rappresentazione geometrica di tests e fattori nello stesso spazio, cominciamo col considerare la rappresentazione geometrica di una parte della matrice comprendente tests e fattori, e cioè gli assi di due soli tests t_1 e t_2 , del fattore G e dei due fattori specifici dei due tests t_{s_1} e t_{s_2} .

Ricordiamo che nella soluzione fattoriale di Spearman:

- a) i fattori sono privi di correlazione fra loro;
- b) i tests sono correlati positivamente fra loro (2);
- c) ogni test è correlato positivamente con il fattore G e con il proprio fattore specifico, ed è privo di correlazione con i fattori specifici degli altri tests.

Consideriamo anzitutto uno dei due tests, per es. t_1 e le sue relazioni spaziali con il fattore generale G ed il fattore specifico S_{t_1} . Ricordiamo che l'analisi fattoriale ci fornisce i coefficienti di saturazione a_{t_1} e u_{t_1} i quali non sono altro che i coefficienti di correlazione di t_1 con G e con S_{t_1} , in quanto $a_{t_1} = r_{t_1 G}$ e $u_{t_1} = r_{t_1 S_{t_1}}$. Quindi, applicando la convenzione del coseno, leggiamo nelle tavole delle funzioni goniometriche l'angolo fra l'asse t_1 e l'asse G (il cui coseno corrisponde ad $r_{t_1 G}$) ed altrettanto facciamo per ottenere l'angolo tra t_1 ed S_{t_1} (3).

(1) Infatti sono stati costruiti, e sono di uso corrente, i tests fattoriali - di cui si parlerà in seguito - che rappresentano delle misure approssimate dei vari fattori messi in evidenza mediante l'analisi fattoriale.

(2) È una caratteristica della matrice gerarchica che, come si è dimostrato, è condizione necessaria per effettuare l'analisi di Spearman.

(3) Scriveremo d'ora in poi, per maggiore semplicità, S_1 ed S_2 al posto di S_{t_1} ed S_{t_2} .

	G	St ₁	St ₂	St ₃	St ₄	St ₅	1	2	3	4	5
G	-	.00	.00	.00	.00	.00	.79	.69	.51	.51	.41
St ₁	.00	-	.00	.00	.00	.00	.62	.00	.00	.00	.00
St ₂	.00	.00	-	.00	.00	.00	.00	.72	.00	.00	.00
St ₃	.00	.00	.00	-	.00	.00	.00	.00	.86	.00	.00
St ₄	.00	.00	.00	.00	-	.00	.00	.00	.00	.86	.00
St ₅	.00	.00	.00	.00	.00	-	.00	.00	.00	.00	.91
1	.79	.62	.00	.00	.00	.00	-	.54	.47	.54	.24
2	.69	.00	.72	.00	.00	.00	.54	-	.52	.27	.27
3	.51	.00	.00	.86	.00	.00	.47	.52	-	.14	.18
4	.51	.00	.00	.00	.86	.00	.50	.27	.14	-	.38
5	.41	.00	.00	.00	.00	.91	.24	.27	.18	.38	-

Tabella 23.

Matrice delle intercorrelazioni comprendente oltre ai tests originari 1, 2, 3, 4, 5 anche i tests fattoriali "perfetti" G, St₁, St₂, St₃, St₄, St₅ (i dati sono quelli delle Tab. 9 e 14).

La matrice si divide in 4 submatrici $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline C' & B \end{array}$. La submatrice A comprende le intercorrelazioni fra i tests fattoriali "perfetti", che sono tutte nulle perché i fattori sono privi di correlazione fra loro; la submatrice B comprende le intercorrelazioni fra i tests, cioè i dati di partenza dell'analisi, contenuti in Tab. 9.

Le submatrici C e C' sono l'una la trasposta dell'altra e comprendono le correlazioni fra tests e fattori (cioè i coefficienti di saturazione dei tests nei fattori), di cui sono non-nulle soltanto le correlazioni di ogni singolo test col fattore G e col proprio fattore specifico.

Esempio: dall'analisi compiuta nel capitolo II.5 risulta che il test 1 ha una saturazione nel fattore G di 0.79 ($a_1 = 0.79$). Applicando la formula $u_1 = \sqrt{1 - a_1^2}$ si ottiene $u_1 = 0.61$. Siccome $a_1 = r_{1G}$ e $u_1 = r_{1S_1}$ applichiamo la relazione $r_{ij} = \cos \alpha_{ij}$ per ottenere i due angoli che l'asse del test 1 forma con l'asse G e con l'asse S₁. Nella tavola delle funzioni goniometriche si legge che $0.79 = \cos 37^\circ 40'$ e $0.61 = \cos 52^\circ 20'$.

Dall'esempio risulta che i due angoli che l'asse del test forma con l'asse del proprio fattore specifico e con l'asse del fattore G sono complementari, cioè la loro somma è uguale a 90°. Non si tratta di una coincidenza. Infatti non essendovi correlazione fra i fattori (1)

(1) Ciò vale limitatamente alla soluzione fattoriale di Spearman.

$r_{GS_1} = \cos \alpha_{GS_1} = 0$ e siccome $\cos 0 = 90^\circ$ gli assi dei fattori sono fra loro ortogonali (fig. 22).

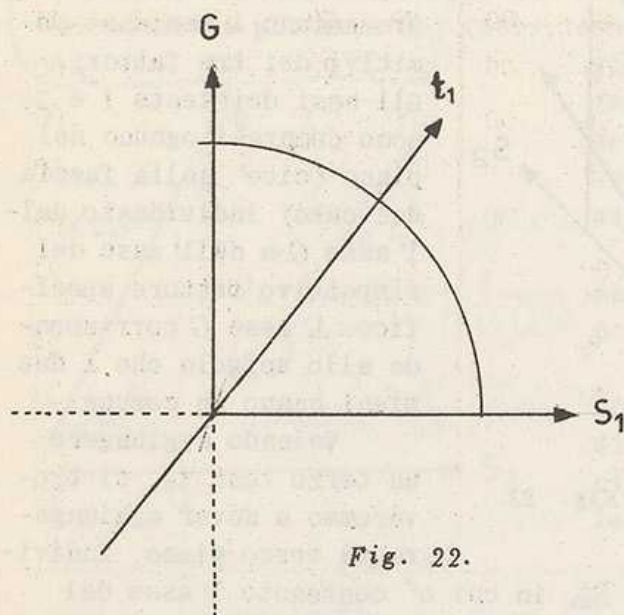


Fig. 22.

Con ciò non sarebbe tuttavia dimostrata (1) la complementarità dei due angoli α_{1S_1} e α_{1G} , perché l'asse del test 1 potrebbe trovarsi fuori dal piano individuato dalle due rette perpendicolari G ed S_1 . Tuttavia, ad eliminare quest'ipotesi basta considerare il fattore specifico di un altro test della batteria, per es. lo specifico del test 2, S_2 .

Data la mancanza di correlazione tra i fattori, l'asse S_2 deve essere ortogonale a G e ad S_1 ; ma non essendovi correlazione fra un test

e i fattori specifici degli altri tests, anche l'asse 1 dev'essere ortogonale ad S_2 e di conseguenza deve trovarsi nel piano individuato dagli assi G ed S_1 , che essendo perpendicolare ad S_2 contiene tutte le perpendicolari ad S_2 che passano per il suo piede, cioè per il punto 0 (2).

Passando ora a considerare l'asse di un altro test, per es. t_2 , vediamo, in base alle stesse considerazioni, che tale asse si trova nel piano individuato dagli assi G ed S_2 e che la sua posizione in tale piano è determinata dalle saturazioni del test 2 in G ed S_2 . Ma siccome i tre assi fattoriali G , S_1 ed S_2 sono perpendicolari fra loro, i due piani GS_1 e GS_2 sono pure perpendicolari fra loro. Dunque lo spazio in cui giacciono i 3 assi fattoriali G , S_1 ed S_2 ed i due assi dei tests t_1 e t_2 è tridimensionale e non a cinque dimensioni, come ci si sarebbe potuti aspettare.

Ciò posto, siamo in grado di rappresentare geometricamente i rapporti fra due tests della batteria sottoposta all'analisi fattoriale, il fattore G e gli specifici dei due tests (fig. 23).

I tre assi fattoriali G , S_1 ed S_2 sono ortogonali fra loro e si incontrano in un punto, come tre spigoli di un cubo. Il punto di incontro

(1) La verifica precedente si riferisce infatti ad un caso particolare.

(2) Si potrebbe obiettare che, trattandosi di uno spazio pluridimensionale, l'asse t_1 potrebbe essere perpendicolare ad S_2 e tuttavia non essere nel piano suddetto, ma l'obiezione cade quando si considera che l'asse t_1 è perpendicolare a tutti gli assi dei fattori specifici, e quindi lo stesso ragionamento vale per tutte le altre dimensioni dello spazio escluse le due dimensioni individuate dal piano GS_1 .

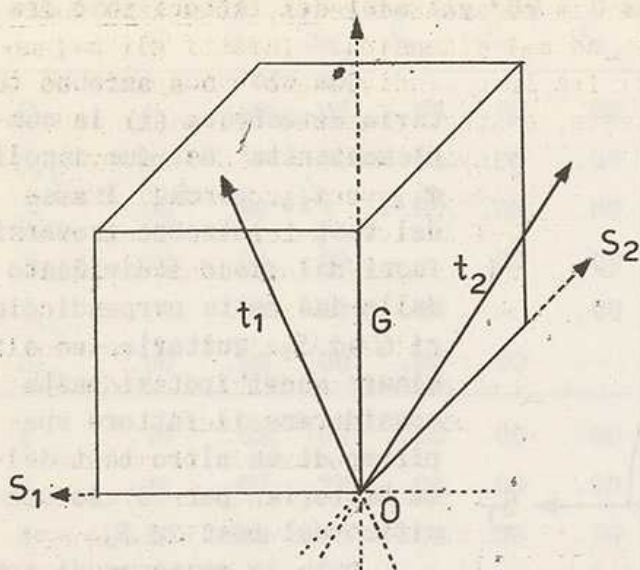


Fig. 23.

e' l'origine degli assi: i tre spigoli del cubo rappresentato in fig. 23 rappresentano i semiassi positivi dei tre fattori.

Gli assi dei tests 1 e 2 sono compresi ognuno nel piano (cioè nella faccia del cubo) individuato dall'asse G e dall'asse del rispettivo fattore specifico. L'asse G corrisponde allo spigolo che i due piani hanno in comune.

Volendo aggiungere un terzo test t_3 , ci troveremmo a dover aggiungere un terzo piano, indivi-

duato dagli assi ortogonali G ed S_3 , in cui è contenuto l'asse del test 3. Ma essendo S_3 privo di correlazione con G, S_1 ed S_2 , dev'essere perpendicolare agli assi G, S_1 ed S_2 , i quali sono perpendicolari fra loro; non solo, ma i piani GS_1 , GS_2 e GS_3 , dovrebbero essere perpendicolari fra loro, avendo in comune lo spigolo G.

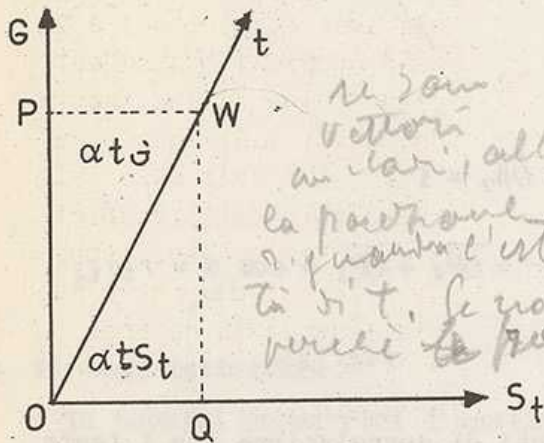
Ne' l'una ne' l'altra delle suddette condizioni si realizza in uno spazio tridimensionale: le relazioni che si determinano prendendo in considerazione tre tests sussistono soltanto in uno spazio a quattro dimensioni e non sono quindi rappresentabili. E tanto meno sono quindi rappresentabili le relazioni che si determinano prendendo in considerazione tutti gli m tests della batteria e gli $m+1$ fattori.

Tuttavia le rappresentazioni parziali di sottospazi a 2 e a 3 dimensioni ci hanno permesso di conoscere alcune delle relazioni che sussistono nello spazio fattoriale a $(m+1)$ dimensioni, in cui sono contenuti tanto gli assi dei fattori quanto quelli dei tests, e precisamente:

1. Ogni asse-test è compreso in un piano che comprende l'asse del fattore G e l'asse del fattore specifico del test, ortogonali fra loro.
2. Tutti questi piani hanno in comune una retta, cioè l'asse del fattore G (1).
3. I predetti m piani comprendono tutti gli assi dei tests e tutti gli assi fattoriali. Nessun asse si trova nello spazio fra piano e piano.
4. Le dimensioni spaziali del modello geometrico sono pari al numero dei fattori; cioè, siccome il numero dei fattori è di uno supe-

(1) Si potrebbero dunque in qualche modo rappresentare come le pagine di un libro.

riore al numero dei tests, se m e' il numero dei tests, lo spazio individuato dal modello geometrico e' ad $m+1$ dimensioni. Infatti gli $m+1$ assi fattoriali, essendo ortogonali fra loro, individuano uno spazio ad $m+1$ dimensioni; e gli assi dei tests, essendo ciascuno nel piano individuato dall'asse del proprio



individuo dall'asse del proprio fattore specifico e dall'asse del fattore generale, rientrano nello spazio individuato dagli assi fattoriali.

Altre relazioni si possono mettere in evidenza introducendo un'unita' di misura.

Riprendiamo in esame uno dei piani comprendente l'asse di un test t e quelli dello specifico S_t e del fattore generale G (fig. 24).

Fig. 24

Sia \overline{OW} l'unita' di misura,

\overline{OP} la sua proiezione sull'asse G . Ma $\frac{\overline{OP}}{\overline{OW}} = \cos \alpha_{tG}$, e siccome $\overline{OW} = 1$, $\overline{OP} = \cos \alpha_{tG}$, cioè e' il coseno dell'angolo formato dall'asse del test t con l'asse G , che e' il coefficiente di correlazione fra t e G , cioè r_{tG} . Ma r_{tG} non e' altro che il coefficiente di saturazione del test t nel fattore G , cioè a_t (cioe' $\overline{OP} = \cos \alpha_{tG} = r_{tG} = a_t$).

In altre parole, se nel modello geometrico conveniamo di rappresentare i tests, non piu' come assi, ma come segmenti aventi una grandezza oltre che una direzione e un verso (cioe' come vettori) e assumiamo tale grandezza come unita' di misura, le proiezioni ortogonali di questi vettori unitari sull'asse del fattore G sono i coefficienti di saturazione dei rispettivi tests nel fattore G .

Proiettando invece il vettore unitario \overline{OW} sull'asse S_t si ha che la proiezione

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OW}} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ} = \cos \alpha_{tS_t} = r_{tS_t} = u_t.$$

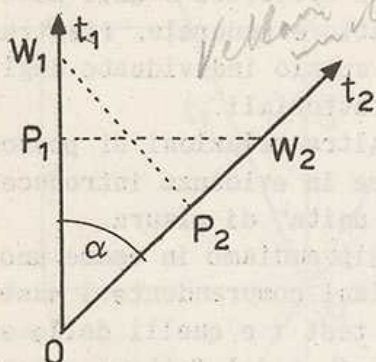
Dunque $\overline{OP} = a_t$; $\overline{OQ} = u_t$. E siccome OQW e' un triangolo rettangolo, $\overline{OW}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QW}^2$; ma $\overline{OW} = 1$, $\overline{OQ} = u_t$, $\overline{QW} = \overline{OP} = a_t$, e percio' nel modello geometrico si verifica l'equazione della varianza

$$a_t^2 + u_t^2 = 1, \text{ da cui } u_t = \sqrt{1 - a_t^2}.$$

Il vettore di un test ha proiezione non nulla soltanto sugli assi del fattore G e del proprio fattore specifico, mentre ha proiezione nulla sugli assi dei fattori specifici degli altri tests, essendo perpen-

Cioe' la proiezione del vettore unitario t sull'asse del suo fattore specifico e' il coeff. di saturazione a_t nel test nel fattore G .

dicolare ad essi. Si verifica cioè anche geometricamente che i tests sono saturati soltanto da G e dal proprio fattore specifico e non hanno nessuna saturazione nei fattori specifici degli altri tests. Ma oltre che su G e su S_t , il vettore unitario di un test si proietta anche sui vettori unitari degli altri tests della batteria (1).



$$\overline{OW_1} = \overline{OW_2} = 1$$

$$\frac{\overline{OP_2}}{\overline{OW_1}} = \overline{OP_2} = \overline{OP_1} = \cos \alpha = r_{t_1 t_2}$$

Fig. 25.

Tali proiezioni sono i coefficienti di correlazione fra i tests (fig. 25).

Mentre sull'asse di ogni fattore specifico si proietta soltanto il vettore di un test, sull'asse del fattore G si proiettano tutti i tests della batteria. Su quest'asse (che rappresenta lo spazio del fattore generale, spazio che è unidimensionale) si possono rappresentare le proiezioni di tutti i tests della batteria, cioè le saturazioni in G di tutti i tests, o in altre parole, i risultati dell'analisi fattoriale.

*6. Stima delle misure fattoriali dei soggetti
(comuni)*

(1) Essendo in correlazione positiva fra loro, i tests di una batteria gerarchica sono rappresentati da m vettori unitari separati da angoli acuti, in uno spazio ad m dimensioni.

1. Il test fattoriale

In termini geometrici l'analisi fattoriale di Spearman consiste a) nel sostituire un nuovo sistema di assi, ortogonali, al sistema di assi obliqui dei tests e b) nel determinare la posizione dei punti-soggetti nel sistema di assi ortogonali dei fattori. Nel precedente capitolo e' stato sviluppato il punto a); resta da svolgere il punto b), ossia esprimere i risultati dei soggetti in fattori anziche' in tests.

Ma, posto in questi termini, il compito e' irrealizzabile. Abbiamo gia' accennato all'impossibilita' di *misurare* i fattori dei soggetti. Nell'equazione di specificazione fattoriale

$$z_t = a_t G + u_t S_t$$

determinato il valore dei coefficienti a_t e u_t (che dipendono dai tests) in base alle correlazioni fra i tests, restano le due variabili G ed S_t che sono appunto le misure dei due fattori dei singoli soggetti e variano percio' da soggetto a soggetto. L'equazione ha dunque due incognite. Ma per quanto si aumenti il numero delle equazioni, prendendo in considerazione piu' tests, il numero delle incognite e' sempre di uno superiore al numero dei tests, e quindi non vi e' possibilita' di una soluzione determinata.

Non essendovi la possibilita' di passare dalle misure dei soggetti nei tests alle misure dei soggetti nei fattori, non resta che ricorrere a valutazioni approssimative e probabilistiche. La piu' semplice tra queste e' il cosiddetto *test fattoriale*, cioe' l'uso di un test molto saturo di un fattore, come misura approssimativa di quel fattore nei singoli soggetti.

Secondo la teoria fattoriale di Spearman, il solo fattore che interessa misurare nei soggetti e' il fattore G . Utilizzando un test che all'analisi fattoriale risulti molto saturo di G si possono considerare i risultati dei soggetti nel test (espressi eventualmente in unita'

standard) come misure approssimative del fattore G dei soggetti stessi (1).

Si tratta soltanto di un' approssimazione, ed anche di una valutazione probabilistica. Infatti il risultato di un soggetto in un test dipende non solo dal fattore G, ma anche dal fattore specifico del test, e, come si è detto, due soggetti possono avere lo stesso risultato nel test, pur essendo diversi fattorialmente, in quanto un alto livello di S_t può compensare un basso livello di G; quindi due o più soggetti che hanno un risultato uguale nel test fattoriale possono cioè nonostante differire nel fattore G. Ma quando in un test la saturazione in G è maggiore della saturazione in S_t è più probabile che il risultato sia dovuto prevalentemente al fattore G.

L'uso dei tests fattoriali trova applicazioni sempre più frequenti. Tuttavia il valutare il fattore G servendosi di un solo test, per quanto saturo di G, può apparire ingiustificato. Infatti ogni test, in quanto secondo la teoria dei due fattori presenta sempre una maggiore o minore saturazione in G, può essere considerato come una misura approssimata di G. Ogni test fornisce quindi un' informazione più o meno attendibile sul fattore G di un soggetto, e non è perciò giustificato rinunciare a delle fonti di informazione che possono contribuire tutte, in maggior o minor misura, a diminuire l'incertezza di una stima approssimativa.

2. Correlazione e previsione

Il modo più semplice e più grossolano di utilizzare l'informazione fornita da una batteria di tests nei riguardi della G dei soggetti esaminati, consiste nel calcolare la media aritmetica dei risultati conseguiti da ogni singolo soggetto nei tests della batteria o semplicemente nel sommare tali risultati (2). Siccome la misura della G di uno stesso soggetto è sempre la stessa, mentre le misure dei diversi S dello stesso soggetto sono con ogni probabilità diverse [in quanto il fattore specifico di un test non ha nulla in comune con il fattore specifico di un altro test e perciò non vi è ragione che un soggetto, che per es. eccelle in un'attitudine specifica eccella anche in un'attitudine specifica del tutto diversa (3)], som-

(1) Come è noto, il test delle matrici di Raven, che risulta avere un'elevata saturazione in G, è usato come misura approssimativa di G.

(2) Se si tratta soltanto di confrontare fra loro i soggetti del campione, la semplice somma può essere usata al posto della media aritmetica. Infatti, dall'equazione della media aritmetica $\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$ si deduce $\sum X = \bar{X} n$, cioè

la somma non è che il prodotto della media per il numero dei casi, cioè, nel nostro esempio, la somma dei risultati di un soggetto nei tests della batteria è uguale alla media dei risultati del soggetto nei tests, moltiplicata per il numero dei tests; ed essendo il numero dei tests uguale per tutti i soggetti del campione, le somme dei risultati sono proporzionali alle medie.

(3) Cioè le misure dei soggetti negli S di due diversi tests non sono correlate.

do i risultati di piu' tests si ottiene un risultato complessivo in cui, con ogni probabilita', si accentua al massimo la G e si minimizza l'azione degli S_t (1) purché i tests siano eterogenei, e sia pertanto sicura la eterogeneita' dei fattori specifici.

Infatti, secondo Spearman, gli eccellenti risultati forniti dalla scala metrica dell'intelligenza di Binet e Simon sarebbero dovuti al fatto che in quel test si sommano i risultati di tanti tests eterogenei, ottenendo in tal modo un'ottima approssimazione della G di un soggetto (2).

Si tratta tuttavia di un procedimento assai grossolano. Infatti, volendo ottenere una somma, o una media aritmetica in cui acquisti il massimo rilievo una quantita' presente in ogni addendo, non conviene fare una semplice addizione, attribuendo lo stesso peso ad ogni addendo, ma conviene invece attribuire ad ogni addendo un peso diverso a seconda del suo contenuto; cioe' nel caso qui considerato moltiplicare ogni addendo per un coefficiente proporzionale al contributo in G che il singolo addendo fornisce nella somma (e rispettivamente nella media). Si tratta cioe' di utilizzare dei coefficienti che tengano conto della diversa situazione in G di ogni test in modo da accentuare nella somma il contributo dei tests ad alta saturazione in G.

Va notato inoltre che l'utilizzazione del risultato in un test fattoriale come misura del corrispondente fattore nel soggetto rappresenta una soluzione grossolana perche' inesatta anche da un altro punto di vista.

Cio' che noi conosciamo circa la relazione fra test fattoriale e fattore, e' la saturazione del test nel fattore. Ma e' stato dimostrato in precedenza che la saturazione di un test in un fattore non e' altro che la correlazione fra il test e il fattore: $a_t = r_{tG}$. Di conseguenza, la valutazione corretta della misura di un fattore in un soggetto, sulla base del risultato conseguito dallo stesso soggetto in un test, non e' altro che la valutazione di una variabile in base alla misura di un'altra variabile con essa correlata.

Si tratta dunque di un problema analogo a quello di *prevedere* sulla base del risultato in un test, o meglio dei risultati in una batteria di tests, il risultato scolastico o professionale di un soggetto - risultato la cui misura sara' data, in futuro, dal risultato di un esame, o addirittura di un test, scolastico o professionale.

L'analogia fra i due problemi - stima del fattore G di un soggetto e stima del risultato di un soggetto in un test (applicabile in futuro) - diventa identita' se ammettiamo per ipotesi che esista un test che ci

(1) In quanto essendo gli S di uno stesso soggetto in parte superiori alla media e in parte inferiori alla media, e quindi, in unita' standard, in parte positivi e in parte negativi, la loro somma e' prossima a zero.

(2) Cio' vale naturalmente anche per le successive edizioni di Terman (1916), Terman e Merryl (1937, 1960).

da' la misura esatta del fattore G dei soggetti. Si puo' quindi riformulare il problema: in analogia al noto problema della previsione del rendimento professionale: la stima del fattore G di un soggetto si riduce allora alla previsione del risultato di un soggetto in questo ipotetico test che misura il fattore G , sulla base dei risultati del soggetto in un test o in una batteria di tests.

In realta', come si e' detto nel capitolo precedente, nulla ci impedisce di formulare l'ipotesi dell'esistenza di un test che misuri esattamente la G dei soggetti: un test di G privo di fattore specifico. Di questo ipotetico test, noi conosciamo in effetti le correlazioni con altri tests, in quanto attraverso l'analisi fattoriale abbiamo ottenuto le saturazioni nel fattore G dei vari tests della batteria. Il problema, posto in questi termini, non e' altro che il classico problema statistico della regressione.

3. L'equazione di regressione

Consideriamo anzitutto il problema nella sua forma piu' semplice, cioe' la previsione del risultato di un soggetto in un test X a partire

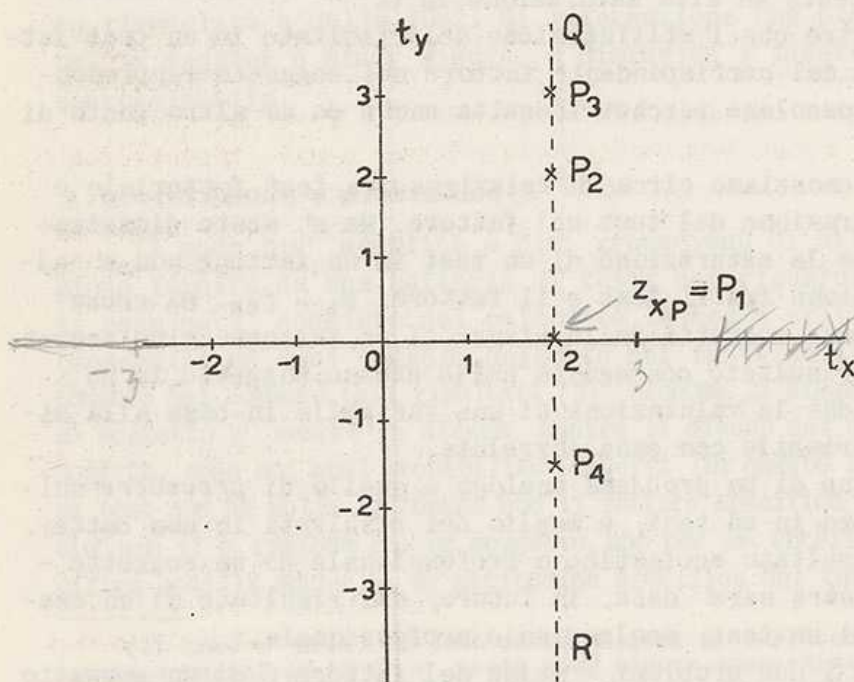


Fig. 26.

re dal risultato in un altro test Y correlato al primo.

Partiamo dalla rappresentazione geometrica ad assi ortogonali, piu' familiare (fig. 26), per poi passare a quella ad assi obliqui, secondo la convenzione del coseno.

Ad un risultato z_{xP} di un soggetto P nel test X corrisponde un punto P_i sull'asse X . Ma

se invece di riferirci ad un asse (spazio ad una dimensione) ci riferiamo ad un piano (spazio a due dimensioni) ed in particolare al piano in-

dividuo dai due assi t_x e t_y che si intersecano nel punto O , il risultato del soggetto P nel test X non corrisponde piu' ad un unico punto, ma a tutti i punti che danno la stessa proiezione ortogonale z_{xp} sull'asse t_x , cioe' a tutti i punti che stanno sulla retta QR , perpendicolare a t_x nel punto z_{xp} . In altre parole, tutti i punti della suddetta perpendicolare (per es. P_1, P_2, P_3, P_4) rappresentano soggetti (reali o ipotetici) che hanno ottenuto lo stesso risultato nel test t_x . Ma la posizione del punto nel piano individuato dai due assi dipende anche dal risultato nel test Y e le diverse posizioni sulla retta QR corrispondono a risultati diversi nel test Y , poiche' danno proiezioni diverse sull'asse Y (1). In altre parole, i punti della retta QR rappresentano tutti i soggetti che hanno lo stesso risultato nel test X , ma risultati differenti nel test Y .

Il problema che ci siamo posti consiste nella previsione del risultato nel test Y di un soggetto di cui si conosce il risultato nel test X . Siccome ad un risultato nel test X puo' corrispondere qualsiasi risultato nel test Y , si sarebbe portati a concludere che non vi e' modo di fare una previsione in base alla conoscenza del solo risultato nel test X . Tuttavia ci puo' soccorrere un altro ordine di considerazioni.

Ricordiamo che ogni punto del piano individuato dai due assi X e Y rappresenta un soggetto i cui risultati nei tests X e Y corrispondono alle proiezioni del punto stesso sugli assi X e Y ; e che quando vi e' correlazione fra i due tests i punti non hanno uguale probabilita' di cadere nei quattro quadranti, ma cadono con maggior frequenza nel primo e nel terzo quadrante, cioe' nel quadrante i cui punti hanno ambedue le proiezioni positive e nel quadrante i cui punti hanno ambedue le proiezioni negative. Infatti, se vi e' correlazione fra due tests e' piu' probabile che un soggetto che ha un risultato superiore alla media in uno dei due tests abbia un risultato superiore alla media anche nell'altro tests; e se invece ha un risultato inferiore alla media in un test, e' piu' probabile che abbia un risultato inferiore alla media che non un risultato superiore alla media anche nell'altro test. Inoltre, mentre e' sempre poco probabile che un soggetto ottenga un risultato eccezionale, cioe' lontano dalla media, nei due tests, e' piu' probabile che i risultati in tutti e due i tests siano o molto elevati o molto bassi, che non che il risultato in un test sia molto elevato e nell'altro molto basso.

Si e' detto anche che i punti che rappresentano i soggetti si distribuiscono nel diagramma formando una specie di nuvola di forma ellittica. Cio' dipende dal fatto che, in base a quanto e' stato detto, i punti si distribuiscono con maggior frequenza nel I e nel III qua-

(1) Infatti, mentre per esempio al punto P_1 corrisponde un risultato 0,0 nel test Y , al punto P_2 corrisponde un risultato +2, al punto P_3 un risultato +3, al punto P_4 un risultato -1,5.

drante che nel II e nel IV; inoltre diventano tanto meno frequenti quanto piu' ci si allontana dall'origine degli assi, ma tale diminuzione di frequenza e' piu' rapida nel II e nel IV quadrante che nel I e III.

*nelto
a caso*
La densita' dei punti sta dunque ad indicare la probabilita' che un soggetto (in base ai suoi due risultati) si localizzi in un determinato punto del piano. E la forma ellittica della nuvola di punti sta a indicare che i punti di uguale probabilita' si dispongono lungo ellissi concentriche.

Consideriamo ora la fig. 27 in cui sono rappresentate le suddette ellissi concentriche, e la retta QR , cioe' l'insieme dei punti che rap-

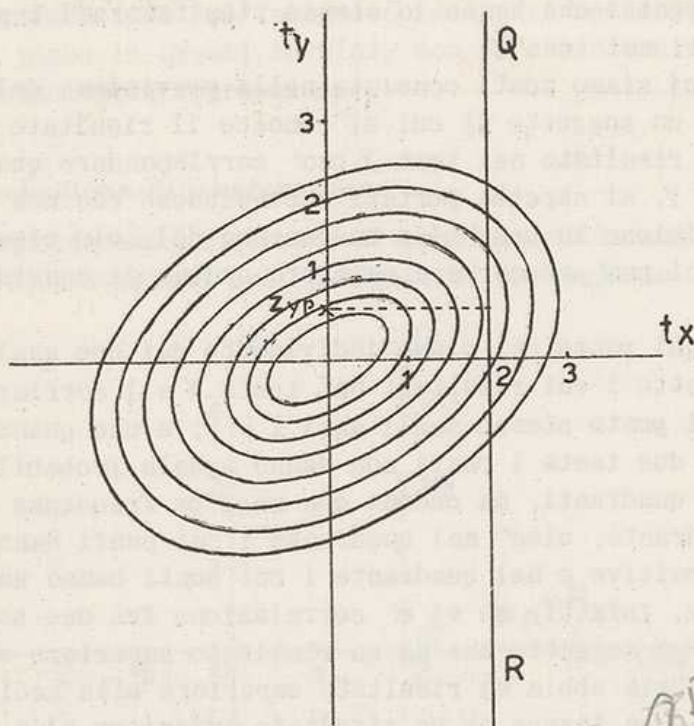


Fig. 27.

presentano i soggetti P che hanno conseguito lo stesso risultato z_x nel test X . Il fatto che la retta QR tagli tutta una serie di ellissi, cioe', in altre parole, che singoli punti della retta QR appartengano a diverse curve equiprobabili, significa evidentemente che la probabilita' che ha un soggetto di corrispondere (in base ai suoi due risultati) ai diversi punti della retta QR (1)

non e' uguale. Quale e' il punto di QR che corrisponde alla massima probabilita'? Evidentemente il punto che appartiene all'ellisse meno eccentrica, cioe' il punto in cui la retta QR e' tangente ad una ellisse. Il risultato piu' probabile nel test Y e' costituito dunque dalla proiezione del suddetto punto sull'asse Y .

Consideriamo ora la rappresentazione ad assi obliqui, in cui gli assi dei due tests X e Y , correlati positivamente, formano fra loro un

(1) Cioe' di ottenere i diversi risultati nel test Y , che corrispondono ai diversi punti della retta QR .

angolo il cui coseno e' uguale al coefficiente di correlazione fra i due tests (fig. 28). Anche in questo diagramma, i punti P_i che rappresentano i soggetti i quali hanno ottenuto lo stesso risultato z_x nel

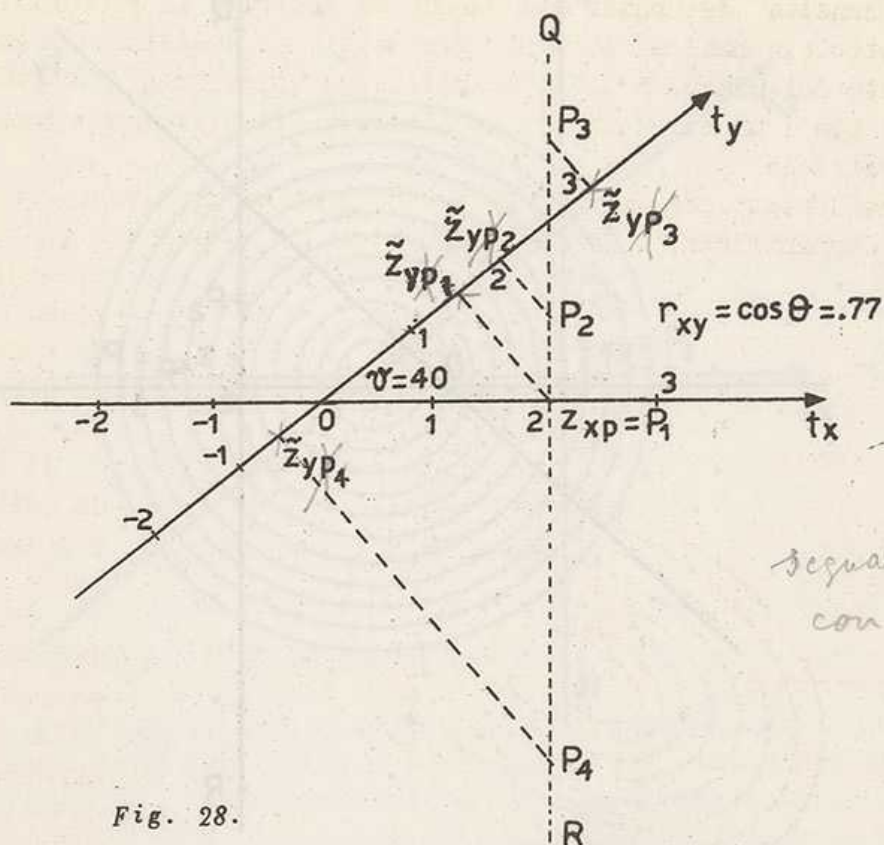


Fig. 28.

test X si trovano sulla perpendicolare all'asse X nel punto z_x (retta QR); e le proiezioni ortogonali di questi diversi punti ($P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$) sull'asse Y rappresentano i risultati di questi diversi soggetti nel test Y .

A differenza di quanto avviene nella rappresentazione ad assi perpendicolari, nella rappresentazione spaziale ad assi obliqui secondo la convenzione del coseno i punti che rappresentano i soggetti si dispongono sempre simmetricamente intorno all'origine degli assi, con densita' decrescente col crescere della distanza dall'origine degli assi, e secondo linee di uguale densita' di forma non ellittica ma circolare (1). Maggiore densita' significa - in questo come nell'altro diagramma - maggiore frequenza, e quindi maggiore probabilita' di ottenere un determinato risultato.

Dalla fig. 29, in cui sono rappresentati gli assi X e Y , la perpen-

(1) Vedi Cap. II, 3.

dicolare nel punto z_{xp} , e inoltre i punti-soggetti disposti con densita' decrescente a partire dall'origine degli assi, e dalla fig. 30 in cui, in luogo dei punti ci sono dei cerchi che rappresentano i punti

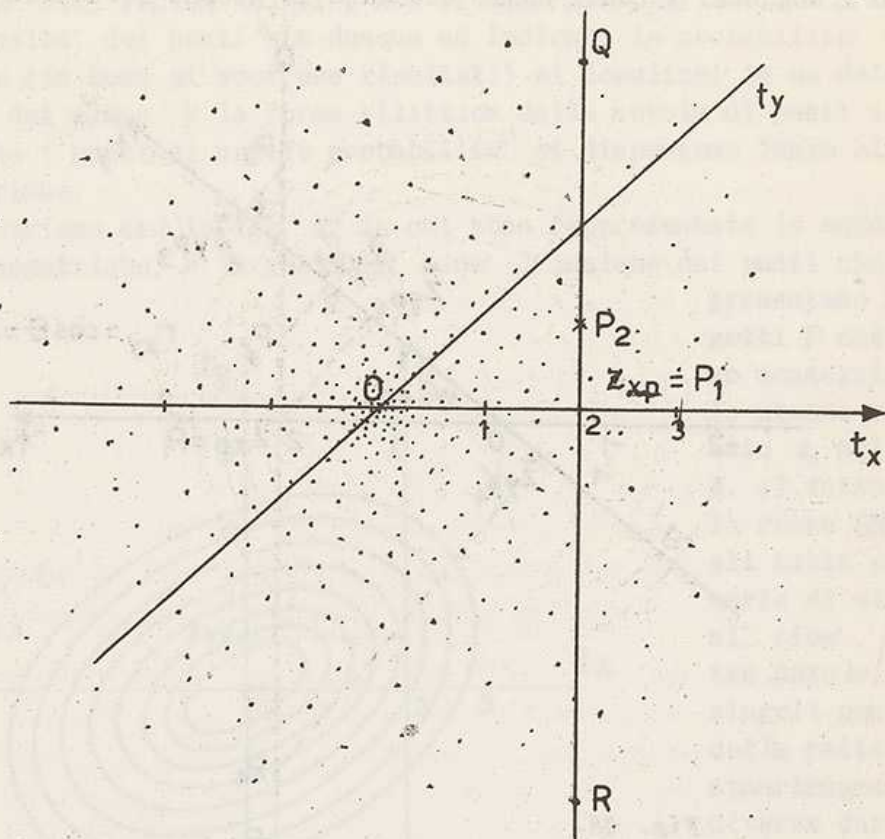


Fig. 29.

equiprobabili, cioe' i casi che hanno uguale probabilita' di verificarsi, si vede che gli assi X e Y , rappresentano due diametri delle circonferenze concentriche di ugual densita', mentre la perpendicolare in P (cioe' la retta QR) rappresenta una corda di tali circonferenze. Anche questo diagramma mette in evidenza un punto della retta QR che giace nella zona di maggior densita', cioe' di maggiore probabilita', mentre tutti gli altri punti rappresentano casi tanto meno probabili quanto piu' si allontanano, nell'una o nell'altra direzione, da tale punto. Ma nella rappresentazione ad assi obliqui il punto di massima probabilita' e' il punto di intersezione della retta QR con l'asse del test X , cioe' il punto P_1 (1); quindi il risultato piu' probabile nel test Y di un

(1) Di tutti i punti della retta QR , P_1 e' il piu' vicino all'origine degli assi (e quindi rappresenta il caso piu' probabile); infatti, prendendo un altro punto qualsiasi della retta QR (per es. il punto P_2) e congiungendolo con O si ottiene un triangolo rettangolo, di cui OP_1 e' l'ipotenusa ed e' quindi maggiore di OP_2 che e' uno dei cateti.

Il fatto che, a differenza di quanto avviene nella rappresentazione ad

soggetto che ha nel test X il risultato z_{xp} , e' $\tilde{z}_{yp}^{(1)}$, cioè la proiezione del punto P_1 sull'asse Y (vedi figg. 28 e 30).

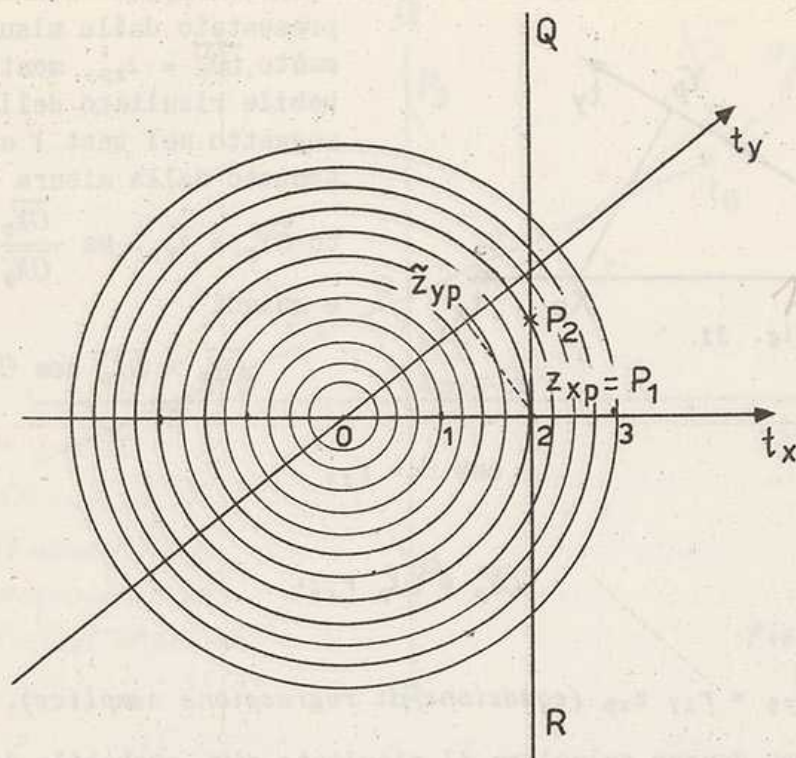


Fig. 30.

Dunque rappresentando gli assi dei due tests X e Y in modo che i due semiassi positivi formino un angolo il cui coseno corrisponde al coefficiente di correlazione r_{xy} e segnando sull'asse X il punto corrispondente al risultato di un soggetto nel test X (in unità standard), tracciando la perpendicolare da quel punto al test Y, si determina il risultato più probabile (in unità standard) del soggetto nel test Y.

E' tuttavia più conveniente calcolare tale risultato servendosi di un'equazione, detta *equazione di regressione*, che esprime la relazione sussistente fra z_{xp} e \tilde{z}_{yp} , cioè fra il risultato di un soggetto P in un test X e il risultato più probabile dello stesso soggetto in un altro test Y.

assi ortogonali, la posizione del punto di massima probabilità sia messo chiaramente in evidenza e' uno dei vantaggi della rappresentazione ad assi obliqui.

(1) Con \tilde{z}_{yp} si indica la stima del risultato del soggetto P nel test Y (stima che in questo caso e' espressa in unità standard).

L'equazione di regressione si può ricavare geometricamente (figura 31).

Il risultato del soggetto P nel test X (in unità standard) è rappresentato dalla misura del segmento $\overline{OX_p} = z_{xp}$, mentre il probabile risultato dello stesso soggetto nel test Y è rappresentato dalla misura del segmen-

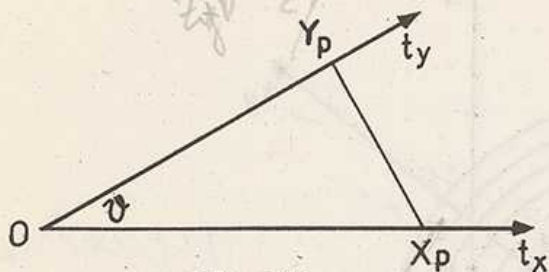


Fig. 31.

to $\overline{OY_p} = \tilde{z}_{yp}$. Ma $\frac{\overline{OY_p}}{\overline{OX_p}} = \cos \theta$ e quindi

$$\overline{OY_p} = \overline{OX_p} \cos \theta$$

E poiché

$$\cos \theta = r_{xy}$$

si ha

$$\overline{OY_p} = \overline{OX_p} r_{xy}$$

cioè

$$\tilde{z}_{yp} = r_{xy} z_{xp} \text{ (equazione di regressione semplice).}$$

Possiamo dunque calcolare il risultato più probabile del soggetto A in un qualsiasi test Y (espresso in unità standard) conoscendo il risultato dello stesso soggetto in un altro test X e il coefficiente di correlazione fra i due tests, r_{xy} .

Esempio. Il soggetto H ha conseguito in un test U (successioni numeriche) punti standard $-1,3$. Si chiede qual è il suo più probabile risultato nel test W (rappresentazione spaziale). La correlazione fra i due tests $r_{uw} = 0,50$. $\tilde{z}_w = (0,50) (-1,3) = -0,65$. Il risultato più probabile del soggetto H nel test W è $-0,65$.

Riferendoci a quanto è stato detto in precedenza risulta chiaro che lo stesso procedimento può essere usato per la stima del fattore G . Infatti se consideriamo G come un ipotetico test, di cui conosciamo la correlazione con un altro test X (in quanto la saturazione a_x del test X nel fattore G è la correlazione fra il test e G), possiamo prevedere, in base al risultato di un soggetto p nel test X , il suo risultato nell'ipotetico test di G , o in altre parole possiamo stimare la G del soggetto.

A chiarimento di quanto è stato detto servono le figure 32, 33 e 34.

Dalla fig. 32 che è analoga alla fig. 28, si vede che il problema della stima di G è identico al problema della previsione di un risultato di un soggetto in un test Y sulla base del risultato in un test X . Nella fig. 33 appare evidente che il punto più probabile giace sul-

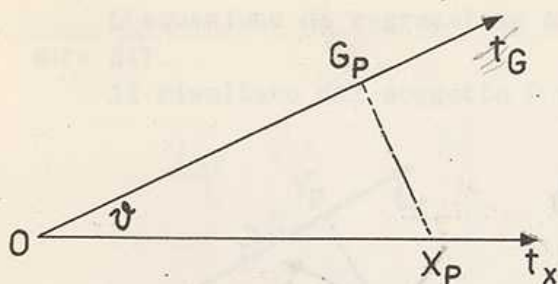


Fig. 34.

l'asse del test X. Infine, dalla fig. 34 risulta chiaro che, essendo

$$\cos \theta = r_{XG} = a_X$$

la stima di G si ottiene mediante l'equazione di regressione

$$\tilde{G}_p = a_X z_{Xp}$$

che permette di calcolare il

valore piu' probabile del fattore G del soggetto p.

Esempio. Il soggetto A ha ottenuto nel test X il risultato $z_{XA} = 1,2$. Il test X ha una saturazione di 0,9 in G, cioè $a_X = r_{GX} = 0,9$. In base all'equazione di regressione la stima del fattore G del soggetto risulta $(0,9) \cdot (1,2) = 1,08$ (1).

A questo punto sono necessarie alcune precisazioni. La previsione si ottiene in base a due informazioni di natura diversa: il risultato nell'altro test, e la correlazione fra i due tests. E il risultato previsto e' direttamente proporzionale all'uno e all'altro dei due dati. Ma mentre la relazione di proporzionalita' fra risultato in un test e previsione del risultato nell'altro test ha un significato chiaro (2), il significato della proporzionalita' tra risultato previsto e coefficiente di correlazione rende necessario un chiarimento.

Consideriamo a tale scopo, la fig. 31 tenendo presente che quanto piu' piccolo e' l'angolo θ , tanto maggiore e' la correlazione fra i due tests, mentre quanto piu' l'angolo θ si avvicina a 90° , tanto minore e' la correlazione. Variando l'angolo θ la misura della proiezione del segmento Oz_X sull'asse Y (cioe' il risultato previsto, \tilde{Y}_p , nell'altro test) diventa tanto piu' piccola quanto piu' l'angolo θ si avvicina a 90° , e diventa zero, cioe' cade sull'origine dell'asse Y (che e' comune con l'asse X) quando $\theta = 90^\circ$ (fig. 35).

Teniamo presente che il risultato zero, in unita' standard, e' il risultato medio. Che cosa significa prevedere il risultato medio? Pre-

(1) E' opportuno far presente la scarsissima attendibilita' di una tale stima, basata su un solo test. Consideriamo infatti il risultato $z_{WA} = 0,5$ dello stesso soggetto A in un altro test, W, che presenta una saturazione in G di 0,6. La stima della G dello stesso soggetto risulta $(0,6) \cdot (0,5) = 0,3$. Le due stime risultano ben diverse: secondo l'una il soggetto ha una G nettamente superiore alla media, secondo l'altra ha una G media. Lo stesso puo' accadere quando si procede alla previsione del risultato in un test partendo dai risultati del soggetto in due altri tests. Una previsione non e' che il valore piu' probabile scelto entro una gamma teoricamente illimitata di valori possibili. Nel caso di G questa variabilita' delle previsioni appare giustificata dal fatto che uno stesso risultato in un test puo' derivare da infinite combinazioni di G e di S.

(2) Se due tests sono correlati positivamente, si deve ritenere piu' probabile, per il fenomeno della correlazione, che chi ha un risultato elevato in uno dei tests abbia un risultato elevato anche nell'altro test.

in sintesi
E' come dire che per rischio di fare una previsione conta
na dalla media solo se la correlazione e' elevata.
La relazione in cui si fa la previsione e' rappresentata
dal risultato nell'altro test.

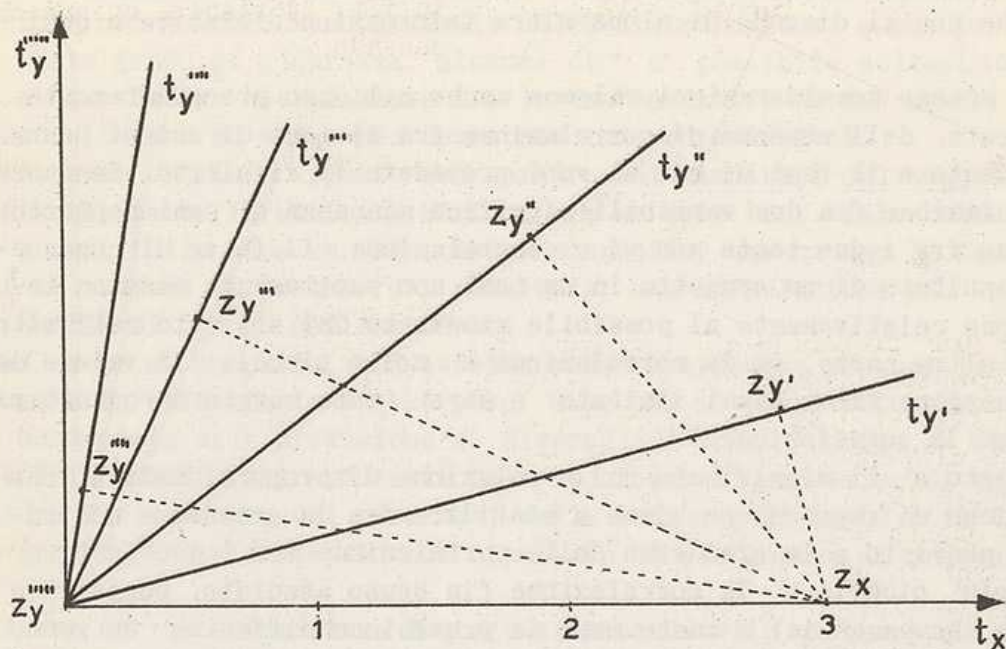


Fig. 35.

vedere o stimare statisticamente il risultato di un soggetto in un test significa indicare il risultato più probabile; se non si dispone di nessuna informazione sul soggetto che sarà sottoposto al test, la sola previsione ragionevole è la media aritmetica dei risultati nel test, cioè, in unità standard, $\tilde{z}_{yp} = 0$. Infatti non avendo altre informazioni (per es. relative ad altri tests ai quali il soggetto sia stato sottoposto) la previsione consiste nel localizzare il risultato del soggetto in uno spazio unidimensionale, cioè sull'asse del test di cui si intende prevedere il risultato. Ma se si sottopone al test un gruppo numeroso di soggetti presi a caso, i risultati, cioè i punti soggetti sull'asse del test, sono tanto più frequenti quanto più sono vicini all'origine dell'asse, cioè alla media della distribuzione, che è quindi il valore più probabile.

D'altra parte, se è vero che la media aritmetica è la migliore previsione del risultato di un dato soggetto quando non si dispone di altre fonti di informazioni (1), è vero anche l'inverso, cioè che

(1) Può venir fatto di chiedersi come mai, essendo la media aritmetica dei risultati in un test il risultato più frequente in quel test, abbia senso indicare un risultato diverso dalla media aritmetica come il più probabile. Sta il fatto che quando conosciamo il risultato di un dato soggetto in un test correlato, prendiamo in considerazione soltanto i risultati possibili dei soggetti che ottengono tutti quel determinato risultato nel primo test, e la media dei risultati di questo particolare gruppo di soggetti è diversa dalla media generale. Possiamo cioè considerare la distribuzione dei risultati in un test (Y) di cui ci proponiamo di prevedere i risultati in base alla sua correlazione con un altro test (X), come costituita da tante sequenze di risultati, collegate ciascuna con un risultato nel test X: ognuna di queste sequenze rappresenta una diversa distribuzione di frequenze il cui valore medio

quando si indica come risultato piu' probabile la media aritmetica, e' segno che non si dispone di alcun'altra informazione relativa a quel soggetto.

Le stesse considerazioni valgono anche nel caso precedentemente considerato, dell'assenza di correlazione fra il test di cui si conosce il risultato e il test di cui si vuol prevedere il risultato. Mancanza di correlazione fra due variabili significa mancanza di ogni rapporto; quindi se fra i due tests non vi e' correlazione, il fatto di conoscere il risultato di un soggetto in un test non rappresenta nessuna informazione relativamente al possibile risultato del soggetto nell'altro test. D'altra parte, se la correlazione e' molto piccola, il valore dell'informazione sara' assai limitato; e sara' tanto maggiore, quanto piu' grande e' la correlazione.

Questo e' il significato della relazione di proporzionalita' che l'equazione di regressione viene a stabilire fra la grandezza del risultato previsto e la grandezza della correlazione fra i due tests. Quanto piu' piccola e' la correlazione (in senso assoluto, positiva o negativa che essa sia) e tanto meno la previsione differira' da zero, cioe' dalla media generale; cioe' tanto minore e' il peso che viene dato all'informazione ossia al risultato del soggetto nell'altro test.

Altrettanto vale quando, anziche' prevedere il risultato di un soggetto in un test, sulla base del risultato conseguito in un altro test, ad esso correlato, si intende stimare la misura del fattore G (o di un altro fattore) di un soggetto, sulla base del risultato in un test di cui e' noto il coefficiente di saturazione nel fattore stesso. Dato che nell'analisi di Spearman il coefficiente di saturazione e' un coefficiente di correlazione fra il test e il fattore, quanto piu' alto e' il coefficiente di saturazione del test e tanto maggiore e' il peso che si attribuisce all'informazione costituita dal risultato del soggetto nel test, agli effetti della stima del fattore.

Ma vi e' di piu'. Col variare del coefficiente di correlazione varia non soltanto la misura in cui il risultato previsto differisce da zero, cioe' dalla media generale, ma anche il grado di incertezza, cioe' la probabilita' stessa della previsione. Il grado di fiducia che merita una previsione e' anch'esso funzione del coefficiente di correlazione fra i due tests: e' minimo quando la correlazione e' zero (cioe' quando la previsione coincide con la media aritmetica della distribuzione) e massimo quando la correlazione e' +1, cioe' quando la previsione diventa certezza (1).

non coincide con la media generale dei risultati del test relativamente al quale ci si propone di fare la previsione. La previsione, essendo fatta per il valore piu' probabile, corrisponde cioe' sempre alla media di una distribuzione, ma si tratta di distribuzione la cui media non coincide, in genere, con la media della distribuzione generale.

(1) L'errore tipo della previsione $\sigma_{y \cdot x}$ che misura tale grado d'incertezza si calcola con la formula $\sigma_{y \cdot x} = \sigma_x \sqrt{1 - r_{xy}^2}$ in cui $\sigma_{y \cdot x}$ e' la deviazione standard dei risultati nel test Y relativi ai soggetti che hanno lo stesso risultato nel test X .

E' evidentemente essenziale poter fare una previsione efficace (che cioe' non coincida con la media della distribuzione) e che presenti un certo grado di sicurezza. Siccome cio' e' possibile soltanto quando vi e' un'elevata correlazione fra le due variabili (i due tests) non resta che trovare un mezzo per aumentare tale correlazione.

Il mezzo consiste appunto nel partire dai risultati del soggetto in tutta una batteria di tests anziche' in un solo test. Tale batteria viene a costituire come un unico test, composito, che ha con il test di cui ci si propone di prevedere i risultati, una correlazione piu' grande di quella di ognuno dei componenti.

Ma, come si e' detto, non avrebbe senso attribuire ai vari tests componenti la batteria lo stesso peso, dato che il contributo che ognuno di essi porta alla previsione e' diverso. Si tratta dunque di determinare dei coefficienti ponderali tali da ottenere un massimo di correlazione tra la somma dei risultati nella batteria di tests e il test (o in genere la variabile) il cui risultato ci si propone di prevedere.

Anche per la stima di un fattore si procede allo stesso modo, utilizzando i risultati di un soggetto in una batteria di tests e servendosi di coefficienti ponderali calcolati in modo da dare la stima piu' attendibile (v. § 5).

4. La previsione a partire dai risultati in due o piu' tests

Ci limiteremo qui ad esaminare *dal punto di vista del modello geometrico* il problema della previsione a partire da piu' tests (1), problema che, secondo quanto e' stato detto, non differisce dal problema della valutazione di un fattore di un soggetto, a partire dal suo risultato in piu' tests.

Consideriamo anzitutto il modello geometrico della previsione del risultato in un test (Y) - o della stima di un fattore (G) in base ai risultati in 2 tests (X, W), conoscendo le correlazioni fra i 3 tests (r_{xy}, r_{wy}, r_{xw}), oppure se si tratta della stima di G , della correlazione di due tests e con G e fra loro ($r_{xg} = a_x, r_{wg} = a_w, r_{xw}$). Nel modello, gli assi X, W, Y (oppure X, W, G) sono orientati in modo che X e W formino un angolo α e tale che $\cos \alpha = r_{xw}$, X e Y formino un angolo β tale che $\cos \beta = r_{xy}$, W e Y un angolo γ tale che $\cos \gamma = r_{wy}$ (o se

(1) La tecnica del calcolo di questi coefficienti ponderali (*coefficienti di regressione multipla*) si trova descritta in ogni testo di statistica nel capitolo "Correlazione multipla". Tale tecnica non interessa particolarmente questo capitolo dato che, come vedremo, Spearman ha elaborato un procedimento piu' semplice per la stima di G in base ai risultati in una batteria di tests di cui siano note le saturazioni in G .

Convieni ad ogni modo precisare che una volta calcolati i coefficienti di regressione multipla si ottiene direttamente, risolvendo l'equazione di regressione multipla, la stima della variabile che ci si proponeva di valutare, variabile che puo' essere eventualmente un fattore.

invece si tratta di stimare G , X e G formeranno un angolo β' tale che $\cos \beta' = r_{xg} = a_x$ e W e G un angolo γ' tale che $\cos \gamma' = r_{wg} = a_w$.

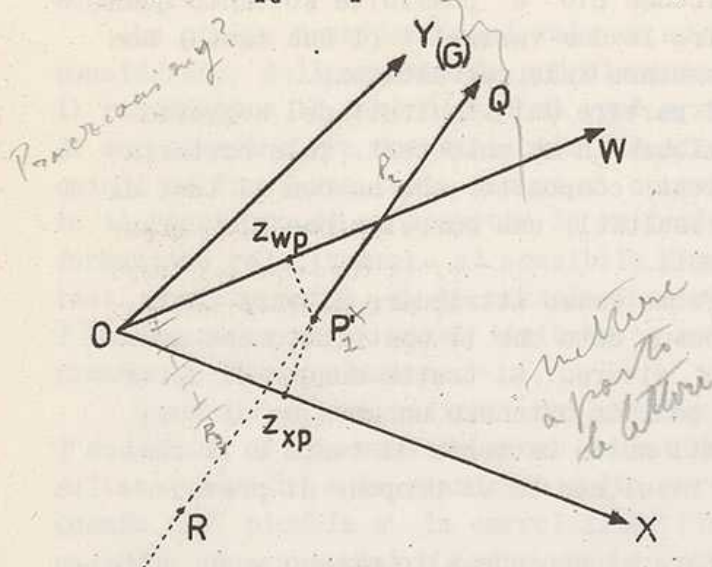


Fig. 36.

In fig. 36 il triedro costituito dai 3 assi e' disegnato in prospettiva: X e W sono sul piano del foglio, mentre $Y(G)$ incontra il piano nel punto O .

I risultati del soggetto P nei tests X e W sono rispettivamente z_{xp} e z_{wp} . Nel piano individuato dai due assi X e W , tutti i punti che giacciono sulla perpendicolare ad X nel punto z_{px} hanno la stessa proiezione z_{px} in X , e corrispondono quindi a persone che hanno conseguito lo stesso risultato nel test X ; cosi' pure tutti i punti

che giacciono sulla perpendicolare a W nel punto z_{pw} hanno su W la stessa proiezione z_{pw} , e corrispondono quindi a soggetti che hanno conseguito lo stesso risultato nel test W . (1).

Ma le due perpendicolari si incontrano in un punto P' il quale trovandosi su tutte e due le perpendicolari ha la proiezione z_{px} su X e z_{pw} su W , cioe' rappresenta quei soggetti che hanno ottenuto i risultati z_{px} nel test X e z_{pw} nel test W . Quale e' il risultato piu' probabile di questi soggetti nel test Y ?

I tre assi, X , W , Y individuano in generale (2) uno spazio tridimensionale, nel quale i soggetti che hanno gli stessi risultati, z_{px} in X e z_{pw} in W , non sono rappresentati da un punto ma da tutti i punti che sul piano XW hanno la loro proiezione in P' , punti che giacciono tutti sulla retta QR , perpendicolare al piano XW nel punto P' .

Ognuno di questi punti ha una proiezione diversa sull'asse Y , cioe' ognuno di questi punti, corrispondenti a soggetti che hanno ottenuto risultati uguali nei tests X e W , si differenzia per il risultato nel test Y . Ma, come nel caso della previsione in base ad un test, possia-

(1) Ricordiamo ancora una volta che i soggetti che sono rappresentati da punti che giacciono sulla perpendicolare in z_{px} hanno lo stesso risultato nel test X , ma risultati diversi nel test W (in quanto tali punti hanno proiezioni diverse sull'asse W); e cosi' i soggetti che sono rappresentati da punti che giacciono sulla perpendicolare a W nel punto z_{pw} hanno lo stesso risultato in W ma risultati diversi in X .

(2) Esiste pero' il caso particolare in cui l'asse del 3° test si trova sul piano degli altri due. In questo caso il risultato nel 3° test si deduce (con certezza) dai risultati negli altri due.

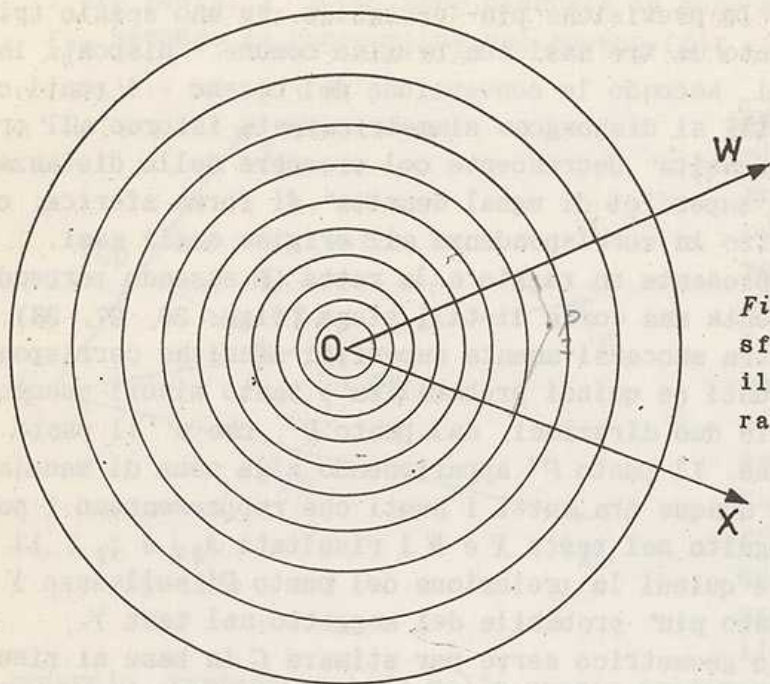


Fig. 37. - Sezione delle sfere concentriche lungo il piano individuato dai raggi X e W.

sezione P₁

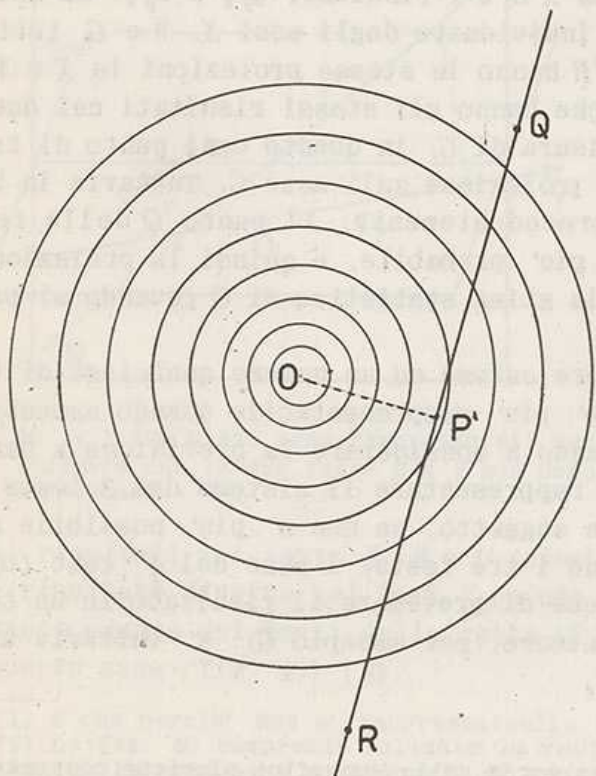


Fig. 38. - Sezione delle sfere concentriche lungo un piano ortogonale a quello di fig. 37 che comprende la retta QR e il centro delle sfere.

P₁ è l'insieme dei punti della retta QR il punto di massima probabilità perdersi è il più vicino all'centro o più esp. altri

mo anche qui indicare la previsione piu' probabile. In uno spazio tridimensionale individuato da tre assi con origine comune - disposti in base alle correlazioni, secondo la convenzione del coseno - i punti che rappresentano i soggetti si dispongono simmetricamente intorno all'origine degli assi, con densita' decrescente col crescere della distanza dall'origine, secondo superfici di ugual densita' di forma sferica, concentriche, con il centro in corrispondenza all'origine degli assi.

La retta OP' rappresenta un raggio e la retta QR essendo perpendicolare ad OP' rappresenta una corda di tali sfere (figg. 36, 37, 38).

Tale corda incontra successivamente superfici sferiche corrispondenti a densita' di punti (e quindi probabilita') tanto minori quanto piu' si allontana nelle due direzioni, dal punto P' , che e' il punto piu' vicino all'origine. Il punto P' appartenendo alla zona di massima densita', rappresenta dunque tra tutti i punti che rappresentano i soggetti che hanno conseguito nei tests X e W i risultati z_{p_x} e z_{p_w} , il caso piu' probabile, e quindi la proiezione del punto P' sull'asse Y rappresenta il risultato piu' probabile del soggetto nel test Y .

Lo stesso modello geometrico serve per stimare G in base ai risultati di due tests, essendo note le saturazioni dei due tests in G e la correlazione fra i due tests.

Essendo la saturazione del singolo test in G pari alla correlazione fra il test e G , si possono orientare i tre assi secondo la convenzione del coseno. Il punto P' rappresenta, nel piano XW , il soggetto che ha conseguito nei due tests X e W i risultati z_{p_x} e z_{p_w} . Ma nello stesso spazio tridimensionale individuato dagli assi X , W e G , tutti i punti della perpendicolare $QP'R$ hanno le stesse proiezioni in X e W , cioe' rappresentano soggetti che hanno gli stessi risultati nei due tests, ma hanno una diversa misura di G , in quanto ogni punto di tale perpendicolare ha una diversa proiezione sull'asse G . Tuttavia in base a quanto e' stato detto precedentemente, il punto Q della retta $QP'R$ (1) rappresenta il caso piu' probabile, e quindi la proiezione di Q sull'asse G rappresenta la stima statistica di G (quando si parte dai risultati di due tests).

Il ragionamento puo' essere esteso ad un numero qualsiasi di tests ma il modello geometrico non e' piu' rappresentabile quando aumenta il numero delle dimensioni. Passando a considerare la previsione a partire da 3 tests, si puo' ancora rappresentare il sistema dei 3 tests, con i rispettivi 3 risultati di un soggetto, ma non e' piu' possibile rappresentare (se si rappresentano i tre tests) l'asse del 4° test (oppure l'asse del fattore, se invece di prevedere il risultato in un test ci si propone di stimare un fattore, per esempio G). E' tuttavia utile considerare anche questo caso.

(1) Retta che costituisce una corda delle superfici sferiche concentriche comprendenti ciascuna i punti di uguale densita' e quindi equiprobabili.

I tre tests, X, W, U , sono disposti in base alle correlazioni r_{xw}, r_{ux}, r_{uw} secondo la convenzione del coseno (fig. 39).

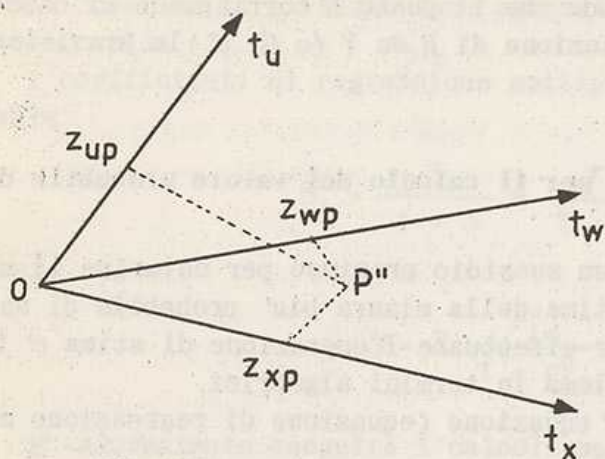


Fig. 39.

Sviluppando relativamente alla situazione di fig. 39 il procedimento seguito per il modello di fig. 36 si vede che vi e' un unico punto P'' dello spazio tridimensionale, le cui proiezioni sui tre assi corrispondono ai risultati raggiunti da un soggetto nei tre tests. Il quarto asse, che rappresenta il test Y (e il fattore G), non e',

in generale, rappresentabile nello spazio tridimensionale. Dobbiamo, dunque, anche in questo caso, passare ad uno spazio che ha una dimensione in piu', cioe' ad uno spazio quadridimensionale.

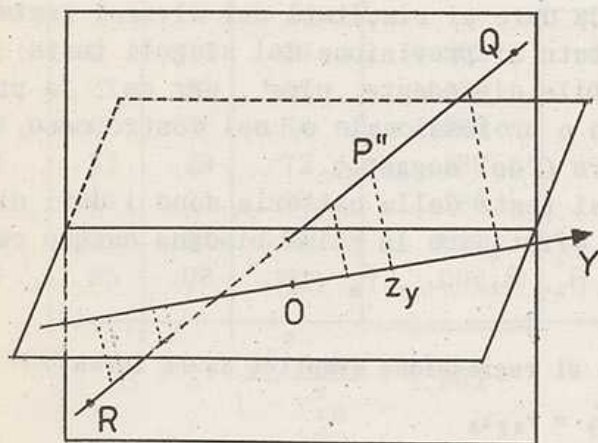


Fig. 40. - I due piani sono rappresentati per indicare che le due rette R e Y non sono complanari.

stessi risultati nei tests X, W e U (cioe' z_{xp}, z_{wp} e z_{up}) hanno ognuno un risultato diverso nel test Y (o una misura diversa nel fattore G) in quanto ognuno dei punti della retta $QP''R$ ha una proiezione diversa sul quarto asse (fig. 40) (2).

Analogamente a quanto avveniva per il punto Q nel passaggio dallo spazio bidimensionale allo spazio tridimensionale - nello spazio quadridimensionale non solo il punto P'' , ma tutti i punti di una retta $QP''R$ che esce dallo spazio tridimensionale ed e' perpendicolare ad esso (1) hanno come proiezioni ortogonali sui tre assi X, W e U i punti z_{xp}, z_{wp} e z_{up} . I punti della retta $QP''R$ rappresentano soggetti che avendo gli

(1) E che percio' non e' rappresentabile in fig. 39.
 (2) La fig. 40 comprende soltanto la retta $QP''R$ e l'asse Y , ed e' dunque rappresentabile come ogni sottospazio di uno spazio pluridimensionale, quando tale sottospazio non abbia piu' di tre dimensioni.

Tuttavia ragionando analogamente a quanto si è detto nella situazione tridimensionale (e considerando in questo caso non più superfici sferiche comprendenti ciascuna punti di ugual densità, ma ipersuperfici ipersferiche) si conclude che il punto R corrisponde al caso più probabile e quindi la proiezione di R su Y (o G) è la previsione statistica di z_{yp} (o di G).

5. Il procedimento di Spearman per il calcolo del valore probabile della G di un soggetto

Il modello geometrico è un sussidio prezioso per chiarire il significato dell'operazione di stima della misura più probabile di un fattore o di una variabile. Per effettuare l'operazione di stima è tuttavia necessario porre il problema in termini algebrici.

Si tratta di impostare un'equazione (equazione di regressione multipla) la cui forma generale è¹

$$\tilde{z}_y = \beta_1 z_{x_1} + \beta_2 z_{x_2} + \beta_3 z_{x_3} + \dots + \beta_n z_{x_n}$$

in cui

$z_{x_1}, z_{x_2}, \dots, z_{x_n}$ sono i risultati di un soggetto nei tests x_1, x_2, \dots, x_n espressi in unità standard;

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ sono dei coefficienti (coefficienti di regressione multipla) calcolati in modo da dare ai risultati dei diversi tests un peso proporzionale al contributo di previsione dei singoli tests;

\tilde{z}_y è la stima della variabile dipendente, cioè, per es., la previsione del risultato scolastico o professionale o, nel nostro caso, il valore più probabile del fattore G del soggetto.

I risultati del soggetto nei tests della batteria sono i dati di cui si dispone in partenza; per effettuare la stima bisogna dunque calcolare i coefficienti ponderali $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ (1).

(1) Ricordando che l'equazione di regressione semplice ha la forma

$$\tilde{z}_y = r_{xy} z_x$$

che cioè nel caso più semplice, in cui la stima si fa in base alla misura di una sola variabile (cioè in base al risultato del soggetto in un solo test), il coefficiente ponderale è il coefficiente di correlazione fra le due variabili (cioè, nel nostro caso, il coefficiente di correlazione fra la variabile e il fattore G , $r_{tG} = a_t$), vien fatto di chiedersi come mai nell'equazione di regressione multipla non si usino, come coefficienti ponderali, i coefficienti di correlazione fra ogni singola variabile nota (test) e la variabile la cui misura si intende stimare.

La ragione per cui questa semplice soluzione non sarebbe corretta sta nel fatto che in questo modo si trascurerebbe un dato molto importante, cioè l'intercorrelazione fra le variabili note (cioè tra i tests). L'informazione che ogni singola variabile nota fornisce relativamente a una variabile correlata è certamente tanto maggiore quanto maggiore è la correlazione fra le due variabili, ma è anche tanto più piccola quanto maggiore è la correlazione che lega tale variabile alle altre variabili note utilizzate nella stima. In altre parole, se y è la variabile la cui misura ci si propone di sti-

Il procedimento per calcolare i coefficienti di regressione multipla si trova in ogni testo di statistica. Ma per la particolare applicazione di cui ci stiamo occupando - la stima del fattore G di un soggetto - Spearman ha elaborato uno speciale procedimento, molto piu' semplice e rapido (1).

I coefficienti di regressione multipla si calcolano mediante la formula:

$$\beta_1 = \frac{1}{1 + S} \times \frac{r_{1G}}{1 - r_{1G}^2}$$

in cui

$$S = \sum \frac{r_{iG}^2}{1 - r_{iG}^2}$$

E' conveniente eseguire i calcoli raccogliendo i risultati in una tabella, come nell'esempio di Tabella 24.

Test	r_{1G}	r_{iG}^2	$1 - r_{iG}^2$	$\frac{r_{iG}^2}{1 - r_{iG}^2}$	$\frac{r_{1G}}{1 - r_{iG}^2}$	Coefficienti di regressione $\frac{1}{1 + S} \times \frac{r_{1G}}{1 - r_{iG}^2}$
1	.9	.81	.19	4.263	4.737	.583
2	.77	.59	.41	1.439	1.878	.231
3	.6	.36	.64	.562	.937	.115
4	.53	.28	.72	.389	.736	.091
5	.46	.21	.79	.266	.582	.072
6	.3	.09	.91	.099	.330	.041
7	.25	.06	.94	.064	.266	.033

$$S = \sum \frac{r_{iG}^2}{1 - r_{iG}^2} = 7.082$$

$$\frac{1}{1 + S} = .123$$

Tabella 24.

mare e x_1, x_2, \dots, x_n sono le variabili note, di cui cioe' conosciamo i risultati e li utilizziamo nella stima. L'informazione che ci da' per es. x_2 e' molto importante se r_{x_2y} ha un valore molto elevato (per es. 0.90) e percio' bisognerebbe dare molto peso all'informazione di x_2 , moltiplicando x_2^2 per un coefficiente elevato; se pero' x_2 ha anche una elevata correlazione, per es. con x_1 ($r_{x_1x_2}$ e' cioe' molto elevato, per es. 0.95), l'informazione fornita da x_2 e' praticamente nulla, perche' non fa che ripetere l'informazione fornita da x_1 .

Percio' i coefficienti di regressione multipla, il cui valore dipende non soltanto dalla correlazione della singola variabile nota con la variabile da stimare, ma anche dalle correlazioni con le altre variabili note, richiedono calcoli piuttosto complicati.

(1). Vedi THOMPSON, p. 224.

Utilizziamo, per semplificare i calcoli, i dati della matrice gerarchica fittizia.

Ottenuti i coefficienti di correlazione multipla siamo in grado di stimare il valore più probabile della G di un soggetto.

Per il calcolo ci occorrono i risultati del soggetto nei tests, espressi in unità standard.

Facciamo dunque l'ipotesi che il soggetto L abbia conseguito i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} z_{1L} &= 1.5 & z_{5L} &= .6 \\ z_{2L} &= 2.00 & z_{6L} &= -.5 \\ z_{3L} &= 1.2 & z_{7L} &= 0.00 \\ z_{4L} &= 1.7 \end{aligned}$$

L'equazione di regressione multipla $\beta_{1G}z_{1L} + \beta_{2G}z_{2L} + \dots + \beta_{7G}z_{7L} = \tilde{G}$ sostituendo i dati dei β e degli z

$$\begin{aligned} & (.583) (1.5) + (.231) (2.00) + (.115) (1.2) + (0.91) (1.7) + \\ & + (.072) (.6) + (.041) (-.5) + (0.33) (0.00) \end{aligned}$$

da' come risultato 1.585 che e' la stima (in unità standard) del fattore G del soggetto L .

Dal coefficiente di regressione multipla si ricavano altre interessanti informazioni.

Come si e' detto, la batteria funziona in questo caso come un unico test, di cui i singoli tests sono le componenti elementari o "items"; e i coefficienti di regressione multipla sono calcolati in modo che questo test composito abbia una correlazione massima con la variabile di cui si vuol stimare la misura (il fattore G). Attraverso ai coefficienti di regressione multipla si e' in grado di calcolare tale correlazione (correlazione multipla) e quindi di controllare il vantaggio ottenuto servendosi di tutta la batteria, anziche' del solo test che presentava la massima correlazione con la variabile di cui si intende stimare la misura.

La correlazione multipla si ottiene applicando la seguente formula:

$$R_{y \cdot x_1 x_2 x_3 \dots x_n}^2 = \beta_1 r_{x_1 y} + \beta_2 r_{x_2 y} + \dots + \beta_n r_{x_n y}$$

da cui si ricava:

$$R_{y \cdot x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt{R_{y \cdot x_1 x_2 \dots x_n}^2}$$

cioe' nel caso qui considerato

$$R_{G \cdot x_1 x_2 \dots x_n}^2 = \beta_1 r_{x_1 G} + \beta_2 r_{x_2 G} + \dots + \beta_n r_{x_n G}$$

in cui $r_{x_1 G} = a_{x_1}$

Sostituendo i dati nella precedente formula (1) si ha

$$R_{G.x_1x_2\dots x_n}^2 = (.583)(.9) + (.231)(.77) + (.115)(.6) + \\ + (.091)(.53) + (.072)(.46) + (.041)(.3) + (.033)(.25) = .873470$$

$$R_{G.x_1x_2\dots x_n} = \sqrt{.873470} = .9346$$

che confrontato con la correlazione .9 del test piu' saturo di G della batteria, ci da' la misura del vantaggio - a dire il vero molto modesto - ottenuto calcolando la correlazione multipla.

(1) $R_{G.x_1x_2\dots x_n}^2$ si puo' calcolare facilmente tenendo conto che

$$R_{G.x_1x_2\dots x_n}^2 = \sum_{i=1}^n \beta_i r_{iG} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{1+S} \cdot \frac{r_{iG}}{1-r_{iG}^2} r_{iG} \right]$$

poiche' $\beta_i = \frac{1}{1+S} \cdot \frac{r_{iG}}{1-r_{iG}^2}$, estraendo il coefficiente $\frac{1}{1+S}$ dalla sommatoria si ha

$$R_{G.x_1x_2\dots x_n}^2 = \frac{1}{1+S} \sum_{i=1}^n \left[\frac{r_{iG}}{1-r_{iG}^2} r_{iG} \right] = \frac{1}{1+S} \sum_{i=1}^n \frac{r_{iG}^2}{1-r_{iG}^2}$$

ma $\sum_{i=1}^n \frac{r_{iG}^2}{1-r_{iG}^2} = S$ e quindi $R_{G.x_1x_2\dots x_n}^2 = \frac{S}{1+S}$.

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.

DALLA TEORIA DEI DUE FATTORI AI METODI PLURIFATTORIALI

Capitolo I

1. I fattori di gruppo

Dal punto di vista della teoria fattoriale di Spearman che, come e' stato dimostrato, si fonda sull'annullamento delle differenze tetradiche, l'unica eccezione ammissibile all'annullamento delle tetradi e' la correlazione specifica: il fatto che la correlazione fra due tests non sia dovuta soltanto al fattore G ma anche ai due fattori S (che in questo caso non sono indipendenti). Tale eccezione e' dunque da attribuire all'errore di aver introdotto nella batteria due tests simili anche nelle loro caratteristiche esteriori.

Ma coll'estendersi dell'esperienza fattoriale risulterebbe non soltanto che le batterie di tests per le quali non si verificava l'annullamento delle tetradi erano troppo comuni per poter essere considerate delle eccezioni, ma anche che tali eccezioni avevano un carattere diverso da quello previsto. Non si trattava cioe' soltanto di coppie di tests particolarmente simili tra loro, e di cui uno doveva venir eliminato per ripristinare la gerarchia, ma di gruppi di tests che presentavano tra loro una correlazione aumentata rispetto agli altri tests della batteria. Tali tests non apparivano inoltre particolarmente simili tra loro, ma la loro affinita' consisteva soltanto nell'aver essi una caratteristica comune, assente negli altri tests della batteria. Cosi' ad esempio, in una batteria in cui una parte dei tests sono espressi in termini verbali mentre gli altri non si servono di parole, i tests verbali risultano piu' correlati fra loro che con gli altri tests della batteria. Tale ipercorrelazione sembra dunque dovuta al fatto che i tests di questo gruppo, a differenza degli altri tests della batteria, fanno uso delle parole per esprimere il compito posto ai soggetti. Ma e' evidente che non si tratta di una caratteristica specifica nel senso in cui finora si era parlato di fattore specifico.

Si e' detto infatti che i fattori specifici risultano del tutto

privi di interesse in quanto, in primo luogo sono innumerevoli, e in secondo luogo ognuno di essi, essendo *specifico di un particolare test* puo' servire soltanto a prevedere il rendimento di un soggetto in quel determinato test (1). Ma e' ben diverso l'interesse che presentano invece le variabili, alle quali si e' accennato in precedenza, comuni a tutto un *gruppo* di tests. Spearman stesso si vide costretto a dar loro una posizione particolare; nelle piu' recenti formulazioni della sua teoria egli parla oltre che del fattore generale e dei fattori specifici, di *fattori di gruppo*, verbale, numerico, spaziale (V, N, S) i quali rappresentavano delle attitudini piu' specializzate, e comunque molto meno importanti del fattore G.

In seguito a questa estensione della teoria dei due fattori le saturazioni relative ai fattori di gruppo venivano estratte dalle correlazioni residue, dopo l'estrazione delle saturazioni relative al fattore generale, e risultavano in genere di entita' limitata. Per Spearman, i fattori di gruppo rappresentavano, infatti, delle eccezioni che avevano l'obbligo di dimostrare il loro diritto all'esistenza.

Di fronte alla constatazione di un'eccezione alla regola dell'annullamento delle tetradi si presentavano dunque due vie da seguire: la prima, espressione di un punto di vista conservatore, consisteva nell'eliminare uno dei due tests "indebitamente simili" e responsabili quindi di una correlazione troppo elevata che rompeva l'equilibrio di una tetrade; si apriva pero' anche una strada piu' fruttuosa che consisteva nello studiare la variabile di disturbo, nel misurarla, cioe' nel non trattarla come una variabile di disturbo, ma come un fattore nuovo, destinato ad arricchire la nostra conoscenza delle variabili psicologiche.

Partendo dalla teoria dei due fattori di Spearman, si poteva dunque mettere in evidenza un fattore di gruppo procedendo nel modo seguente.

Una tetrade che presentava una differenza tetradica statisticamente significativa (e quindi non nulla) in quanto due dei quattro tests presentavano una correlazione particolarmente alta, costituiva il punto di partenza per un'ipotesi, relativa alla natura del legame fra i due tests, ipotesi che veniva controllata costruendo una speciale batteria. Ma lo stesso metodo vale anche se anziche' partire dalla constatazione di un'eccezione all'annullamento delle tetradi, si parte direttamente da un'ipotesi suggerita da ragioni teoriche: l'ipotesi dell'esistenza di un particolare fattore di gruppo.

(1) Il che, come osserva Thompson, e' inutile perche' conosciamo gia' il risultato del soggetto nel test.

2. Controllo dell'ipotesi della presenza di un fattore di gruppo

Riprendendo il nostro esempio, se in una differenza tetradica non nulla, due tests, che risultano fortemente correlati, si differenziano dagli altri in quanto fanno appello ambedue all'espressione verbale, si presenta naturalmente l'ipotesi che in questo caso la correlazione fra i due tests sia dovuta, oltre che alla presenza del fattore G, anche ad un altro fattore, presente in quei due tests e assente negli altri due tests della tetrade, e che questo fattore consista appunto nell'abilita' ad esprimersi verbalmente ed a comprendere le espressioni verbali.

Questa ipotesi (che d'altra parte, come si e' detto, poteva sorgere anche indipendentemente dalla constatazione di una correlazione particolarmente elevata, responsabile della non-nullita' di una tetrade) viene controllata nel modo seguente.

Si costruisce una batteria formata per meta' di tests verbali, e per l'altra meta' di tests non verbali tali da soddisfare alla condizione dell'annullamento delle differenze tetradiche, e sulla base dei risultati ottenuti applicando la batteria su un campione sufficientemente numeroso di soggetti, si calcolano le intercorrelazioni tra i tests e si ordinano i coefficienti di correlazione in una matrice a quattro quadranti come quella di tab. 26.

Una matrice di questa struttura serve allo scopo di mettere in evidenza le tetradi critiche, quelle che dimostrano la presenza di un eventuale fattore di gruppo.

Va notato che la presenza di un fattore di gruppo nei tests non determina necessariamente la non-nullita' delle tetradi che fanno capo a tali tests.

Consideriamo infatti una delle tetradi costituita dalle correlazioni, tra quattro tests verbali che chiameremo k_1, k_2, k_3, k_4 , per es. quella racchiusa in un rettangolo in tab. 25.

	k_1	k_2	k_3	k_4
k_1		r_{12}	r_{13}	r_{14}
k_2	r_{21}		r_{23}	r_{24}
k_3	r_{31}	r_{32}		r_{34}
k_4	r_{41}	r_{42}	r_{43}	

Tabella 25.

Ammettiamo che tali tests oltre ad avere in comune il fattore G abbiano in comune anche il fattore di gruppo V, e che quindi i coefficienti siano piu' elevati di quanto sarebbero stati per azione del so-

(1) Thomson p. e seguenti

lo fattore G. Non ne deriva tuttavia che la differenza tetradica $r_{13}r_{24} - r_{14}r_{23}$ debba avere necessariamente un valore significativamente diverso da zero. Essendo infatti tutte e quattro le correlazioni aumentate per azione del fattore di gruppo V, e' possibile che la differenza tetradica risulti approssimativamente nulla.

Le tetradi rivelatrici sono quelle in cui uno solo dei due termini della differenza tetradica viene aumentato per effetto della correlazione dovuta a un fattore di gruppo.

Nella

[Consideriamo la) matrice delle correlazioni relative alla batteria costituita per meta' di tests verbali e per meta' di tests non-verbali, I coefficienti di correlazione sono disposti in modo che la matrice risulti divisa in quattro quadranti: nel primo quadrante (A) sono le intercorrelazioni fra i tests che si ritiene possano essere saturati da un fattore di gruppo (che aumenta le intercorrelazioni); il secondo e il terzo quadrante (B, C) comprendono le intercorrelazioni dei tests suddetti con i tests privi di fattori di gruppo; nel quarto quadrante (D) sono comprese le intercorrelazioni fra i tests privi di fattore di gruppo (tab. 26).

Abbiamo gia' veduto che le tetradi formate con quattro termini del I quadrante (termini che sono tutti del tipo $r_{k_x k_y}$) non possono essere considerate sufficientemente indicative della presenza di un fattore di gruppo. Ovviamente non possono essere usate a tale scopo le tetradi del IV quadrante, che comprende soltanto correlazioni del tipo $r_{i_x i_y}$, cioe' fra quei tests che sono stati introdotti nella batteria in quanto non contengono fattori di gruppo, ma corrispondono al criterio dell'annullamento delle tetradi. Tali tetradi possono tutt' al piu' servire per controllo, per stabilire, cioe' se i relativi tests corrispondono realmente al criterio in base al quale sono stati scelti. Neppure le tetradi del II e del III quadrante (1) che comprendono soltanto correlazioni del tipo r_{k_i} , sono indicative dell' eventuale presenza di un fattore di gruppo nei tests K, poiche' la correlazione fra un test saturato da un fattore di gruppo e un test privo di tale fattore non possono dipendere che dal fattore G, comune agli uni e agli altri tests. Quindi anche in questo caso le differenze tetradiche tenderanno ad annullarsi, indipendentemente dall' eventuale presenza di un fattore di gruppo.

Le sole tetradi veramente indicative sono quelle i cui quattro coefficienti di correlazione appartengono a quattro diversi quadranti,

(1) I coefficienti di correlazione compresi nel II quadrante sono uguali a quelli compresi nel III quadrante.

		Gruppi									
		k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5
k_1			$\Gamma_{k_1k_2}$	$\Gamma_{k_1k_3}$	$\Gamma_{k_1k_4}$	$\Gamma_{k_1k_5}$	$\Gamma_{k_{111}}$	$\Gamma_{k_{112}}$	$\Gamma_{k_{113}}$	$\Gamma_{k_{114}}$	$\Gamma_{k_{115}}$
k_2		$\Gamma_{k_2k_1}$		$\Gamma_{k_2k_3}$	$\Gamma_{k_2k_4}$	$\Gamma_{k_2k_5}$	$\Gamma_{k_{211}}$	$\Gamma_{k_{212}}$	$\Gamma_{k_{213}}$	$\Gamma_{k_{214}}$	$\Gamma_{k_{215}}$
k_3		$\Gamma_{k_3k_1}$	$\Gamma_{k_3k_2}$		$\Gamma_{k_3k_4}$	$\Gamma_{k_3k_5}$	$\Gamma_{k_{311}}$	$\Gamma_{k_{312}}$	$\Gamma_{k_{313}}$	$\Gamma_{k_{314}}$	$\Gamma_{k_{315}}$
k_4		$\Gamma_{k_4k_1}$	$\Gamma_{k_4k_2}$	$\Gamma_{k_4k_3}$		$\Gamma_{k_4k_5}$	$\Gamma_{k_{411}}$	$\Gamma_{k_{412}}$	$\Gamma_{k_{413}}$	$\Gamma_{k_{414}}$	$\Gamma_{k_{415}}$
k_5		$\Gamma_{k_5k_1}$	$\Gamma_{k_5k_2}$	$\Gamma_{k_5k_3}$	$\Gamma_{k_5k_4}$		$\Gamma_{k_{511}}$	$\Gamma_{k_{512}}$	$\Gamma_{k_{513}}$	$\Gamma_{k_{514}}$	$\Gamma_{k_{515}}$
i_1		$\Gamma_{i_1k_1}$	$\Gamma_{i_1k_2}$	$\Gamma_{i_1k_3}$	$\Gamma_{i_1k_4}$	$\Gamma_{i_1k_5}$	$\Gamma_{i_{111}}$	$\Gamma_{i_{112}}$	$\Gamma_{i_{113}}$	$\Gamma_{i_{114}}$	$\Gamma_{i_{115}}$
i_2		$\Gamma_{i_2k_1}$	$\Gamma_{i_2k_2}$	$\Gamma_{i_2k_3}$	$\Gamma_{i_2k_4}$	$\Gamma_{i_2k_5}$	$\Gamma_{i_{211}}$	$\Gamma_{i_{212}}$	$\Gamma_{i_{213}}$	$\Gamma_{i_{214}}$	$\Gamma_{i_{215}}$
i_3		$\Gamma_{i_3k_1}$	$\Gamma_{i_3k_2}$	$\Gamma_{i_3k_3}$	$\Gamma_{i_3k_4}$	$\Gamma_{i_3k_5}$	$\Gamma_{i_{311}}$	$\Gamma_{i_{312}}$		$\Gamma_{i_{314}}$	$\Gamma_{i_{315}}$
i_4		$\Gamma_{i_4k_1}$	$\Gamma_{i_4k_2}$	$\Gamma_{i_4k_3}$	$\Gamma_{i_4k_4}$	$\Gamma_{i_4k_5}$	$\Gamma_{i_{411}}$	$\Gamma_{i_{412}}$	$\Gamma_{i_{413}}$		$\Gamma_{i_{415}}$
i_5		$\Gamma_{i_5k_1}$	$\Gamma_{i_5k_2}$	$\Gamma_{i_5k_3}$	$\Gamma_{i_5k_4}$	$\Gamma_{i_5k_5}$	$\Gamma_{i_{511}}$	$\Gamma_{i_{512}}$	$\Gamma_{i_{513}}$	$\Gamma_{i_{514}}$	

k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 tests verbali (Fattori G, V, S)
 i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 tests non verbali (Fattori G, S)

Tabella 26.

cioe' le tetradi del tipo $r_{kk} r_{ki}$ (1) nelle quali solo il coefficiente di correlazione del I quadrante, cioe' r_{kk} e' rinforzato se nei tests k c' e' un fattore di gruppo. In tal caso infatti nella differenza tetradica $r_{kk}r_{ii} - r_{ki}r_{ik}$ il primo termine risultera' maggiore del secondo e pertanto la differenza fra i due dovrebbe risultare significativamente diversa da zero (2).

Dato pero' che, come si e' detto, per gli errori casuali di campionatura dei coefficienti di correlazione, le differenze tetradiche, anche se si annullano nella popolazione, assumono valori diversi da zero nel campione, si deve ricorrere ad un criterio per stabilire quando differenze tetradiche diverse da zero debbono essere considerate significative, cioe' dovute non ad errori di campionatura, ma al fatto che le correlazioni *non* sono dovute esclusivamente al fattore G.

Tale criterio si fonda sull'errore tipo della differenza tetradica (3) che si utilizza come tutti gli errori-tipo, e permette di calcolare la probabilita' che una determinata differenza tetradica sia dovuta ad errore di campionatura (4).

Disponendo di parecchie differenze tetradiche (5) indicative - quando cioe' si e' sperimentato con una batteria abbastanza numerosa - conviene utilizzare un'altra formula (6), la quale consente di confron-

(1) Così' ad esempio la tetrade

$$r_{k_1 k_2} r_{k_1 i_2} \quad \text{oppure} \quad r_{k_3 k_4} r_{k_3 i_2}$$

$$r_{i_3 k_2} r_{i_3 i_2} \quad r_{i_1 k_4} r_{i_1 i_2}$$

o ancora

$$r_{k_3 k_4} r_{k_4 i_3} \quad \text{ecc.}$$

$$r_{i_4 k_3} r_{i_4 i_3}$$

(2) Per brevità' abbiamo tralasciato di considerare le tetradi del tipo $r_{kk} r_{ki}$ (che hanno due correlazioni comprese nel I quadrante e due nel II):

$r_{kk} r_{ki}$
neppure queste sono indicative della presenza di un fattore di gruppo, in quanto, nella differenza tetradica che assume la forma $r_{kk}r_{ki} - r_{ki}r_{kk}$, i due coefficienti di correlazione r_{kk} rinforzati dalla presenza del fattore di gruppo si trovano uno nel I termine e uno nel II termine e quindi la differenza tetradica non e', in genere, significativamente diversa da zero.

(3) Errore tipo di $r_{13}r_{24} - r_{23}r_{14} = \frac{1}{\sqrt{n}} [r_{13}^2 + r_{14}^2 + r_{23}^2 + r_{24}^2 - 2(r_{12}r_{13}r_{23} + r_{12}r_{14}r_{24} + r_{13}r_{14}r_{34} + r_{23}r_{24}r_{34}) + 4r_{13}r_{14}r_{23}r_{24}]$ (Spearman-Holzinger, 1924).

L'aver trovato l'errore tipo della differenza tetradica e' stato considerato da Spearman un evento decisivo per lo sviluppo della teoria dei due fattori.

(4) Tale probabilita' si ottiene dividendo la differenza tetradica per l'errore tipo della differenza tetradica ed utilizzando, al solito, le tavole della distribuzione normale.

(5) Il numero delle differenze tetradiche cresce rapidamente col crescere dei tests della batteria. Con 10 tests ci sono ben 630 differenze tetradiche.

(6) Vedi SPEARMAN, *loc. cit.*, formula 16 A.

Controllare

WALL 7-11-12

tare direttamente la curva di distribuzione delle differenze tetradiche con una curva normale con media zero.

3. Estensione delle equazioni fondamentali ai fattori di gruppo

Dimostrata la presenza di un fattore di gruppo, si passa a calcolare le saturazioni dei tests nel fattore G e nel fattore di gruppo, cioè a compiere l'analisi fattoriale della batteria di tests. Ma per giustificare le necessarie modificazioni al procedimento di analisi basato sulla teoria dei due fattori, dobbiamo innanzitutto riprendere in esame le equazioni fondamentali.

Quando si ammette la possibilità che sussista un fattore di gruppo oltre ai fattori G ed S , l'equazione di specificazione di un test diventa

$$z_{tp} = a_t G_p + b_t \Delta_p + u_t S_{tp} + e_t E_p$$

in cui Δ è un fattore di gruppo (e può essere il fattore verbale V , o il fattore numerico N o un qualsiasi altro fattore di gruppo) e b_t è il coefficiente di saturazione del predetto fattore di gruppo nel test t .

Resta stabilito che mentre $a_t \neq 0$ e $u_t \neq 0$, b_t può essere uguale a zero.

Procedendo come nel Cap. II, § 3, e cioè

a) sostituendo la nuova equazione di specificazione nella formula della varianza si ottiene una nuova espressione per la varianza

$$\sigma_{z_t}^2 = a_t^2 + b_t^2 + u_t^2 + e_t^2 = 1.$$

b) Sostituendo la nuova equazione di specificazione nella formula del coefficiente di correlazione (in unità standard) si ottiene una nuova espressione della correlazione in termini fattoriali:

$$r_{xy} = a_x a_y + b_x b_y$$

c) Sostituendo la nuova equazione di specificazione nella formula che esprime la correlazione fra un test e il fattore di gruppo, si ottiene l'espressione

$$r_{t\Delta} = b_t$$

mentre rimangono invariate le espressioni

$$r_{tG} = a_t \quad e \quad r_{tS_t} = u_t.$$

*ad una matrice contenente*4. Estensione del procedimento di analisi *[di una matrice gerarchica]* ai fattori di gruppo

Possiamo quindi procedere all'analisi della batteria.

Riprendiamo in esame la matrice di tab. 26 divisa nelle quattro submatrici A, B, C, D. Verificata l'ipotesi della presenza del fattore di gruppo nei tests k , ne consegue che i coefficienti di correlazione che costituiscono gli elementi della submatrice A sono dovuti ai fattori G e Δ che i tests hanno in comune, mentre i coefficienti di correlazione compresi nelle tre submatrici B, C, D dipendono soltanto dal fattore G (1). Infatti, le intercorrelazioni fra i tests appartenenti ai due diversi gruppi, verbali e non verbali, compresi nelle matrici B e C, dipendono soltanto dalla presenza di G in tutti i tests; e altrettanto vale per il gruppo di tests non-verbali scelto in modo da comprendere soltanto tests che in analisi precedenti risultavano saturati soltanto da G ed S.

La submatrice D viene quindi utilizzata per determinare, con uno dei metodi precedentemente descritti, le saturazioni in G dei tests non verbali. Per es.:

$$r_{11i_2} r_{11i_3} = a_{i_1}^2 r_{i_2i_3}$$

$$r_{11i_2} r_{11i_4} = a_{i_1}^2 r_{i_2i_4}$$

$$r_{11i_2} r_{11i_5} = a_{i_1}^2 r_{i_2i_5}$$

$$r_{11i_3} r_{11i_4} = a_{i_1}^2 r_{i_3i_4}$$

$$r_{11i_3} r_{11i_5} = a_{i_1}^2 r_{i_3i_5}$$

$$r_{11i_4} r_{11i_5} = a_{i_1}^2 r_{i_4i_5}$$

da cui

$$a_{i_1} = \sqrt{\frac{r_{11i_2}r_{11i_3} + r_{11i_2}r_{11i_4} + r_{11i_2}r_{11i_5} + r_{11i_3}r_{11i_4} + r_{11i_3}r_{11i_5} + r_{11i_4}r_{11i_5}}{r_{i_2i_3} + r_{i_2i_4} + r_{i_2i_5} + r_{i_3i_4} + r_{i_3i_5} + r_{i_4i_5}}}$$

Calcolati in tal modo i coefficienti di saturazione a_{i_1} , a_{i_2} , a_{i_3} , a_{i_4} ed a_{i_5} si passa a calcolare le saturazioni in G dei tests verbali, cioè a_{k_1} , a_{k_2} , a_{k_3} , a_{k_4} , a_{k_5} , procedendo nel modo seguente.

Siccome le correlazioni tra tests verbali e non-verbali dipendono

(1) S'intende che l'affermazione e' valida solo se vale l'ipotesi che soltanto i tests k contengono un fattore di gruppo.

soltanto dal fattore G, avremo $r_{ixky} = a_{ix} a_{ky}$ (1). Ed essendo ormai noti gli a_i , si possono calcolare gli a_k :

$$a_{ky} = \frac{r_{ixky}}{a_{ix}}$$

Per compensare gli errori di campionatura si procede, al solito, utilizzando tutti i dati a disposizione per calcolare ogni singola saturazione a_{k1} , cioè

$$r_{i_1 k_1} = a_{i_1} a_{k_1}$$

$$r_{i_2 k_1} = a_{i_2} a_{k_1}$$

$$r_{i_3 k_1} = a_{i_3} a_{k_1}$$

$$r_{i_4 k_1} = a_{i_4} a_{k_1}$$

$$r_{i_5 k_1} = a_{i_5} a_{k_1}$$

Sommando le equazioni otteniamo

$$r_{i_1 k_1} + r_{i_2 k_1} + r_{i_3 k_1} + r_{i_4 k_1} + r_{i_5 k_1} = a_{k_1} (a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} + a_{i_4} + a_{i_5})$$

$$a_{k_1} = \frac{r_{i_1 k_1} + r_{i_2 k_1} + r_{i_3 k_1} + r_{i_4 k_1} + r_{i_5 k_1}}{a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} + a_{i_4} + a_{i_5}}$$

Calcolati nello stesso modo anche a_{k_2} , a_{k_3} , a_{k_4} , e a_{k_5} si procede, col noto metodo, all'estrazione della saturazione nel fattore G, ed al calcolo dei residui. Si costruisce a tale scopo una matrice dello stesso ordine della matrice delle correlazioni, intestando righe e colonne con le saturazioni a_k ed a_i dei singoli tests nel fattore G ed eseguendo le moltiplicazioni. Gli elementi della matrice così ottenuta (tab. 27) rappresentano le quote di correlazione dovute alle saturazioni dei tests nel fattore G.

Sottraendo, elemento per elemento, questa matrice dalla matrice delle correlazioni si ottiene una matrice di residui (tab. 28). In questa matrice le submatrici B, C, D saranno vuote o conterranno dei residui non significativi dovuti agli errori di campionatura, mentre la sub-

(1) Abbiamo detto precedentemente che la formula del coefficiente di correlazione in termini fattoriali è $r_{xy} = a_x a_y + b_x b_y$ quando è presente un fattore di gruppo. Nel caso qui considerato il fattore di gruppo è presente soltanto in uno dei due tests, il che equivale a dire che nell'equazione di specificazione fattoriale $z_{tp} = a_t G_p + b_t \Delta_p + u_t S_{tp}$ di uno dei due tests $b_t > 0$, mentre nell'equazione di specificazione del secondo test $b_t = 0$. Se ammettiamo che il primo sia il test x, e il secondo il test y, allora $r_{xy} = a_x a_y + b_x b_y$, essendo $b_y = 0$, si riduce a $r_{xy} = a_x a_y$.

MATRICE DELLE QUOTE DI CORRELAZIONE DOVUTE AL FATTORE G

	a_{k1}	a_{k2}	a_{k3}	a_{k4}	a_{k5}	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}
a_{k1}		$a_{k1}a_{k2}$	$a_{k1}a_{k3}$	$a_{k1}a_{k4}$	$a_{k1}a_{k5}$	$a_{k1}a_{i1}$	$a_{k1}a_{i2}$	$a_{k1}a_{i3}$	$a_{k1}a_{i4}$	$a_{k1}a_{i5}$
a_{k2}			$a_{k2}a_{k3}$	$a_{k2}a_{k4}$	$a_{k2}a_{k5}$	$a_{k2}a_{i1}$	$a_{k2}a_{i2}$	$a_{k2}a_{i3}$	$a_{k2}a_{i4}$	$a_{k2}a_{i5}$
a_{k3}				$a_{k3}a_{k4}$	$a_{k3}a_{k5}$	$a_{k3}a_{i1}$	$a_{k3}a_{i2}$	$a_{k3}a_{i3}$	$a_{k3}a_{i4}$	$a_{k3}a_{i5}$
a_{k4}					$a_{k4}a_{k5}$	$a_{k4}a_{i1}$	$a_{k4}a_{i2}$	$a_{k4}a_{i3}$	$a_{k4}a_{i4}$	$a_{k4}a_{i5}$
a_{k5}						$a_{k5}a_{i1}$	$a_{k5}a_{i2}$	$a_{k5}a_{i3}$	$a_{k5}a_{i4}$	$a_{k5}a_{i5}$
a_{i1}		$a_{i1}a_{k2}$	$a_{i1}a_{k3}$	$a_{i1}a_{k4}$	$a_{i1}a_{k5}$		$a_{i1}a_{i2}$	$a_{i1}a_{i3}$	$a_{i1}a_{i4}$	$a_{i1}a_{i5}$
a_{i2}			$a_{i2}a_{k3}$	$a_{i2}a_{k4}$	$a_{i2}a_{k5}$			$a_{i2}a_{i3}$	$a_{i2}a_{i4}$	$a_{i2}a_{i5}$
a_{i3}				$a_{i3}a_{k4}$	$a_{i3}a_{k5}$		$a_{i3}a_{i2}$		$a_{i3}a_{i4}$	$a_{i3}a_{i5}$
a_{i4}					$a_{i4}a_{k5}$		$a_{i4}a_{i2}$	$a_{i4}a_{i3}$		$a_{i4}a_{i5}$
a_{i5}							$a_{i5}a_{i2}$	$a_{i5}a_{i3}$	$a_{i5}a_{i4}$	

Tabella 27.

MATRICE DEI RESIDUI

re = correlazione residua

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5
k_1		$re_{k_1k_2}$	$re_{k_1k_3}$	$re_{k_1k_4}$	$re_{k_1k_5}$	$re_{k_{11}}$	$re_{k_{12}}$	$re_{k_{13}}$	$re_{k_{14}}$	$re_{k_{15}}$
k_2	$re_{k_2k_1}$		$re_{k_2k_3}$	$re_{k_2k_4}$	$re_{k_2k_5}$	$re_{k_{21}}$	$re_{k_{22}}$	$re_{k_{23}}$	$re_{k_{24}}$	$re_{k_{25}}$
k_3	$re_{k_3k_1}$	$re_{k_3k_2}$		$re_{k_3k_4}$	$re_{k_3k_5}$	$re_{k_{31}}$	$re_{k_{32}}$	$re_{k_{33}}$	$re_{k_{34}}$	$re_{k_{35}}$
k_4	$re_{k_4k_1}$	$re_{k_4k_2}$	$re_{k_4k_3}$		$re_{k_4k_5}$	$re_{k_{41}}$	$re_{k_{42}}$	$re_{k_{43}}$	$re_{k_{44}}$	$re_{k_{45}}$
k_5	$re_{k_5k_1}$	$re_{k_5k_2}$	$re_{k_5k_3}$	$re_{k_5k_4}$		$re_{k_{51}}$	$re_{k_{52}}$	$re_{k_{53}}$	$re_{k_{54}}$	$re_{k_{55}}$
i_1	$re_{i_1k_1}$	$re_{i_1k_2}$	$re_{i_1k_3}$	$re_{i_1k_4}$	$re_{i_1k_5}$		$re_{i_{12}}$	$re_{i_{13}}$	$re_{i_{14}}$	$re_{i_{15}}$
i_2	$re_{i_2k_1}$		$re_{i_2k_3}$	$re_{i_2k_4}$	$re_{i_2k_5}$	$re_{i_{21}}$		$re_{i_{23}}$	$re_{i_{24}}$	$re_{i_{25}}$
i_3	$re_{i_3k_1}$	$re_{i_3k_2}$		$re_{i_3k_4}$	$re_{i_3k_5}$	$re_{i_{31}}$	$re_{i_{32}}$		$re_{i_{34}}$	$re_{i_{35}}$
i_4	$re_{i_4k_1}$	$re_{i_4k_2}$	$re_{i_4k_3}$		$re_{i_4k_5}$	$re_{i_{41}}$	$re_{i_{42}}$	$re_{i_{43}}$		$re_{i_{45}}$
i_5	$re_{i_5k_1}$	$re_{i_5k_2}$	$re_{i_5k_3}$	$re_{i_5k_4}$		$re_{i_{51}}$	$re_{i_{52}}$	$re_{i_{53}}$	$re_{i_{54}}$	

Tabella 28.

re = residua

ce A conterra' le quote di correlazione dovute al fattore verbale (1).

Poiche' le quote di correlazione residuali sono dovute ad un solo fattore, cioe' al fattore di gruppo, la submatrice A sara' una matrice gerarchica (entro i limiti dell'errore di campionatura) e percio' il calcolo delle saturazioni si compie come per le saturazioni nel fattore G .

In questo caso la formula e'

$$re_{xy} = b_x b_y$$

si procede come per il calcolo di a_i

$$re_{k_1 k_2} re_{k_1 k_3} = b_{k_1}^2 re_{k_2 k_3}$$

da cui

$$b_{k_1} = \sqrt{\frac{re_{k_1 k_2} re_{k_1 k_3}}{re_{k_2 k_3}}}$$

$$re_{k_1 k_2} re_{k_1 k_4} = b_{k_1}^2 re_{k_2 k_4} \text{ ecc.}$$

da cui sommando

$$b_{k_1} = \sqrt{\frac{re_{k_1 k_2} re_{k_1 k_3} + re_{k_1 k_2} re_{k_1 k_4} + re_{k_1 k_2} re_{k_1 k_5} + \dots}{re_{k_2 k_3} + re_{k_2 k_4} + re_{k_2 k_5}}}$$

Calcolata la matrice delle quote di correlazione dovute al fattore di gruppo (tab. 29), la si sottrae dalla matrice dei residui. Il risultato della sottrazione e' la seconda matrice dei residui, che in questo caso deve essere vuota oppure contenere soltanto residui non significativi, dovuti all'errore di campionatura.

La matrice fattoriale che rappresenta il risultato dell'analisi e' costituita da due colonne di fattori comuni (fattore generale e fattore di gruppo) e tante colonne relative ai fattori specifici quanti sono i tests (tab. 30).

La matrice delle varianze, che si ricava dalla matrice fattoriale, mette in evidenza le quote di varianza dovute ai diversi fattori (tab. 31).

(1) L'operazione di calcolo dei residui si fonda sull'equazione della correlazione: $r_{xy} - a_x a_y = b_x b_y$.

comprendenti le saturazioni dei tests nei fattori comuni

MATRICE DELLE QUOTE DI CORRELAZIONE DOVUTE AL FATTORE DI GRUPPO

		k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
:		b_{k_1}	b_{k_2}	b_{k_3}	b_{k_4}	b_{k_5}
k_1	b_{k_1}		$b_{k_1} b_{k_2}$	$b_{k_1} b_{k_3}$	$b_{k_1} b_{k_4}$	$b_{k_1} b_{k_5}$
k_2	b_{k_2}	$b_{k_2} b_{k_1}$		$b_{k_2} b_{k_3}$	$b_{k_2} b_{k_4}$	$b_{k_2} b_{k_5}$
k_3	b_{k_3}	$b_{k_3} b_{k_1}$	$b_{k_3} b_{k_2}$		$b_{k_3} b_{k_4}$	$b_{k_3} b_{k_5}$
k_4	b_{k_4}	$b_{k_4} b_{k_1}$	$b_{k_4} b_{k_2}$	$b_{k_4} b_{k_3}$		$b_{k_4} b_{k_5}$
k_5	b_{k_5}	$b_{k_5} b_{k_1}$	$b_{k_5} b_{k_2}$	$b_{k_5} b_{k_3}$	$b_{k_5} b_{k_4}$	

Tabella 29.

*gruppi
colle i sat.
a falloni*

MATRICE FATTORIALE COMPLETA

G			S_{k_1}	S_{k_2}	S_{k_3}	S_{k_4}	S_{k_5}	S_{i_1}	S_{i_2}	S_{i_3}	S_{i_4}	S_{i_5}
k_1	a_{k_1}	b_{k_1}	u_{k_1}	-	-	-	-	-	-	-	-	-
k_2	a_{k_2}	b_{k_2}	-	u_{k_2}	-	-	-	-	-	-	-	-
k_3	a_{k_3}	b_{k_3}	-	-	u_{k_3}	-	-	-	-	-	-	-
k_4	a_{k_4}	b_{k_4}	-	-	-	u_{k_4}	-	-	-	-	-	-
k_5	a_{k_5}	b_{k_5}	-	-	-	-	u_{k_5}	-	-	-	-	-
i_1	a_{i_1}	-	-	-	-	-	-	u_{i_1}	-	-	-	-
i_2	a_{i_2}	-	-	-	-	-	-	-	u_{i_2}	-	-	-
i_3	a_{i_3}	-	-	-	-	-	-	-	-	u_{i_3}	-	-
i_4	a_{i_4}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	u_{i_4}	-
i_5	a_{i_5}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	u_{i_5}

Tabella 30.

MATRICE DELLE VARIANZE

Tests	Quote di varianza dovute ai diversi fattori				Somma
	<i>quote di varianza nei fattori</i> G	V	Varianza comune (comunanza)	S	
k_1	$a_{k_1}^2$	$b_{k_1}^2$	$a_{k_1}^2 + b_{k_1}^2$	$u_{k_1}^2$	1.000
k_2	$a_{k_2}^2$	$b_{k_2}^2$	$a_{k_2}^2 + b_{k_2}^2$	$u_{k_2}^2$	1.000
k_3	$a_{k_3}^2$	$b_{k_3}^2$	$a_{k_3}^2 + b_{k_3}^2$	$u_{k_3}^2$	1.000
k_4	$a_{k_4}^2$	$b_{k_4}^2$	$a_{k_4}^2 + b_{k_4}^2$	$u_{k_4}^2$	1.000
k_5	$a_{k_5}^2$	$b_{k_5}^2$	$a_{k_5}^2 + b_{k_5}^2$	$u_{k_5}^2$	1.000
i_1	$a_{i_1}^2$	-	$a_{i_1}^2$	$u_{i_1}^2$	1.000
i_2	$a_{i_2}^2$	-	$a_{i_2}^2$	$u_{i_2}^2$	1.000
i_3	$a_{i_3}^2$	-	$a_{i_3}^2$	$u_{i_3}^2$	1.000
i_4	$a_{i_4}^2$	-	$a_{i_4}^2$	$u_{i_4}^2$	1.000
i_5	$a_{i_5}^2$	-	$a_{i_5}^2$	$u_{i_5}^2$	1.000

Tabella 31.

5. Estrazione dei fattori generale e di gruppo da una matrice priva di errori di campionatura.

Ci limiteremo qui (1) a dare un esempio relativo ad una matrice di correlazione priva di campionatura (2) che consente di semplificare al massimo i calcoli (tab. 32).

La submatrice D che comprende le intercorrelazioni fra i tests privi di fattori di gruppo e' esattamente gerarchica. Basta perciò un

(1) La tecnica di analisi dei tests di una batteria in un fattore generale ed uno o piu' fattori di gruppo (tecnica bifattoriale), sara' presentata in tutti i particolari in un capitolo successivo.

(2) Le correlazioni sono state ottenute partendo da un modello di matrice bifattoriale, e moltiplicando la matrice fattoriale con la sua trasposta (vedi il capitolo seguente).

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5		
k_1		82	66	42	22	72	63	54	45	27		
k_2	82		78	47	26	64	56	48	40	24		
k_3	66	78		42	24	48	42	36	30	18		
k_4	42	47	42		14	32	28	24	20	12		
k_5	22	26	24	14		16	14	12	10	06		
i_1	72	64	48	32	16		56	48	40	24		A
i_2	63	56	42	28	14	56		42	35	21		B
i_3	54	48	36	24	12	48	42		30	18		C
i_4	45	40	30	20	10	40	35	30		15		D
i_5	27	24	18	12	06	24	21	18	15			

Tabella 32.

gruppo di tre correlazioni per calcolare un coefficiente di saturazione.

$$a_{i_1} = \sqrt{\frac{.56 \times .48}{.42}} = .8$$

$$a_{i_2} = \sqrt{\frac{.56 \times .42}{.48}} = .7$$

$$a_{i_3} = \sqrt{\frac{.48 \times .42}{.56}} = .6$$

$$a_{i_4} = \sqrt{\frac{.40 \times .35}{.56}} = .5$$

$$a_{i_5} = \sqrt{\frac{.24 \times .21}{.56}} = .3$$

Ottenuti i coefficienti di saturazione nel fattore generale per i tests privi di saturazione nel fattore di gruppo, possiamo calcolare, da una delle submatrici B o C, i coefficienti di saturazione nel fattore generale per i tests k (tests che sono saturati anche dal fattore di gruppo).

$$a_{k_1} = \frac{r_{i_1 k_1}}{a_{i_1}} = \frac{.72}{.8} = .9$$

$$a_{k_2} = \frac{r_{i_1 k_2}}{a_{i_1}} = \frac{.64}{.8} = .8$$

$$a_{k_3} = \frac{r_{i_1 k_3}}{a_{i_1}} = \frac{.48}{.8} = .6$$

$$a_{k_4} = \frac{r_{i_1 k_4}}{a_{i_1}} = \frac{.32}{.8} = .4$$

$$a_{k_5} = \frac{r_{i_1 k_5}}{a_{i_1}} = \frac{.16}{.8} = .2$$

Disponendo dei coefficienti di saturazione in G, di tutti i tests della batteria, possiamo costruire la matrice (tab. 33), delle quote di correlazione dovute al fattore G (1).

		.9	.8	.6	.4	.2	.8	.7	.6	.5	.3
		k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5
.9	k_1		72	54	36	18	72	63	54	45	27
.8	k_2	72		48	32	16	64	56	48	40	24
.6	k_3	54	48		24	12	48	42	36	30	18
.4	k_4	36	32	24		08	32	28	24	20	12
.2	k_5	18	16	12	08		16	14	12	10	06
.8	i_1	72	64	48	32	16		56	48	40	24
.7	i_2	63	56	42	28	14	56		42	35	21
.6	i_3	54	48	36	24	12	48	42		30	18
.5	i_4	45	40	30	20	10	40	35	30		15
.3	i_5	27	24	18	12	06	24	21	18	15	

Tabella 33.

(1) Naturalmente, disponendo dei coefficienti di saturazione si potrebbero ricostruire anche le quote di autocorrelazione da collocare nei vuoti della diagonale principale; tuttavia, dovendosi poi sottrarre la matrice così ottenuta dalla matrice delle correlazioni, le caselle della diagonale principale devono rimanere vuote.

Sottraendo, termine per termine, tale matrice dalla matrice delle correlazioni, si ottiene la matrice dei residui (tab. 34), in cui, essendo i coefficienti di correlazione privi di errori di campionatura, le submatrici *B*, *C*, *D* risultano vuote.

MATRICE DEI RESIDUI

	<i>k</i> ₁	<i>k</i> ₂	<i>k</i> ₃	<i>k</i> ₄	<i>k</i> ₅	<i>i</i> ₁	<i>i</i> ₂	<i>i</i> ₃	<i>i</i> ₄	<i>i</i> ₅
<i>k</i> ₁		10	12	06	04					
<i>k</i> ₂	10		30	15	10					
<i>k</i> ₃	12	30		18	12					
<i>k</i> ₄	06	15	18		06					
<i>k</i> ₅	04	10	12	06						
<i>i</i> ₁										
<i>i</i> ₂										
<i>i</i> ₃										
<i>i</i> ₄										
<i>i</i> ₅										

Tabella 34.

Si vede immediatamente (ed e' facile controllare) che la submatrice residua *A* e' gerarchica, cioe' che in essa tutte le tetradi si annullano.

Le saturazioni si possono quindi calcolare con le note formule:

$$b_{k_1} = \sqrt{\frac{re_{k_1k_2} re_{k_1k_3}}{re_{k_2k_3}}} = .2$$

$$b_{k_2} = \sqrt{\frac{re_{k_1k_2} re_{k_2k_3}}{re_{k_1k_3}}} = .5$$

$$b_{k_4} = \sqrt{\frac{re_{k_2k_4} re_{k_3k_4}}{re_{k_2k_3}}} = .3$$

$$b_{k_3} = \sqrt{\frac{re_{k_1k_3} re_{k_2k_3}}{re_{k_1k_2}}} = .6$$

$$b_{k_5} = \sqrt{\frac{re_{k_2k_5} re_{k_3k_5}}{re_{k_2k_3}}} = .2$$

Ricostruendo in base alla formula $b_x b_y = re_{xk_y}$, la matrice delle quote di correlazione dovuta al fattore di gruppo, si ottiene una matrice identica alla prima matrice dei residui (tab. 35).

La seconda matrice dei residui risulta dunque completamente vuota.

		.2	.5	.6	.3	.2
		k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
.2	k_1		.10	.12	.06	.04
.5	k_2	.10		.30	.15	.10
.6	k_3	.12	.30		.18	.12
.3	k_4	.06	.15	.18		.06
.2	k_5	.04	.10	.12	.06	

Tabella 35.

La matrice fattoriale completa (tab. 36) richiede il calcolo delle saturazioni dei tests nei fattori specifici.

MATRICE FATTORIALE COMPLETA

Tests	G	V	S_{k_1}	S_{k_2}	S_{k_3}	S_{k_4}	S_{k_5}	S_{i_1}	S_{i_2}	S_{i_3}	S_{i_4}	S_{i_5}
k_1	.9	.2	.39	-	-	-	-	-	-	-	-	-
k_2	.8	.5	-	.33	-	-	-	-	-	-	-	-
k_3	.6	.6	-	-	.53	-	-	-	-	-	-	-
k_4	.4	.3	-	-	-	.87	-	-	-	-	-	-
k_5	.2	.2	-	-	-	-	.96	-	-	-	-	-
i_1	.8	-	-	-	-	-	-	.60	-	-	-	-
i_2	.7	-	-	-	-	-	-	-	.71	-	-	-
i_3	.6	-	-	-	-	-	-	-	-	.80	-	-
i_4	.5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	.87	-
i_5	.3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	.95

Tabella 36.

Si utilizza a tale scopo l'equazione delle varianze $a^2 + b^2 + u^2 = 1$ da cui $u = \sqrt{1 - (a^2 + b^2)}$

$$u_{k_1} = \sqrt{1 - (.9^2 + .2^2)} = \sqrt{.15} = .39$$

$$u_{k_2} = \sqrt{1 - (.8^2 + .5^2)} = \sqrt{.11} = .33$$

$$u_{k_3} = \sqrt{1 - (.6^2 + .6^2)} = \sqrt{.28} = .53$$

$$u_{k_4} = \sqrt{1 - (.4^2 + .3^2)} = \sqrt{.75} = .87$$

$$u_{k_5} = \sqrt{1 - (.2^2 + .2^2)} = \sqrt{.92} = .96$$

$$u_{1_1} = \sqrt{1 - (.8^2 + 0)} = \sqrt{.36} = .6$$

$$u_{1_2} = \sqrt{1 - (.7^2)} = \sqrt{.51} = .71$$

$$u_{1_3} = \sqrt{1 - (-.6^2)} = \sqrt{.64} = .8$$

$$u_{1_4} = \sqrt{1 - (.5^2)} = \sqrt{.75} = .87$$

$$u_{1_5} = \sqrt{1 - (.3^2)} = \sqrt{.91} = .95$$

Dalla matrice fattoriale si ricava la matrice delle varianze (tab. 37) in cui si legge in che proporzione ogni singolo fattore contribuisce a determinare la varianza del test.

MATRICE DELLE VARIANZE

Tests	Quote di varianza				Totale
	G	V	Varianza comune (comunanza)	Varianza specifica	
k_1	.81	.04	.85	.15	1.00
k_2	.64	.25	.89	.11	1.00
k_3	.36	.36	.72	.28	1.00
k_4	.16	.09	.25	.75	1.00
k_5	.04	.04	.08	.92	1.00
i_1	.64	-	.64	.36	1.00
i_2	.49	-	.49	.51	1.00
i_3	.36	-	.36	.64	1.00
i_4	.25	-	.25	.75	1.00
i_5	.09	-	.09	.91	1.00

Tabella 37.

E' stato cosi' delineato un metodo che consente di mettere a frutto le eccezioni alla gerarchia nelle matrici di correlazioni. Anziche' limitarsi ad eliminare l'uno o l'altro di due tests, che per essere troppo fortemente correlati rompono la proporzionalita' dei coefficienti di una matrice di correlazioni e sono responsabili del non-annullamento di una tetrade, si studia, ove non si tratti di tests estremamente simili, la ragione di questa correlazione accentuata. Formulata un' ipotesi, non resta che costruire (o utilizzare, se esistono gia') tutta

procedimento
c'è la possibilità di correlazione

una serie di tests che presentano fra loro quella particolare affinità alla quale, secondo l'ipotesi, e' da attribuire l'aumentata correlazione. Costruita una batteria di tests comprendente la serie di tests suddetti, e una serie di tests gerarchici puri, si e' in condizione di controllare se l'ipotesi del fattore di gruppo regge, e in caso affermativo, di misurare tale fattore e vedere la sua importanza nei singoli tests, dato che esso permettera' di precisarne l'interpretazione.

Il procedimento, dato il suo carattere euristico, appare degno della massima considerazione, pur nella sua semplicita'. Vi sono tuttavia ragioni teoriche di grande peso a favore di metodi radicalmente diversi, quando si abbandoni il terreno della matrice gerarchica, fondamento della teoria dei due fattori.

1. La teoria dei due fattori e i fattori di gruppo

L'analisi di matrici di correlazioni non gerarchiche in un fattore generale, uno o più fattori di gruppo e un fattore specifico per ogni test, rappresenta indubbiamente, dal punto di vista della concezione psicologica delle attitudini, un naturale sviluppo della teoria di Spearman, ma si distacca nettamente da quella teoria dal punto di vista dei fondamenti statistico-matematici. Tutte le prove e le derivazioni delle formule fondamentali della teoria dei due fattori si fondano infatti sull'annullamento delle tetradi, che rappresenta la condizione di esistenza di quella teoria. Il calcolo delle saturazioni dei tests nel fattore generale - cioè l'analisi fattoriale in senso stretto - ha come fondamento immediato l'annullamento delle tetradi: la traduzione delle correlazioni tra i tests in prodotti tra le rispettive saturazioni ($r_{xy} = a_x a_y$) che rappresenta un passaggio obbligato per tutti e due i metodi di calcolo delle saturazioni (v. Cap. I, §§ 4-6) si riduce infatti all'assurdo se le tetradi non si annullano.

Il punto di partenza dell'analisi bifattoriale è, invece, una matrice non gerarchica, cioè una matrice in cui tutte o parte delle tetradi non si annullano. Ma è evidente che da questo fatto non si può trarre nessuna conclusione positiva.

La soluzione che abbiamo adottata nel paragrafo precedente non è dunque che un compromesso per estendere la validità della teoria dei due fattori anche alle matrici non gerarchiche, esprimendo cioè tali matrici nella forma di somme di matrici gerarchiche (1). Questo è infatti il significato dell'"estrarre" successivamente dalla matrice delle correlazioni, prima la matrice del fattore generale (gerarchica) poi

(1) La somma di due matrici è una matrice i cui elementi sono le somme dei corrispondenti elementi delle due matrici. Si possono sommare soltanto matrici che hanno ugual numero di righe e di colonne.

le matrici (pure gerarchiche) dei singoli fattori di gruppo. Ma il procedimento manca della giustificazione che il carattere gerarchico della matrice offriva, nel caso dell'analisi nei due fattori G ed S . Infatti, non soltanto e' sempre possibile suddividere una matrice di correlazioni in un numero imprecisato di matrici gerarchiche piu' un residuo attribuibile all'errore di campionatura, ma la soluzione non e' unica, cioe' sono possibili, per una stessa matrice, piu' soluzioni di questo genere.

Comunque la piu' grave difficolta' che si oppone ad una estensione della teoria dei due fattori deriva dalla constatazione che, contrariamente alla convinzione di Spearman, le matrici non gerarchiche di correlazioni tra tests non rappresentano l'eccezione, ma la regola. Mentre infatti poteva essere in qualche modo giustificata un'estensione di una soluzione generalmente valida, a casi particolari, non ha senso il contrario, cioe' spiegare cio' che di regola si constata - la matrice non gerarchica - con cio' che si verifica in casi non frequenti - la matrice gerarchica. L'esigenza di una teoria generale che comprendesse come un caso particolare quella dei due fattori - non poteva mancare di affermarsi.

La soluzione generale venne dallo psicologo statunitense L.L. Thurstone, nel 1931.

2. La nozione di "rango" di una matrice e la generalizzazione della soluzione di Spearman

Per introdurre tale soluzione occorrono alcune ulteriori nozioni relative alle matrici.

Come e' stato detto precedentemente, una matrice puo' avere un numero qualsiasi di righe e di colonne. Il numero delle righe e delle colonne determina l'ordine della matrice: se una matrice ha m righe ed n colonne, il suo ordine e' m per n .

Di notevole interesse per l'analisi fattoriale sono le matrici quadrate, che hanno ugual numero di righe e colonne: un esempio di matrice quadrata e' la matrice dei coefficienti di correlazione. Di una matrice quadrata si puo' dare una particolare interpretazione che prende il nome di *determinante*. Il determinante di una matrice quadrata di ordine m e' una somma di $m!$ termini, calcolati secondo particolari regole (1); in altre parole, mentre una matrice non e' un numero, ma un insieme di numeri ordinati in righe e colonne, un determinante e' un numero.

(1) Il determinante di una matrice quadrata di ordine m e' una somma di $m!$ termini $[m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m-1) \cdot m]$, ossia di tutti i termini cosi' costruiti: ognuno di essi e' il prodotto di m elementi, con un solo elemento per ogni riga e un solo elemento per ogni colonna; ogni termine va preso col suo segno o cambiato di segno a seconda che esso comprende un numero pari o dispa-

La submatrice formata dall' intersezione di un certo numero di righe con ugual numero di colonne di una matrice, prende il nome di *minore* (1) Un minore e' quello che nel linguaggio della teoria dei due fattori e' stato chiamato tetrade. Una tetrade e' infatti un minore di ordine 2 di una matrice di correlazioni, e quella che e' stata chiamata differenza tetradica e' il valore del determinante di un minore di ordine 2. Una matrice gerarchica e' dunque una matrice in cui i determinanti di tutti i minori di ordine 2 si annullano (2).

Fin qui non si e' fatto altro che mostrare come certe nozioni introdotte da Spearman in relazione alla teoria dei due fattori si potevano tradurre in un altro linguaggio, quello dei determinanti e delle matrici. Ma questa possibilita' di esprimersi nei termini del calcolo delle matrici porta con se' l' enorme vantaggio di poter estendere all' analisi fattoriale le generalizzazioni ed i teoremi di questa branca della matematica. Un primo esempio, assai semplice, consiste nell' utiliz-

ri di inversioni. Esempio: dal seguente determinante di ordine 3 si possono scrivere $3! = 1.2.3 = 6$ termini

$a_{11} a_{12} a_{13}$	1) $a_{11} a_{22} a_{33}$
$a_{21} a_{22} a_{23}$	2) $a_{11} a_{32} a_{23}$ -
$a_{31} a_{32} a_{33}$	3) $a_{21} a_{12} a_{33}$ -
	4) $a_{21} a_{32} a_{13}$ +
	5) $a_{31} a_{12} a_{23}$ +
	6) $a_{31} a_{22} a_{13}$ -

Essendo gli elementi di ogni termine gia' ordinati per colonna, sono da considerare soltanto le inversioni delle righe; gli elementi del primo termine sono ordinati anche secondo le righe, quindi esso conserva il suo segno; gli elementi del secondo termine presentano un' inversione (il primo elemento appartiene alla 1a riga, il secondo alla 3a e il terzo alla 2a), quindi avra' il segno cambiato; il terzo termine presenta pure un' inversione (2-1-3) e quindi avra' anch' esso il segno cambiato; il quarto termine ha due inversioni (2a riga, 3a riga, 1a riga; per ottenere l'ordine esatto si dovrebbero scambiare di posto due volte due termini) e quindi conserva il segno; il quinto termine ha pure due inversioni e percio' conserva il segno; il sesto termine ha un' inversione e quindi ha il segno cambiato. Il determinante della matrice e' dunque $(a_{11} a_{22} a_{33}) - (a_{11} a_{32} a_{23}) - (a_{21} a_{12} a_{33}) + (a_{21} a_{32} a_{13}) + (a_{31} a_{12} a_{23}) - (a_{31} a_{22} a_{13})$.

(1) Nella seguente matrice di ordine 6 sono indicate mediante linee tratteggiate un minore di ordine 4 e un minore di ordine 2

1	4	11	0,5	72	3
16	7	5	26	0	92
8	27	1	50	106	3,5
4	81	6	17	19	0
33	1,5	40	77	127	515
34	40	1	67	0,7	772

Tabella 38.

(2) Infatti, seguendo le regole indicate nella nota precedente, si ottengono, per un determinante di ordine 2, 2 termini, $a_{11} a_{22}$ e $a_{21} a_{12}$; il segno del primo termine e' positivo, non essendoci inversione, mentre nel secondo termine c' e' una inversione e quindi il suo segno e' negativo. Il determinante sara' dunque $a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$.

zazione della nozione di *rango di una matrice*.

Il rango di una matrice si definisce come *l'ordine del più grande minore che ha determinante non nullo*.

Ci conviene rifarci all'esempio della matrice gerarchica. Secondo la precedente definizione la matrice gerarchica è una matrice di rango 1. Va tenuto presente infatti che quando si annullano i determinanti di tutti i minori di un certo ordine, si annullano anche tutti i determinanti dei minori di ordine superiore: in altre parole, quando - come avviene nella matrice gerarchica - si annullano i determinanti di tutti i minori di ordine 2 (cioè le tetradi), si annullano anche i determinanti di tutti i minori di ordine 3, 4, ..., quindi nella matrice gerarchica, annullandosi i determinanti di tutti i minori di ordine 2 e maggiori di 2, gli unici determinanti che possono essere diversi da zero sono quelli dei minori di ordine 1; ognuno di tali minori, trovandosi all'incrocio di una sola riga e di una sola colonna, è costituito da un solo elemento della matrice (ed ha come determinante il valore di quest'elemento).

Ma la nozione di rango di una matrice mette in evidenza il fatto che non esiste soltanto una matrice gerarchica o una matrice non-gerarchica, ma che, come c'è una matrice in cui i determinanti di tutti i minori di ordine 2 (o superiore a 2) si annullano, ci potrà essere una matrice in cui pur non annullandosi i determinanti di tutti i minori di ordine 2, si annullano i determinanti di tutti i minori di ordine 3 (cioè una matrice di rango 2); o una matrice in cui, pur non annullandosi i determinanti di tutti i minori di ordine 2, né i determinanti di tutti i minori di ordine 3, si annullano i determinanti di tutti i minori di ordine 4 (cioè una matrice di rango 3); e così via, fino ad arrivare al caso della matrice in cui non si annullano, né i determinanti di tutti i minori di ordine 2, né di ordine 3..., né i determinanti dei minori di ordine $(m-1)$ né il determinante della matrice.

Si tratterà allora di una matrice il cui rango è uguale all'ordine della matrice stessa. (1).

Spetta a Thurstone il merito di aver scoperto che i problemi dell'analisi fattoriale si potevano tradurre nei termini del calcolo delle matrici.

Posto in termini di algebra matriciale, il problema dell'analisi delle matrici non gerarchiche è già avviato alla soluzione. Infatti se nella matrice di rango 1 le correlazioni tra i tests dipendono dalla presenza di un fattore generale, sorge naturale l'ipotesi che sussista una semplice relazione fra il rango di una matrice di correlazioni e il numero di fattori (generalì o di gruppo) in cui si risolve la matrice stessa.

Thurstone dimostra appunto che il numero (minimo) di fattori comuni necessario ad esprimere compiutamente una matrice di correlazioni è pari al rango della matrice stessa. (2)

(1) Per es. una matrice di ordine 10 e di rango 10, cioè una matrice quadrata di 10 righe e 10 colonne, il cui determinante non si annulla.

(2) v. Appendice? Il rango di una matrice si definisce anche come il più piccolo ordine comune tra tutte le sottopie di matrici il cui prodotto è la matrice stessa. Il numero minimo di fattori comuni è appunto il numero di colonne della matrice fattoriale e il numero di righe della matrice posta, cioè 10.

Spottura a p. 130

Pertanto la condizione dell' annullamento delle differenze tetradiche, posta da Spearman, rientra come caso particolare nella formulazione generale di Thurstone.

3. La moltiplicazione fra matrici e l' equazione fondamentale di Thurstone

Un ulteriore sviluppo della generalizzazione di Thurstone richiede alcune nozioni relative alle operazioni con matrici.

Il risultato dell' analisi fattoriale di una matrice gerarchica e' pure una matrice - la matrice del fattore generale - che e' costituita da una sola colonna, e tante righe quanti sono i tests (1).

La matrice del fattore generale a sua volta consente di ricostruire la matrice delle correlazioni. Infatti, essendo le correlazioni pari al prodotto delle saturazioni ($r_{xy} = a_x a_y$), moltiplicando tra loro le saturazioni (cioe' i termini della matrice fattoriale) si ottengono le correlazioni fra i tests (2). Tale operazione di ricostruzione della matrice delle correlazioni si compie, in effetti, allo scopo di ottenere la matrice dei residui, sottraendo dalla matrice originale delle correlazioni la matrice delle correlazioni ricostruite in base alla predetta formula.

Ricordiamo che il metodo pratico per ottenere la matrice dei residui consiste nel trascrivere due volte la matrice fattoriale, una volta verticalmente e una seconda volta orizzontalmente, nel tracciare le caselle della matrice e nel segnare in ogni casella il prodotto delle due saturazioni che vi corrispondono come riga e come colonna, come nello schema seguente (tab. 39).

A tale proposito va notato che la diversita' fra i due modi di scrivere la matrice delle saturazioni fattoriali (una volta verticalmente e una volta orizzontalmente) consiste nel fatto che gli elementi

(1) La matrice fattoriale completa comprende il fattore generale e gli eventuali fattori di gruppo (i quali insieme al fattore generale costituiscono i fattori comuni), e i fattori specifici; ma in genere i fattori specifici vengono trascurati e quando si parla di matrice fattoriale si intende la matrice dei fattori comuni. D' altronde, il fatto di considerare come risultato dell' analisi la sola matrice dei fattori comuni (senza i fattori specifici) e' giustificato, in quanto soltanto i fattori comuni determinano le correlazioni. In particolare quando la matrice delle correlazioni e' gerarchica (cioe' di rango 1) la matrice dei fattori comuni si riduce al solo fattore generale.

(2) Effettuando il calcolo sulla matrice di tab. 6 si ottiene in effetti l' esatta ricostruzione della matrice di correlazione, tanto e' vero che il risultato dell' operazione $r_{xy} - (a_x a_y)$ e' zero, per tutti gli elementi della matrice, o, in altre parole, non ci sono residui. Nel caso di una matrice sperimentale di correlazioni (come quella di tab. 9) la ricostruzione e' invece approssimativa, perche' nella matrice ricostruita si verifica esattamente l' equazione della correlazione $r_{xy} = a_x a_y$, mentre nella matrice originaria tale equazione era verificata solo approssimativamente in seguito agli errori di campionatura. Di conseguenza sottraendo la matrice ricostruita dalla matrice sperimentale si ottiene la matrice dei residui.

(3) v. l' esempio numerico in Tab. 12

*è stato detto che è il rango
numerico della matrice per
ammalgarma
nel caso della matrice
di rango 1
dei tests nel fattore
generale
* il risultato dell' analisi fattoriale è la matrice dei fattori
comuni; i fattori specifici vengono ottenuti sottraendo
correlazioni*

	a_1	a_2	a_3	a_4	$\dots a_n$
a_1		$a_1 a_2$	$a_1 a_3$	$a_1 a_4$	ecc.
a_2					
a_3					
a_4					
\vdots					
\vdots					
a_n					

Tabella 39.

della matrice, che in un caso sono disposti in una colonna, uno per riga, nell'altro caso sono disposti in una riga, uno per colonna.

Si parla, in questo caso, di *trasposizione* di una matrice.

La *trasposta* di una matrice e' una matrice che comprende gli stessi elementi ma ha le righe al posto delle colonne, e le colonne al posto delle righe; cioe' la prima colonna della trasposta e' uguale alla prima riga della matrice originaria, la seconda colonna alla seconda riga, ecc.; la trasposta di una matrice A si indica con A' (1).

Quando la matrice delle correlazioni non e' gerarchica, e l'analisi e' *plurifattoriale*, la matrice dei fattori comuni ha tante colonne quanti sono i fattori comuni e tante righe quanti sono i tests. In questo caso si calcolano successivamente le saturazioni dei tests in ogni singolo fattore e si estrae dalla matrice delle correlazioni il contributo dovuto ad ogni singolo fattore applicando la formula: $r_{xy} = a_x a_y + b_x b_y + c_x c_y + \dots + k_x k_y$ (in cui a, b, \dots, k sono le saturazioni

(1) Per maggior chiarezza diamo alcuni esempi di matrici e delle loro trasposte:

$$A = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ 7 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$A' = [11 \quad 2 \quad 7 \quad 3 \quad 8]$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 0 \\ 7 & 4 & 12 \\ 16 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 & 16 \\ 4 & 9 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

dei tests nei k fattori comuni). È ovvio che anche in questo caso facendo l'operazione inversa, cioè addizionando le matrici dei contributi dovuti ai singoli fattori si ricostruisce la matrice delle correlazioni con l'approssimazione dovuta agli errori casuali di campionatura, il cui contributo risulta dalla matrice dei residui.

Nel caso della matrice fattoriale comprendente più fattori comuni l'operazione di ricostituzione delle matrici delle correlazioni a partire dalla matrice fattoriale consta dunque di tante fasi quanti sono i fattori comuni. Tuttavia tali fasi si possono fondere in un'unica operazione, qualunque sia il numero dei fattori comuni (1).

Tale operazione è la moltiplicazione fra matrici.

La moltiplicazione fra matrici è un procedimento che presenta una fondamentale diversità dalla moltiplicazione fra numeri, in quanto per essa non sussiste la proprietà commutativa. Mentre cioè il prodotto di due numeri è indipendente dall'ordine dei fattori ($mn = nm$), il prodotto di due matrici differisce a seconda dell'ordine dei fattori ($MN \neq NM$) (2).

Per moltiplicare fra loro due matrici si calcolano i cosiddetti "prodotti interni" di ogni riga della prima matrice per ogni colonna della seconda. La regola da ricordare è "riga per colonna". Per prodotto interno di due sequenze di numeri si intende la somma dei loro prodotti a coppie; cioè se le due sequenze sono $abcd$ e $a'b'c'd'$, il loro prodotto interno è $aa' + bb' + cc' + dd'$.

La matrice-prodotto di due matrici si ottiene nel modo seguente: il prodotto interno tra la I riga della matrice moltiplicanda A per la I colonna della matrice-moltiplicatrice B è il termine C_{11} della matrice-prodotto C ; il prodotto interno della prima riga di A per la II colonna di B è il termine C_{12} della matrice-prodotto C , ecc.

Diamo un esempio:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 10 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 & 20 \\ 49 & 22 \\ 63 & 58 \end{bmatrix}$$

A B C

$$C_{11} = \text{prodotto interno della I riga di } A \text{ per la I colonna di } B = (2 \cdot 3) + (6 \cdot 10) + (0 \cdot 4) = 66$$

$$C_{12} = \text{prodotto interno della I riga di } A \text{ per la II colonna di } B = (2 \cdot 7) + (6 \cdot 1) + (0 \cdot 3) = 20$$

(1) Va tenuto presente che le operazioni corrispondenti alle fasi di ricostruzione della matrice delle correlazioni si devono eseguire separatamente l'una dopo l'altra in quanto sono necessarie all'estrazione dei fattori. Infatti, riprendendo in considerazione il nostro esempio di analisi bifattoriale, vediamo che per poter calcolare le saturazioni nel fattore di gruppo dobbiamo prima estrarre dalla matrice delle correlazioni la quota delle correlazioni dovute al fattore generale; e dopo aver calcolato le saturazioni nel fattore di gruppo è necessario estrarre la quota delle correlazioni dovute al fattore di gruppo, per vedere se ci sono residui, e se sono significativamente diversi da zero.

(2) Per indicare le matrici si usano di solito le lettere maiuscole.

Non usare a' b' ecc. - crea confusione con le trascritte

Non usare parole, per calcolare le saturazioni in tutti i fattori si calcolano necessariamente le quote di correlazione dovute ai singoli fattori, basta allora approssimare tali quote per ottenere la ricostruzione delle matrici delle correlazioni

calcolare e far

$$C_{21} = \text{prodotto interno della II riga di } A \text{ per la I colonna di } B = \\ = (1 \cdot 3) + (3 \cdot 10) + (4 \cdot 4) = 49$$

$$C_{22} = \text{prodotto interno della II riga di } A \text{ per la II colonna di } B = (1 \cdot 7) + (3 \cdot 1) + (4 \cdot 3) = 22$$

$$C_{31} = \text{prodotto interno della III riga di } A \text{ per la I colonna di } B = (5 \cdot 3) + (2 \cdot 10) + (7 \cdot 4) = 63$$

$$C_{32} = \text{prodotto interno della III riga di } A \text{ per la II colonna di } B = (5 \cdot 7) + (2 \cdot 1) + (7 \cdot 3) = 58.$$

Dall'esempio risulta:

1) La matrice-prodotto ha lo stesso numero di righe della matrice moltiplicanda A e lo stesso numero di colonne della matrice-moltiplicatrice B .

2) Si può calcolare il prodotto di due matrici soltanto se il numero di termini delle righe della matrice moltiplicanda è uguale al numero di termini delle colonne della matrice moltiplicatrice, cioè se il numero delle colonne della matrice moltiplicanda è pari al numero delle righe della matrice moltiplicatrice. In altre parole, se indichiamo con (m, n) una matrice con m righe ed n colonne, condizione necessaria e sufficiente per poterla moltiplicare con una matrice del tipo (p, q) è che sia $p = n$; e la matrice-prodotto sarà del tipo (m, q) , ossia simbolicamente $(m, n) \cdot (n, q) = (m, q)$.

Riprendendo in esame il procedimento seguito per ricalcolare - nel caso della matrice gerarchica - la matrice delle correlazioni a partire dalla matrice generale; secondo lo schema di tab. 41, ci si rende conto che tale procedimento consisteva nella moltiplicazione di una matrice per la sua trasposta; solo che, trattandosi di una matrice fattoriale costituita da un'unica colonna, ogni riga era costituita da un solo termine, e così pure era costituita da un solo termine ogni colonna della trasposta, per cui in questo caso particolare per ottenere ogni termine della matrice prodotto bastava moltiplicare fra loro due termini.

Nel caso di una matrice non gerarchica, come quella di tab. 32 dalla quale abbiamo estratto, oltre al fattore generale, anche un fattore di gruppo, si è proceduto allo stesso modo, ma in due tempi e cioè:

a) moltiplicando la matrice del solo fattore generale con la sua trasposta si è calcolata la matrice delle quote di correlazione dovute al fattore G ; b) moltiplicando la matrice del solo fattore di gruppo per la sua trasposta si è calcolata la matrice delle quote di correlazione dovute al fattore di gruppo (1).

La matrice dei fattori comuni viene cioè costruita come somma di matrici (v. tab. 40), ognuna delle quali era stata ottenuta come prodotto di una matrice per la sua trasposta.

(1) Se vi sono più fattori di gruppo, si ripete successivamente la stessa operazione per ogni fattore di gruppo.

$$\begin{bmatrix} .9 & .2 \\ .8 & .5 \\ .6 & .6 \\ .4 & .3 \\ .2 & .2 \\ .8 & .00 \\ .7 & .00 \\ .6 & .00 \\ .5 & .00 \\ .3 & .00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .9 & .00 \\ .8 & .00 \\ .6 & .00 \\ .4 & .00 \\ .2 & .00 \\ .8 & .00 \\ .7 & .00 \\ .6 & .00 \\ .5 & .00 \\ .3 & .00 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} .00 & .2 \\ .00 & .5 \\ .00 & .6 \\ .00 & .3 \\ .00 & .2 \\ .00 & .00 \\ .00 & .00 \\ .00 & .00 \\ .00 & .00 \\ .00 & .00 \end{bmatrix}$$

matrice di Tab 33 + matrice di Tab 35 con tutti gli zeri = matrice di Tab. 32

Tabella 40.

Ma la matrice delle correlazioni si puo' anche ricostruire con un' unica operazione come nel seguente esempio, presentato sempre con i dati dell' analisi compiuta al paragrafo precedente.

Matrice dei fattori comuni

Trasposta della matrice dei fattori comuni

$$\begin{matrix} F \\ \begin{bmatrix} .9 & .2 \\ .8 & .5 \\ .6 & .6 \\ .4 & .3 \\ .2 & .2 \\ .8 & .0 \\ .7 & .0 \\ .6 & .0 \\ .5 & .0 \\ .3 & .0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} F' \\ \begin{bmatrix} .9 & .8 & .6 & .4 & .2 & .8 & .7 & .6 & .5 & .3 \\ .2 & .5 & .6 & .3 & .2 & .0 & .0 & .0 & .0 & .0 \end{bmatrix} \end{matrix} =$$

cioe' moltiplicando la matrice fattoriale con la sua trasposta

Matrice dei coefficienti di correlazione

$$\begin{matrix} R \\ \begin{bmatrix} (.85) & .82 & .66 & .42 & .22 & .72 & .63 & .54 & .45 & .27 \\ .82 & (.89) & .78 & .47 & .26 & .64 & .56 & .48 & .40 & .24 \\ .66 & .78 & (.72) & .42 & .24 & .48 & .42 & .36 & .30 & .18 \\ .42 & .47 & .42 & (.25) & .14 & .32 & .28 & .24 & .20 & .12 \\ .22 & .26 & .24 & .14 & (.08) & .16 & .14 & .12 & .10 & .06 \\ .72 & .64 & .48 & .32 & .16 & (.64) & .56 & .48 & .40 & .24 \\ .63 & .56 & .42 & .28 & .14 & .56 & (.49) & .42 & .35 & .21 \\ .54 & .48 & .36 & .24 & .12 & .48 & .42 & (.36) & .30 & .18 \\ .45 & .40 & .30 & .20 & .10 & .40 & .35 & .30 & (.25) & .15 \\ .27 & .24 & .18 & .12 & .06 & .24 & .21 & .18 & .15 & (.09) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Tabella 41.

In questo caso la matrice delle correlazioni, che dall'analisi fattoriale risulta analizzabile in due fattori comuni, non è di rango 1, ma di rango 2, come si può verificare, constatando che tutti i determinanti di ordine 3 si annullano, mentre non si annullano tutti i determinanti di ordine 2, cioè le tetradi.

La matrice delle correlazioni (R) risulta dunque uguale al prodotto tra la matrice dei fattori comuni (F) e la sua trasposta (F').

$$FF' = R \text{ (equazione fondamentale di Thurstone).}$$

Questa espressione ci permette a sua volta di esprimere matematicamente il problema della fattorizzazione: si tratta cioè di calcolare una matrice (con un numero minimo di colonne) tale che moltiplicata con la sua trasposta dia come prodotto la matrice delle correlazioni.

Si dimostra che soltanto nel caso della matrice di rango 1 (matrice gerarchica) il problema ha una sola soluzione, mentre in tutti gli altri casi le soluzioni sono infinite.

Il significato di quest'affermazione si può illustrare agevolmente con un modello geometrico.

*altro modo di definire
il rango di una matrice*

$$\text{Anche } \frac{1}{N} ZZ' = R$$

$$Z = AF$$

essere sempre da non-matematiche - nell'appendice

(1) Per non appesantire la lettura di questo capitolo sono state soltanto enunciate i teoremi e le equazioni basilari dell'analisi fattoriale, le dimostrazioni e la relazione fra rango e numero dei fattori, quelle teorie della rotazione del rango, nell'appendice fondamentale di T. ecc. non presentate in modo sovrapposto

LA RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DELLO SPAZIO DEI FATTORI COMUNI

Capitolo III

1. Spazio fattoriale e spazio dei tests

Riprendiamo in considerazione le nozioni di *spazio dei tests* e *spazio fattoriale*. Eravamo partiti dalla rappresentazione dei risultati di un campione di n soggetti in una batteria di m tests, con n punti, la posizione di ognuno dei quali era fissata rispetto ad un sistema di m assi ortogonali. E siccome in uno spazio a due dimensioni non si possono avere più di 2 assi ortogonali, ed in uno spazio a 3 dimensioni non si possono avere più di 3 assi ortogonali, se m era maggiore di 3, il modello geometrico poteva sussistere soltanto in un iperspazio, le cui dimensioni fossero pari al numero dei tests.

Successivamente il modello era stato modificato in modo da poter rappresentare anche i coefficienti di correlazione: introdotta la convenzione del coseno, gli assi-tests non erano più ortogonali ma formavano fra loro angoli diversi, a seconda della correlazione fra i diversi tests; ma non per questo veniva a ridursi il numero di dimensioni, poiché, salvo casi particolarissimi, anche con la non ortogonalità degli assi il numero delle dimensioni è uguale al numero degli assi.

Con la convenzione del coseno, gli assi che rappresentano i fattori sono tutti ortogonali, in quanto i fattori (1) sono privi di correlazione fra loro. In una batteria di m tests, se la matrice delle correlazioni è di rango 1 (cioè gerarchica) i fattori sono $m+1$ (m fattori specifici e il fattore G); quindi, mentre il modello geometrico della batteria di tests richiede uno spazio ad m dimensioni, il modello del sistema fattoriale di Spearman ne richiede $m+1$. In generale, se la matrice delle correlazioni è di rango k , vi sono k fattori comuni; quindi se la batteria è di m tests, le dimensioni necessarie per il modello spaziale sono $m+k$. In altre parole, se lo *spazio dei tests*

(1) Nella teoria dei due fattori e nella estensione di quella teoria.

ha m dimensioni e vi sono k fattori comuni, lo spazio fattoriale ha $m+k$ dimensioni.

E' chiaro che lo spazio fattoriale, avendo un numero maggiore di dimensioni, comprende in se' anche lo spazio dei tests, per cui, se vi fosse la possibilita' di rappresentarlo, esso costituirebbe un modello completo di tutte le relazioni fra tests e fattori.

Non essendo rappresentabile il modello fattoriale completo, dobbiamo limitarci a rappresentarne una parte, cioe' un sotto-spazio, che abbia un numero di dimensioni tale da consentire la rappresentazione.

In effetti vi e' soltanto una parte del modello fattoriale che presenta interesse per noi; quella parte che rappresenta i rapporti fra tests e fattori comuni. Si e' gia' detto infatti che i fattori specifici non presentano interesse; ed i rapporti del singolo test con il proprio fattore specifico sono stati precisati una volta per sempre nel capitolo precedente. Ma anche limitandoci a rappresentare soltanto i tests e i fattori comuni ci troveremo nelle stesse difficolta': infatti per rappresentare gli m vettori dei tests e i k vettori dei fattori comuni occorre lo stesso numero di dimensioni necessario per rappresentare la matrice fattoriale completa comprendente k vettori comuni ed m fattori specifici. (1).

Vi e' invece un importante sottospazio che ha un numero limitato di dimensioni, talvolta non superiore a tre, cosi' da poter essere rappresentato, ed e' lo spazio dei fattori comuni, cioe' lo spazio individuato dagli assi ortogonali dei fattori comuni, eioe' del fattore G e dei fattori di gruppo.

Prenderemo come esempio la matrice fattoriale comprendente un fattore generale ed un fattore di gruppo (cioe' due fattori comuni) di cui al paragrafo precedente, la quale essendo a due dimensioni e' rappresentabile in un solo diagramma.

Per passare alla costruzione del diagramma sono necessarie alcune precisazioni. In primo luogo va tenuto presente che i tests (cioe' gli assi che li rappresentano nel modello geometrico) *non si trovano* nello spazio dei fattori comuni.

Considerando il modello geometrico e' facile rendersi conto di questo fatto. Ogni test ha una saturazione nel proprio fattore specifico, oltre che in uno o piu' fattori comuni. Ma saturazione equivale a correlazione ($u_t = r_{s,t}$); essendo correlato con il proprio fattore specifico, l'asse del test deve formare con l'asse del proprio fattore specifico un angolo diverso dall'angolo retto (poiche' l'angolo retto rappresenta la correlazione nulla). D'altra parte essendo i fattori privi di correlazione fra loro, l'asse del fattore specifico del test deve essere perpendicolare a tutti i fattori comuni, cioe' perpendico-

(1) Come si e' visto nella prima parte i vettori dei tests vengono a collocarsi nello spazio fattoriale completo senza richiedere dimensioni in piu'.

lare allo spazio dei fattori comuni. (Nel nostro esempio, essendo due i fattori comuni, i loro assi determinano un piano, e il fattore specifico del test preso in considerazione deve essere perpendicolare a tale piano). E siccome lo spazio dei fattori comuni comprende soltanto rette perpendicolari al suddetto fattore specifico, l'asse del test che e' correlato a quel fattore specifico non puo' giacere nello spazio dei fattori comuni.

Lo spazio dei fattori comuni contiene dunque soltanto gli assi dei fattori comuni; la rappresentazione di tale spazio sarebbe quindi di scarsa utilita' per chiarire le relazioni fra tests e fattori comuni, se non vi fosse la possibilita' di rappresentare in qualche modo anche i tests.

Tale possibilita' si offre, in quanto, in seguito all'obliquita' degli assi dei tests, rispetto allo spazio dei fattori comuni (dovuta alla correlazione di tutti i tests con almeno uno dei fattori comuni) tutti gli assi dei tests hanno una proiezione non nulla nello spazio dei fattori comuni.

2. Il modello vettoriale

Il fatto di poter rappresentare i tests in tale spazio rende tuttavia necessaria una modificazione nel modello geometrico, cioe' la sostituzione degli assi con dei vettori applicati all'origine (1).

Un vettore applicato all'origine e' un segmento orientato, con un estremo nell'origine (2) e quindi oltre ad avere come gli assi una direzione ed un verso, ha una grandezza. Nello spazio fattoriale ad $(m+k)$ dimensioni, tests e fattori sono rappresentati da vettori della stessa grandezza che e' stata assunta come unita' (vettori unitari); la direzione ed il verso dei vettori sono identici alla direzione ed al verso che, nel precedente modello avevano gli assi, in base alla legge del coseno. Nulla ci vieta dunque di considerare contemporaneamente vettori ed assi. Ma, per non complicare il disegno si rappresentano soltanto i vettori; d'altra parte gli assi, la cui funzione era quella di determinare la posizione dei punti-soggetti in relazione ai risultati dei soggetti nei vari tests, perdono tale funzione quando ne consideriamo le proiezioni.

Resta da chiarire la funzione dei vettori e delle loro proiezioni.

Riprendiamo in considerazione la constatazione fatta nella I parte, cap. III, § 5, trattando del modello geometrico della soluzione di Spearman (fig. 24): portando l'unita' di misura sull'asse di un test a

(1) Un accenno a questo modo di rappresentare i tests e' stato fatto in occasione della rappresentazione geometrica della soluzione fattoriale di Spearman (Parte I, Cap. III, 5).

(2) Anche in seguito s'incontreranno sempre e soltanto vettori applicati nell'origine, anche se, per brevitaa, li chiameremo soltanto vettori.

partire dall'origine e nel verso positivo (ora potremmo dire "applicando nell'origine un vettore unitario parallelo ed equiverso all'asse di un test") constatiamo che la misura della sua proiezione sull'asse del fattore G e' il coseno dell'angolo che l'asse del test forma con l'asse G , cioè la correlazione fra il test e G , o la saturazione del test in G ($r_{tG} = a_t$); altrettanto vale per la proiezione sull'asse del fattore specifico del test.

E' chiaro che la rappresentazione per mezzo di proiezioni puo' fornire queste importanti informazioni soltanto se sugli assi (o al posto degli assi) sono messi in evidenza dei segmenti, che e' opportuno scegliere unitari.

Vediamo ora di trasferire l'osservazione precedente relativa alle proiezioni di un vettore-test unitario, al caso in cui vi siano due fattori comuni (fig. 41).

I vettori comuni, che chiameremo A e B (1), individuano un piano (α) - lo spazio dei fattori comuni. Il vettore di un test t e quello del suo fattore specifico S_t individuano pure un piano (β); ma, data la ortogonalita' dei fattori, il vettore S_t e' perpendicolare al piano dei fattori comuni e percio' e' perpendicolare a tale piano anche il piano individuato dai vettori t ed S_t (come ogni piano che comprende S_t).

Il vettore t ha in t_c la sua proiezione sul piano α , cioè nello spazio dei fattori comuni; ma t_c cade nell'intersezione fra i due piani e quindi appartiene tanto al piano α quanto al piano β .

Esaminiamo i rapporti fra t , t_c ed S_t sul piano β (fig. 42). S_t e' perpendicolare a t_c (2); quindi se consideriamo anche la proiezione di

(1) Nell'esempio trattato precedentemente e che riprenderemo in seguito, i due fattori comuni sono il fattore G e il fattore verbale V , ma per le considerazioni che faremo in questo e nel seguente paragrafo e' utile riferirci a due fattori comuni qualsiasi.

(2) Perché una retta perpendicolare a un piano e' perpendicolare a tutte le rette del piano che passano per il suo piede.

Spiegare che quando i fattori sono due, il test non può variare nello stesso piano con un fattore comune e il proprio fattore specifico, se non quando è monofattoriale. Se è bifattoriale deve essere fuori dai due piani comprendenti S_t e A , ed S_t e B .

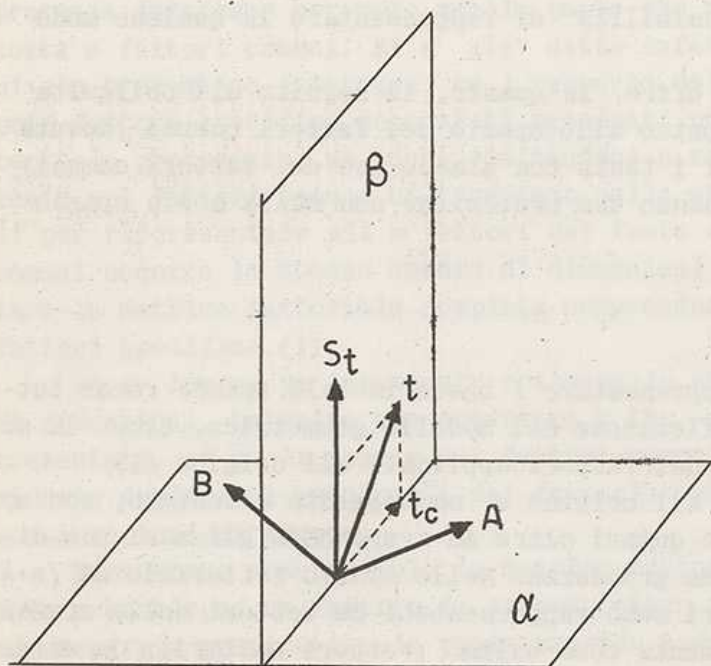


Fig. 41.

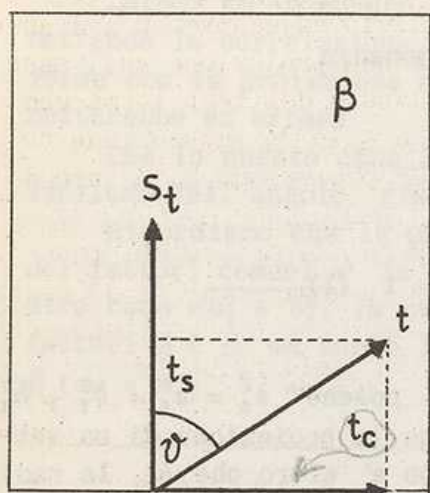


Fig. 42.

t su S_t , cioè il vettore t_s ci troviamo nelle stesse condizioni di fig. 24 e possiamo applicare il teorema di Pitagora alle misure delle lunghezze dei segmenti che, per semplicità, indicheremo sia ora che in seguito con le stesse lettere che indicano i vettori (1)

$$t^2 = t_c^2 + t_s^2$$

cioè, essendo $t = 1$

$$t_c^2 + t_s^2 = 1 ;$$

ma la misura della proiezione di t su S_t è il coseno dell'angolo che t forma con S_t , cioè r_{tS_t} che non è altro che la saturazione di t nel fattore specifico, dunque

$$t_s = u_t$$

quindi

$$t_c^2 + u_t^2 = 1$$

ma $a_t^2 + b_t^2 + u_t^2 = 1$ (2), quindi

$$t_c^2 = a_t^2 + b_t^2 \quad \text{e} \quad t_c = \sqrt{a_t^2 + b_t^2}$$

Vediamo ora di precisare il significato dell'espressione $a_t^2 + b_t^2$.

Ricordiamo che la formula $a_t^2 + b_t^2 + u_t^2 = 1$ esprime la varianza di un test (misurata in unità standard, in cui $\sigma^2 = 1$) in termini fattoriali (3), cioè la varianza suddivisa nelle quote dovute ai singoli fattori.

Risulta conveniente riunire le quote dovute ai fattori comuni e quindi distinguere la parte di varianza che un test ha in comune con altri tests della batteria, e la parte di varianza che è specifica al test stesso; la prima parte prende il nome di *comunanza* (4)

(1) È necessario distinguere tra i vettori e le misure delle lunghezze dei segmenti che li rappresentano, perché le misure delle lunghezze dei segmenti sono numeri, e come tali seguono le regole del calcolo numerico usuale, mentre nel cosiddetto calcolo vettoriale le operazioni sono definite diversamente, tenendo conto oltre che della lunghezza dei vettori, anche della loro direzione e del loro verso.

(2) Vedi Cap. I, 3 della II parte.

(3) Per semplificare i passaggi prescindiamo momentaneamente dagli errori di campionatura di cui si è parlato nel Cap. II, 6 della I parte.

(4) Trattando della teoria dei due fattori nella I parte, l'espressione "comunanza" era stata usata ad indicare il quadrato della saturazione in G. Infatti, se l'espressione della varianza è $a_t^2 + u_t^2 = 1$, la varianza comune è $k_t^2 = a_t^2$.

*quindi si parte dal fatto che S_{t_2} è perpendicolare allo spazio bi-dimensionale
vale individuato da A, B, ed S_{t_1} e quindi t_1 deve trovarsi nel predetto spazio
bi-dimensionale.*

*perché se si trova in uno dei due piani, per il teorema di Pitagora
ha varianza soltanto in uno dei due fattori comuni ($u_t^2 + a_t^2 = 1$)
l'argomento usato per dimostrare che t deve essere in quel piano non
si applica.*

$$a_t^2 + b_t^2 + u_t^2 = 1$$

$$a_t^2 + b_t^2 = h_t^2 = \text{comunanza}$$

$$h_t^2 + u_t^2 = 1$$

$$h_t^2 = 1 - u_t^2$$

e in generale se vi sono k fattori comuni

$$a_t^2 + b_t^2 + \dots + k_t^2 + u_t^2 = 1 \quad (1)$$

$$a_t^2 + b_t^2 + \dots + k_t^2 = h_t^2$$

Ritornando al modello di figg. 41 e 42, poichè $t_c^2 = a_t^2 + b_t^2 + h_t^2$ e quindi $t_c = h_t$ siamo giunti a stabilire che la proiezione di un vettore-test nello spazio dei fattori comuni non è altro che h_t , la radice quadrata della comunanza del test. Dunque la proiezione di un vettore-test nello spazio dei fattori comuni sarà tanto più grande quanto maggiore è la varianza comune del test, cioè quanto minore è la saturazione del test nel fattore specifico, come del resto risulta dalla fig. 42.

3. Le correlazioni come prodotti scalari

Resta da precisare come vengano rappresentate le correlazioni fra tests e fra tests e fattori, nello spazio dei fattori comuni.

Bisogna infatti tener presente che gli angoli che i vettori-tests formano fra loro e con i vettori fattoriali nello spazio fattoriale ad $m+k$ dimensioni si deformano quando i vettori-tests vengono proiettati nello spazio dei fattori comuni. In altre parole l'angolo che formano tra loro due vettori-tests o un vettore-test con un vettore fattoriale nello spazio fattoriale ad $m+k$ dimensioni non è uguale all'angolo che formano fra loro le proiezioni di quei due vettori-tests o la proiezione di quel vettore-test con un vettore fattoriale, nello spazio dei fattori comuni.

Ciò risulta evidente nella situazione rappresentata in fig. 41. Nel piano α (che è lo spazio dei fattori comuni) si trovano i vettori fattoriali A e B che sono ortogonali tra loro e la proiezione del vettore-test t , t_c . Poichè in questo caso t_c si trova fra A e B , gli angoli $\hat{A}t_c$ e $\hat{B}t_c$ sono complementari. Il vettore t invece non si trova nello spazio dei fattori comuni, cioè è fuori del piano α ; perciò $\hat{A}t > \hat{A}t_c$, $\hat{B}t > \hat{B}t_c$ e $\hat{A}t + \hat{B}t > 90^\circ$.

(1) Tenendo conto degli errori casuali, la formula della varianza in termini fattoriali è

$$a_t^2 + b_t^2 + \dots + k_t^2 + u_t^2 + e_t^2 = 1$$

in cui e^2 è la quota di varianza dovuta all'errore.

Il fatto che la correlazione fra test e fattori calcolata con base all'angolo fra i due vettori unitari sia uguale alla correlazione calcolata in base all'angolo fra vettori

Quindi se in questo caso si applicasse la relazione $r_{xy} = \cos \theta_{xy}$ mettendo la correlazione fra A e t uguale al coseno dell'angolo che A forma con la proiezione di t nello spazio dei fattori comuni, si commetterebbe un errore.

Che in questo caso la correlazione non possa essere *soltanto* una funzione dell'angolo, risulta anche da un'altra considerazione.

Ricordiamo che la proiezione t_c del vettore-test t nello spazio dei fattori comuni e' la radice quadrata della comunanza, cioe' nel nostro caso $\sqrt{a_t^2 + b_t^2}$, in cui a_t e b_t sono le saturazioni del test t nei fattori A e B, ma anche le correlazioni tra il test t e i fattori A e B ($a_t = r_{At}$, $b_t = r_{Bt}$).

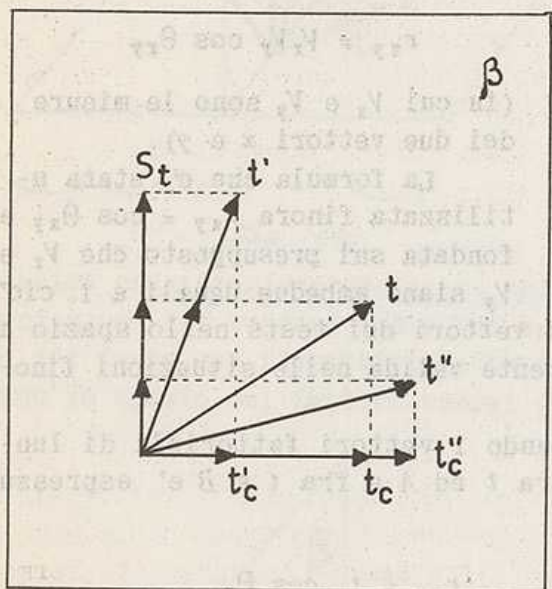


Fig. 43.

Consideriamo ora due altre posizioni che il test t avrebbe potuto assumere sempre rimanendo nel piano β (fig. 43).

Nella posizione t' la proiezione t'_c diminuisce e aumenta invece la proiezione sul vettore del fattore specifico, mentre invece nella posizione t'' la proiezione t''_c e' maggiore ed e' minore la proiezione sul vettore del fattore specifico.

Se invece del test t ci fosse un test la cui posizione nello spazio dei tests corrisponde a t' (1), la proiezione t_c sarebbe piu' piccola; ma siccome $t_c = \sqrt{a_t^2 + b_t^2}$, quando t_c diminuisce, deve diminuire a_t , o b_t o ambedue. Cioe' diminuisce la saturazione

del test nei fattori comuni e quindi la sua correlazione con l'uno o con l'altro o con tutti e due i fattori comuni; e il contrario avviene se t_c aumenta, se cioe' il test ha la posizione t'' .

Ma nello spazio dei fattori comuni, finche' il vettore t resta nel piano β , gli angoli che la sua proiezione forma coi vettori A e B rimangono invariati.

E' quindi chiaro che la correlazione di un test con un fattore (fig. 44) non puo' essere espressa soltanto in funzione dell'angolo tra la proiezione del test nello spazio dei fattori comuni e il vettore fattoriale; e' necessario che l'espressione geometrica della corre-

(1) Cioe', in altre parole, se invece del test t fosse stato introdotto nella batteria un test t' che differisse da t soltanto perche' piu' saturo del fattore specifico.

*un lavoro sul fattore e proiezione del test in spazio
in base al fatto che le proiezioni sul fattore
sono uguali, quindi i coseni sono uguali?*

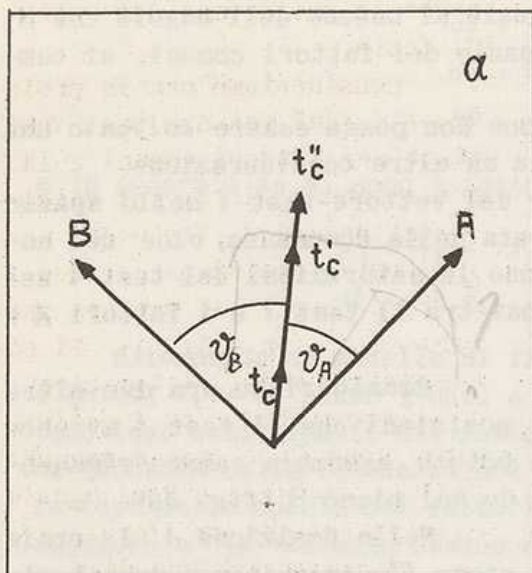


Fig. 44.

che avviene quando si considerano i vettori dei tests nello spazio a $m+k$ dimensioni; ed era quindi pienamente valida nelle situazioni finora considerate.

Nel caso qui considerato, essendo i vettori fattoriali di lunghezza unitaria, la correlazione fra t ed A e fra t e B e' espressa nelle formule

$$r_{At} = t_c \cos \theta_A \quad r_{Bt} = t_c \cos \theta_B$$

4. La proiezione sui vettori fattoriali

La formula del prodotto scalare tra vettori consente dunque di calcolare la correlazione fra due tests o fra un test e un fattore, anche a partire dalle proiezioni dei tests nello spazio dei fattori comuni, con la complicazione di dover tenere conto anche della grandezza dei vettori oltre che dell'angolo che li separa.

Tuttavia questo svantaggio e' compensato in quanto quei dati importantissimi che sono ad un tempo la correlazione fra un test e un fattore e la saturazione fattoriale di un test ($r_{tA} = a_t$, $r_{tB} = b_t$, ecc.) si possono leggere direttamente nel modello geometrico, per un'altra via.

Riprendiamo in esame il piano individuato dai due vettori fattoriali A e B (fig. 45), cioe' lo spazio dei fattori comuni (che in questo caso e' un piano, essendo due i fattori comuni), spazio che contie-

lazione tenga conto, oltre che dell'angolo, anche della lunghezza della proiezione del vettore test.

In effetti la formula completa della correlazione e' una funzione della lunghezza dei vettori e dell'angolo da essi racchiuso. La correlazione e' espressa cioe' dal cosiddetto prodotto scalare dei due vettori (tests o fattori che siano):

$$r_{xy} = V_x V_y \cos \theta_{xy}$$

(in cui V_x e V_y sono le misure dei due vettori x e y).

La formula che e' stata utilizzata finora $r_{xy} = \cos \theta_{xy}$ e' fondata sul presupposto che V_x e V_y siano ambedue uguali a 1, cioe'

*in quanto
tiene conto*

*o solo
xy?*

*Finora
in che
condizioni
soltanto
il cos
ecc.*

X

Già rappresenta con ciò si vorrebbe a perdere il vantaggio di leggere direttamente dai diagrammi le correlazioni, vantaggi che era una delle ragioni che avevano portati ad abbandonare i diagrammi ortogonali. Tuttavia quei dati

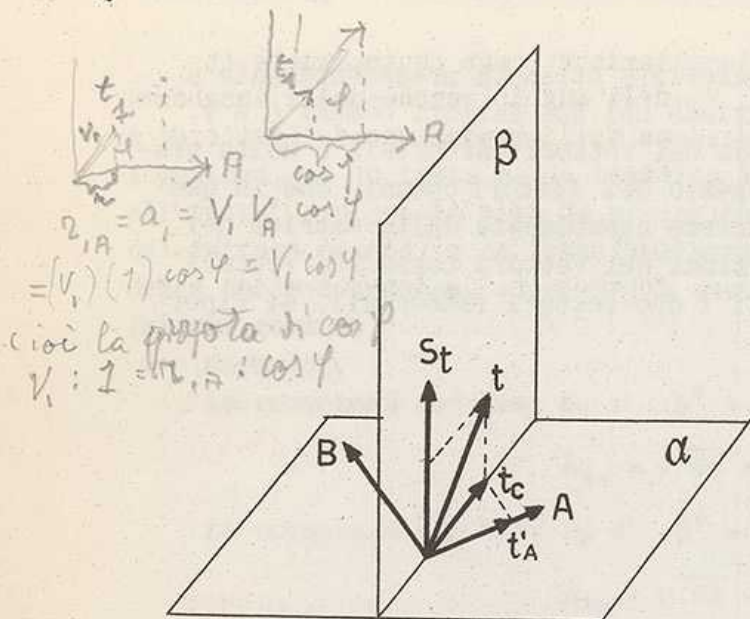


Fig. 45.

tissima constatazione che anche nello spazio dei fattori comuni, le proiezioni dei vettori-tests sui vettori fattoriali sono le saturazioni dei tests nei rispettivi fattori. Quindi nei diagrammi che rappresentano lo spazio dei fattori comuni (quando e' bidimensionale) o due delle

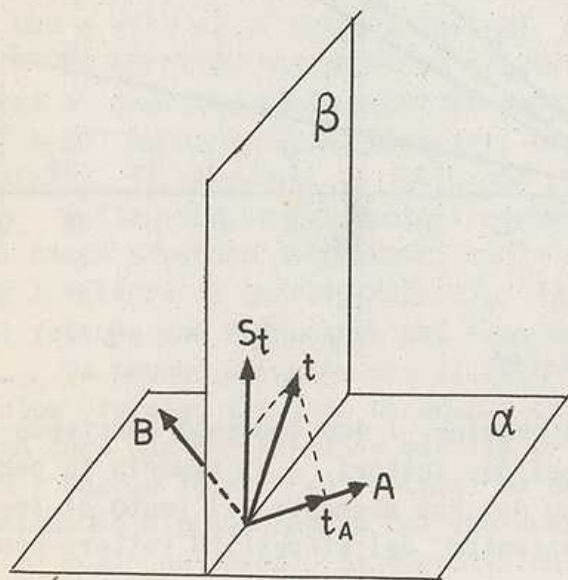


Fig. 46.

ne oltre ai vettori fattoriali anche le proiezioni dei vettori tests.

Consideriamo ora la proiezione t_c del vettore test t sul piano dei fattori comuni e la proiezione t'_A di t_c sul vettore fattoriale A (fig. 45); e inoltre la proiezione t_A del vettore test t sul vettore fattoriale A (fig. 46) (1). Si dimostra (2) che $t'_A = t_A$, cioè che la proiezione di t nel piano dei fattori comuni A e B e' uguale alla proiezione su A di t .

Ma la proiezione di t su A equivale a $\cos t_A = r_{tA} = a_t$; per cui si giunge all'importantissima constatazione che anche nello spazio dei fattori comuni, le proiezioni dei vettori-tests sui vettori fattoriali sono le saturazioni dei tests nei rispettivi fattori. Quindi nei diagrammi che rappresentano lo spazio dei fattori comuni (quando e' bidimensionale) o due delle sue dimensioni (quando e' tridimensionale o pluridimensionale) si possono leggere direttamente le saturazioni dei tests nei fattori comuni.

5. La struttura bifattoriale (fattori comuni G e V) nella rappresentazione geometrica

Esaminate le caratteristiche fondamentali della rappresentazione geometrica dello spazio dei fattori comuni, e' utile, analogamente a quanto e' stato fatto per la soluzione monofattoriale, considerare un esempio concreto. Sara' utiliz-

(1) In altre parole t'_A e' la proiezione di una proiezione di t , mentre t_A e' la proiezione di t .

(2) Non riportiamo la dimostrazione.

(1) *de sono in realtà già proiezioni dei vettori o più esattamente le proiezioni delle proiezioni dei vettori tests (in quanto i vettori tests non si trovano sulle parti dei fattori comuni)*

Handwritten notes on the right margin:
 t_A = a_i = V_i V_A cos phi
 (V_i) (1) cos phi = V_i cos phi
 V_i : 1 = t_{A,A} : cos phi

zata a tale scopo la struttura fattoriale ottenuta precedentemente analizzando una matrice di correlazione nei due fattori comuni G e V.

La rappresentazione geometrica dei vettori fattoriali e delle proiezioni dei vettori-tests nello spazio dei fattori comuni, che in questo caso è bidimensionale, si ottiene agevolmente dalla matrice dei fattori comuni, che sono le proiezioni dei vettori tests sui vettori fattoriali (v. fig. 47); tracciati i due vettori fattoriali, si ripor-

*nel
modello
geometrico*

*Setore
su un
avvece
casi, o
a b*

	G	V
k_1	.9	.2
k_2	.8	.5
k_3	.6	.6
k_4	.4	.3
k_5	.2	.2
i_1	.8	.0
i_2	.7	.0
i_3	.6	.0
i_4	.5	.0
i_5	.3	.0

Matrice dei fattori comuni

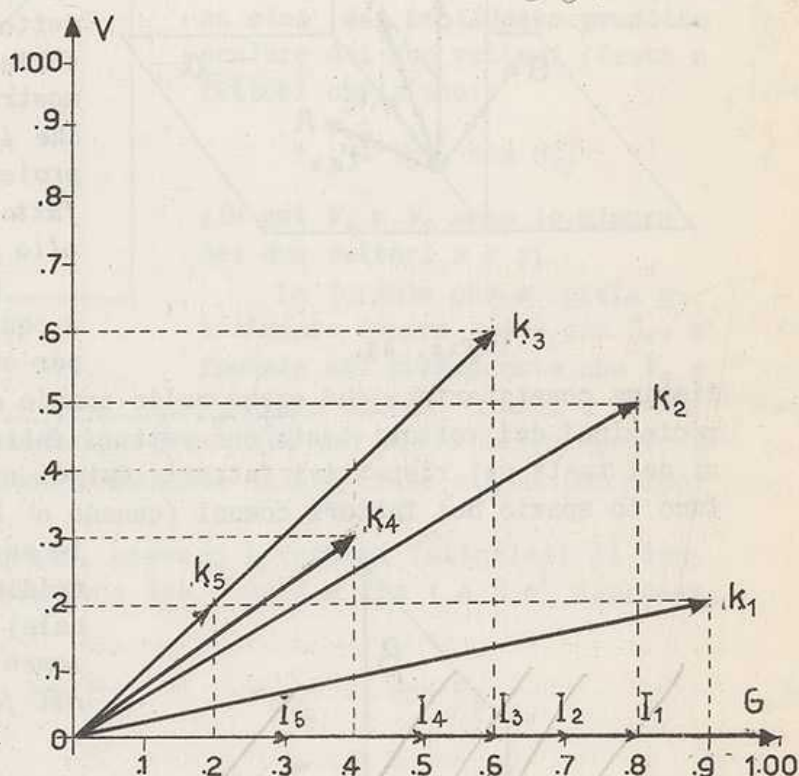


Fig. 47.

tano, per ogni test, a partire dall'origine, i due segmenti corrispondenti alle misure delle soluzioni nei due fattori, e si traccia la perpendicolare all'estremità di ognuno dei due segmenti; il punto di incontro delle perpendicolari è l'estremità del rispettivo vettore-test.

Così ad esempio, riportando sul vettore G la misura .9 e sul vettore V la misura .2 e tracciando le perpendicolari alle estremità si individua, al loro punto d'incontro, l'estremità del vettore-test k_1 , che si può in tal modo tracciare, a partire dall'origine dei vettori (1).

(1) In altre parole si ricostruiscono i vettori-tests a partire dalle loro proiezioni sui vettori fattoriali.

*le proiezioni dei vettori tests
nel sistema fattoriale*

Il diagramma di fig. 47 rappresenta una *struttura fattoriale*. In esso sono rappresentati i due fattori comuni che in questo caso sono G e V , i quali hanno ambedue la dimensione 1, sono cioè vettori unitari. I vettori dei 10 tests della batteria hanno invece dimensioni inferiori all'unità, in quanto sono le proiezioni dei vettori-tests nello spazio dei fattori comuni, e la loro lunghezza è pari ad h_t , la radice quadrata della comunanza, cioè della quota di varianza determinata dai fattori comuni.

Esempio:

La comunanza del test k_1 è $.9^2 + .2^2 = .85 = h_{k_1}^2$ quindi

$$h_{k_1} = \sqrt{.85} = .91$$

La comunanza del test k_5 è $.2^2 + .2^2 = .08 = h_{k_5}^2$ quindi

$$h_{k_5} = \sqrt{.08} = .28$$

Va ricordato che $1 - h^2 = u^2$ da cui $u = \sqrt{1 - h^2}$, formula che permette il calcolo del fattore specifico dei tests (1).

La struttura fattoriale di fig. 47 presenta alcune caratteristiche particolari. Si nota anzitutto che i vettori-tests (2) si trovano tutti entro l'angolo di 90° limitato dai due vettori fattoriali G e V .

Cio' sta ad indicare a) che tutti i tests sono correlati positivamente tra loro e b) che tutti i tests hanno una correlazione positiva o nulla (non negativa) con ambedue i fattori, cioè che hanno, nell'uno e nell'altro dei due fattori, saturazioni positive o nulle.

La correlazione positiva dei tests fra loro e dei tests con i fattori è indicata dalle relative separazioni angolari: gli angoli tra 0° e 90° hanno i coseni positivi, ed essendo positive le lunghezze dei vettori, il risultato di $V_1 V_2 \cos(1,2)$ non può che essere positivo.

Dalla matrice dei fattori comuni (fig. 47) risulta che un gruppo di tests presenta saturazioni nulle in uno dei due fattori: nel diagramma i vettori di questi tests (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) risultano applicati al vettore del fattore da cui sono saturati.

Va tenuto presente che il fatto che tali vettori siano sovrapposti (cioè formino tra loro un angolo di 0°) non significa che presentino fra loro una correlazione massima ($r = 1$). Infatti, quando, essendo zero l'angolo formato dai vettori di due tests, si ha $\cos 0 = 1$, la correlazione dipende ancora dai due coefficienti $V_1 = h_1$ e $V_j = h_j$.

Così ad esempio la correlazione fra i due tests i_4 ed i_5 , i cui vettori sono sovrapposti risulta essere $(.3) (.5) (1) = .15$, in quanto $h_{i_4} = .5$, $h_{i_5} = .3$ e $\cos(h_{i_4}, h_{i_5}) = 1$. Nella matrice delle correlazioni si legge infatti $r_{i_4 i_5} = .15$.

(1) Va ricordato che si tratta di dati privi di errori di campionatura.

(2) D'ora in poi li chiameremo così, avendo già messo in evidenza il fatto che si tratta di proiezioni, nello spazio dei fattori comuni, dei vettori-tests unitari.

0.92?

$V_i V_j \cos \theta_{ij}$
 L.G. il solo
 fattore di
 cui sono
 saturati

7.0

Dal precedente esempio risulta che dal diagramma di fig. 47 si possono ricostruire le correlazioni fra i tests. Anche l'inverso e' vero: dalla matrice delle correlazioni si puo' ricostruire il diagramma; ma solo in parte. Dalla matrice delle correlazioni si puo' cioe' costruire la *configurazione dei tests*, non la *struttura fattoriale* (1).

6. Configurazione dei tests e struttura fattoriale

Il modello geometrico permette di mettere in chiaro alcuni punti importanti. Si e' detto precedentemente che nella matrice delle correlazioni e' implicita la dimensionalita' dello spazio dei fattori comuni. Infatti il numero di dimensioni dello spazio dei fattori comuni e' pari al rango minimo che puo' assumere la matrice delle correlazioni scegliendo opportunamente le comunanze. E' ugualmente implicita, cioe' si puo' inferire dal rango della matrice anche la struttura fattoriale, cioe' l'insieme delle saturazioni dei tests nei fattori comuni?

Vediamo anzitutto che cosa si puo' ricavare direttamente dalla matrice delle correlazioni (una volta che ne sia stato determinato il rango) senza ricorrere all'analisi fattoriale.

Dalla comunanza (2) di ogni singolo test (h^2) si ottiene direttamente, estraendo la radice quadrata, la lunghezza della proiezione del vettore-test nello spazio dei fattori comuni (h); dal coefficiente di correlazione fra due tests si puo' quindi ricavare l'angolo che forma-

(1) Anche la struttura fattoriale e' ricavata dalla matrice delle correlazioni; ma come si vedra', essa non e' univocamente determinata.

(2) Siccome la matrice delle correlazioni e' priva di comunanze (le caselle della diagonale principale sono vuote) e le comunanze si calcolano in base alle saturazioni fattoriali ($h_t^2 = a_t^2 + b_t^2 + \dots + k_t^2$) sorge naturalmente l'obiezione che se per costruire la configurazione dei tests occorrono le comunanze, la configurazione dei tests presuppone l'analisi fattoriale. Va notato tuttavia che se l'analisi fattoriale e' il procedimento piu' comodo per calcolare le comunanze, vi e' anche un procedimento non-fattoriale per giungere allo stesso risultato.

Si comincia con lo stabilire il rango della matrice priva di comunanze (calcolando tutti i determinanti di ordine m - se la matrice e' di ordine $m - m-1, m-2$ ecc., finche' si trova l'ordine per il quale non tutti i determinanti dei minori si annullano - evitando sempre i minori che comprendono i vuoti della diagonale); se il rango della matrice e' k , si passa quindi a completare i minori di ordine $k+1$ che comprendono elementi della diagonale, in modo che si annullino. Si ottiene in tal modo la matrice delle correlazioni completa di comunanze senza ricorrere all'analisi fattoriale.

Il procedimento risulterebbe complicatissimo nel caso di una matrice di correlazioni sperimentali, affette da errori di campionatura; ma a noi interessava soltanto mostrare che da un punto di vista teorico il calcolo delle comunanze non implica l'analisi fattoriale.

Va tenuto infine presente che mentre nel caso speciale della matrice gerarchica conoscere le comunanze significa conoscere le saturazioni fattoriali (poiche' essendoci un solo fattore, $h_t^2 = a_t^2$) e quindi equivale ad aver fatto l'analisi fattoriale, quando la matrice delle correlazioni e' di rango maggiore di 1, conoscendo le comunanze non si conoscono ancora le saturazioni fattoriali.

stabilire
 x-1) procede nel considerare come incognite le comunanze e determinandole di volta in volta se esistono dei valori delle comunanze per i quali il determinante si annulla -

la configurazione che si ricerca è la configurazione delle proiezioni
dei vettori tests nello spazio dei fattori comuni

no fra loro i due vettori nello spazio dei fattori comuni.

Prendiamo come esempio la matrice di correlazioni che è stata analizzata nel § 5 (Cap. I, Parte II). Ne riproduciamo qui la parte relativa ai primi 5 tests, con inserite le comunanze.

Dalle comunanze ricaviamo le dimensioni dei vettori tests. Per es.:

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	
k_1	.85	.82	.66	.42	.22	h_{k_1} (lunghezza vettore test k_1) = $\sqrt{.85} = .9219$
k_2	.82	.89	.78	.47	.26	h_{k_2} (lunghezza vettore test k_2) = $\sqrt{.89} = .9434$
k_3	.66	.78	.72	.42	.24	h_{k_3} (lunghezza vettore test k_3) = $\sqrt{.72} = .8485$
k_4	.42	.47	.42	.25	.14	h_{k_4} (lunghezza vettore test k_4) = $\sqrt{.25} = .5000$
k_5	.22	.26	.24	.14	.08	h_{k_5} (lunghezza vettore test k_5) = $\sqrt{.08} = .2828$

Per calcolare la separazione angolare tra due vettori, si calcola $\cos \theta$ dalla formula della correlazione e poi si legge il valore dell'angolo nella tabella dei coseni.

Così, da $r_{xy} = h_x h_y \cos \theta_{xy}$ si ricava

$$\cos \theta_{xy} = \frac{r_{xy}}{h_x h_y}$$

$$r_{k_1 k_2} = .82, \quad h_{k_1} = .9219, \quad h_{k_2} = .9434,$$

$$\cos \theta_{k_1 k_2} = \frac{.82}{(.9219)(.9434)} = .9428, \quad \theta_{k_1 k_2} = 19^\circ 30'$$

$$r_{k_1 k_3} = .66, \quad h_{k_1} = .9219, \quad h_{k_3} = .8485,$$

$$\cos \theta_{k_1 k_3} = \frac{.66}{(.9219)(.8485)} = .8437, \quad \theta_{k_1 k_3} = 32^\circ 30'$$

$$r_{k_1 k_4} = .42, \quad h_{k_1} = .9219, \quad h_{k_4} = .5000,$$

$$\cos \theta_{k_1 k_4} = \frac{.42}{(.9219)(.5000)} = .9110, \quad \theta_{k_1 k_4} = 24^\circ 20'$$

$$r_{k_1 k_5} = .22, \quad h_{k_1} = .9219, \quad h_{k_5} = .2828,$$

$$\cos \theta_{k_1 k_5} = \frac{.22}{(.9219)(.2828)} = .8438, \quad \theta_{k_1 k_5} = 32^\circ 30'$$

$$r_{k_2 k_3} = .78, \quad h_{k_2} = .9434, \quad h_{k_3} = .8485,$$

$$\cos \theta_{k_2 k_3} = \frac{.78}{(.9434)(.8485)} = .9743, \quad \theta_{k_2 k_3} = 13^\circ$$

$$r_{k_2 k_4} = .47, \quad h_{k_2} = .9434, \quad h_{k_4} = .5000,$$

$$\cos k_2 k_4 = \frac{.47}{(.9434)(.5000)} = .9963, \quad \theta_{k_2 k_4} = 4^\circ 50'$$

$$r_{k_2 k_5} = .26, \quad h_{k_2} = .9434, \quad h_{k_5} = .2828,$$

$$\cos k_2 k_5 = \frac{.26}{(.9434)(.2828)} = .9475, \quad \theta_{k_2 k_5} = 13^\circ$$

$$r_{k_3 k_4} = .42, \quad h_{k_3} = .8485, \quad h_{k_4} = .5000,$$

$$\cos k_3 k_4 = \frac{.42}{(.8485)(.5000)} = .9900, \quad \theta_{k_3 k_4} = 8^\circ$$

$$r_{k_3 k_5} = .24, \quad h_{k_3} = .8485, \quad h_{k_5} = .2828,$$

$$\cos k_3 k_5 = \frac{.24}{(.8485)(.2828)} = 1.00, \quad \theta_{k_3 k_5} = 0^\circ$$

$$r_{k_4 k_5} = .14, \quad h_{k_4} = .5000, \quad h_{k_5} = .2828,$$

$$\cos k_4 k_5 = \frac{.14}{(.5000)(.2828)} = .9900, \quad \theta_{k_4 k_5} = 8^\circ$$

Conoscendo in tal modo le lunghezze dei vettori-tests e le loro separazioni angolari, si e' in grado di costruire la loro configurazione geometrica (1), che dipende dunque esclusivamente dalla matrice delle correlazioni.

Riferendoci al nostro esempio, mettendo a confronto i due diagrammi della configurazione dei tests (fig. 48) e della struttura fattoriale (fig. 49) siamo quindi in grado di precisare l'apporto dell'analisi fattoriale. Mediante l'analisi fattoriale la configurazione dei tests viene ad essere collocata entro ad un sistema di riferimento - il sistema dei vettori fattoriali ortogonali - funzionante come un sistema di coordinate che consente di descrivere e riprodurre la configurazione.

(1) Cioe' la configurazione geometrica delle proiezioni dei vettori-tests in uno spazio avente un numero di dimensioni pari al rango della matrice delle correlazioni.

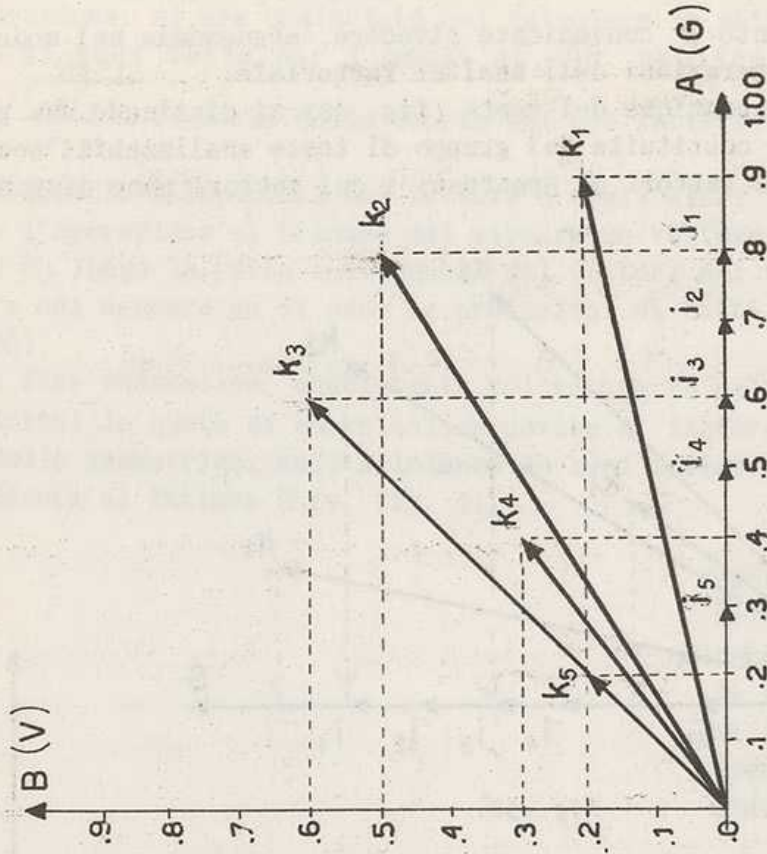


Fig. 49.
Struttura fattoriale

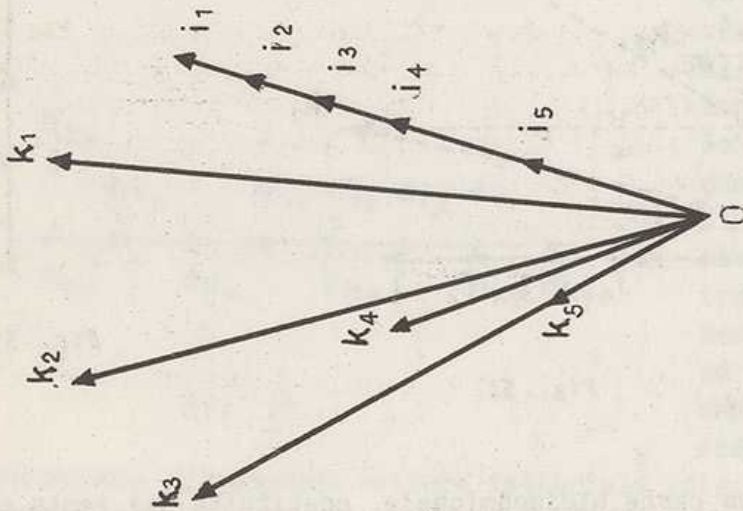


Fig. 48.
Configurazione dei tests

*forme a più dimensioni
(v. Fig. 47)*

Si, forse è inutile: vorrei i fattori con 3

probabilmente inutile, per ora no, metterlo al 6, perché il G è la base con il 8

7. L'analisi in due fattori comuni nel modello geometrico

A questo punto è conveniente rivedere, seguendo nel modello geometrico, le operazioni dell'analisi fattoriale.

Nella configurazione dei tests (fig. 48) si distingue una parte unidimensionale, costituita dal gruppo di tests analizzabili secondo la teoria dei due fattori di Spearman, i cui vettori sono disposti lun-

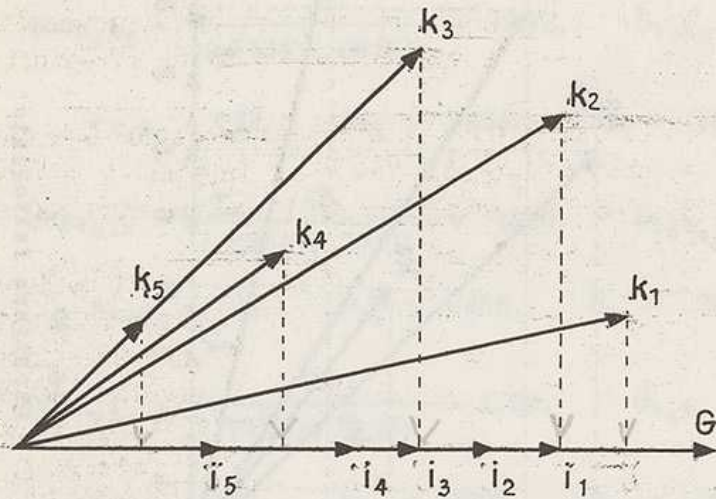


Fig. 50.

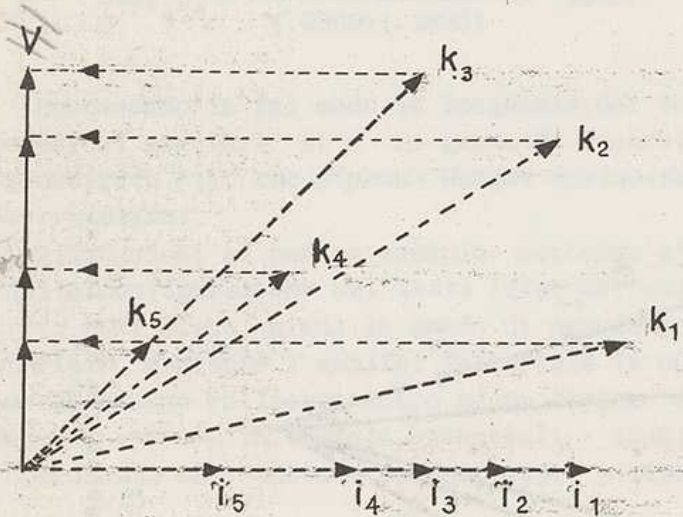


Fig. 51.

Fig. 52.

questi sono i vettori non il valore V

K' off. 8x

go una retta, e una parte bidimensionale, costituita dai tests che per essere descritti richiedono due fattori, cioè tests i cui vettori hanno direzioni diverse, ma sono tutti compresi nel piano.

è un'operazione nello spazio dei fattori comuni

L'analisi aveva preso le mosse dalla parte unidimensionale della configurazione: si era cominciato col calcolare le saturazioni nel fattore G di quei tests per i quali si puo' applicare la formula

$$a_x = \sqrt{\frac{r_{xy}r_{xz}}{r_{yz}}} \text{ ricavata dalla teoria dei due fattori e quindi si era-}$$

no calcolate le saturazioni nel fattore G degli altri tests. Geometricamente l'operazione si traduce nel situare un vettore fattoriale (il vettore G) lungo la retta individuata dai vettori dei tests monofattoriali, e nel segnare su di esso le proiezioni di tutti i vettori-tests (fig. 50).

La fase successiva, consistente nel sottrarre dalla matrice delle correlazioni le quote di correlazione dovute al fattore G, si traduce, nel modello geometrico, nell'eliminare in ogni vettore-test la componente dovuta al fattore G (v. fig. 51).

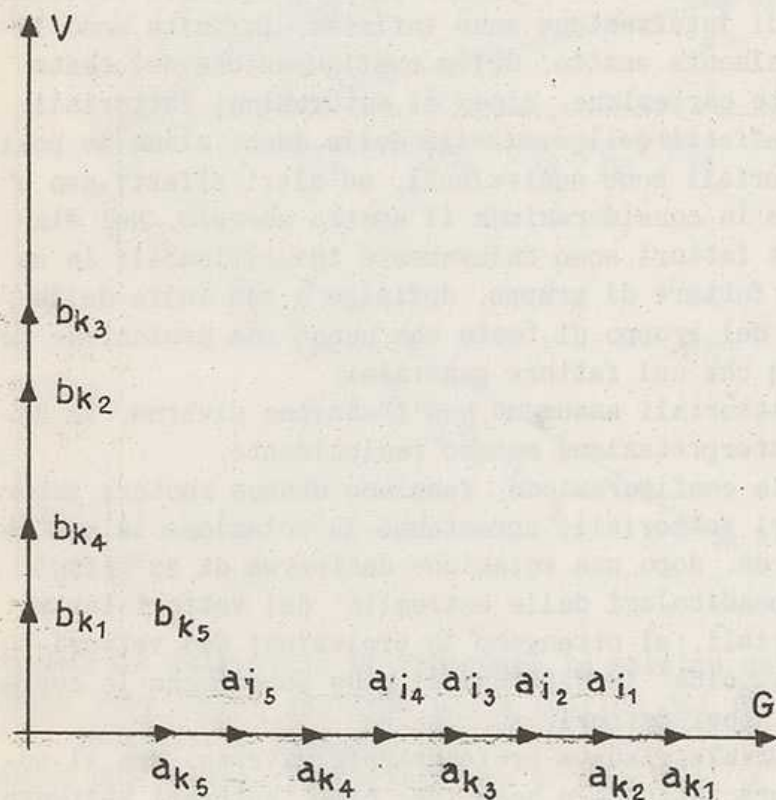


Fig. 53.

I tests monofattoriali non hanno altre componenti, perciò sottratta la varianza dovuta al fattore G, non avendo varianza residua, scompaiono.

I tests bifattoriali, "tolta" la quota di varianza dovuta al fattore G, e quindi la dimensione nella direzione del vettore G, diventano monofattoriali, cioè ad una dimensione soltanto: le componenti residui dei vettori si dispongono lungo una stessa retta. Sottratta la seconda dimensione (con lo stesso procedimento, essendo la matrice residua monofattoria-

le) proiettandola sul secondo vettore fattoriale (fig. 52) non rimane alcuna dimensione.

Il risultato dell'analisi, la matrice dei fattori comuni, cioè la

matrice delle saturazioni fattoriali dei tests nei fattori G e V (1) si traduce geometricamente nelle proiezioni dei vettori-tests sui due vettori fattoriali (v. fig. 53).

8. L'indeterminazione della soluzione fattoriale

Nei precedenti paragrafi si è veduto che le saturazioni dei tests nei fattori, cioè le coordinate di ogni singolo test rispetto al sistema di assi ortogonali individuato dai vettori fattoriali, bastano a determinare le posizioni dei vettori-tests.

Tuttavia va tenuto presente che questa importante proprietà del sistema di assi cartesiani non è per nulla legata ad una particolare posizione degli assi rispetto ai vettori-tests. Se scegliamo un'altra posizione per gli assi, otterremo per ogni test delle coordinate (cioè delle saturazioni) diverse da quelle ottenute precedentemente, le quali però consentono altrettanto bene di descrivere la configurazione dei tests e di riprodurre la matrice delle correlazioni. Siccome le posizioni che due rette ortogonali di un piano possono assumere ruotando intorno al loro punto di intersezione sono infinite, infinite sono le descrizioni, tutte ugualmente esatte, della configurazione dei tests in termini di coordinate cartesiane, cioè di saturazioni fattoriali.

Tuttavia se agli effetti dell'esattezza della descrizione le posizioni dei vettori fattoriali sono equivalenti, ad altri effetti non è così. Basta riprendere in considerazione il nostro esempio. Nel diagramma di fig. 50 i due fattori sono chiaramente identificabili in un fattore generale ed un fattore di gruppo, definito a sua volta dalle caratteristiche comuni del gruppo di tests che hanno una proiezione sul fattore di gruppo oltre che sul fattore generale.

Ma se i vettori fattoriali assumono una posizione diversa, la descrizione e quindi l'interpretazione mutano radicalmente.

Mantenendo ferma la configurazione, facciamo dunque ruotare intorno all'origine i vettori fattoriali, arrestando la rotazione in una posizione qualsiasi, per es. dopo una rotazione destrorsa di 33° (fig. 54). Tracciando le perpendicolari dalle estremità dei vettori-tests ai nuovi vettori fattoriali, si ottengono le proiezioni dei vettori-tests sui nuovi fattori, cioè le saturazioni (che sono anche le correlazioni) dei tests nei nuovi fattori.

La struttura fattoriale risulta profondamente diversa. Non vi sono più tests a struttura fattoriale semplice, cioè saturati soltanto da un fattore comune, oltre che dal fattore specifico. Tutti e due i fattori saturano ciascun test, cioè, in altre parole, in questa soluzione fattoriale ci sono due fattori generali.

(1) La matrice dei fattori comuni (v. fig. 47) è costituita dalle due prime colonne della matrice fattoriale completa, riprodotta in tab. 36.

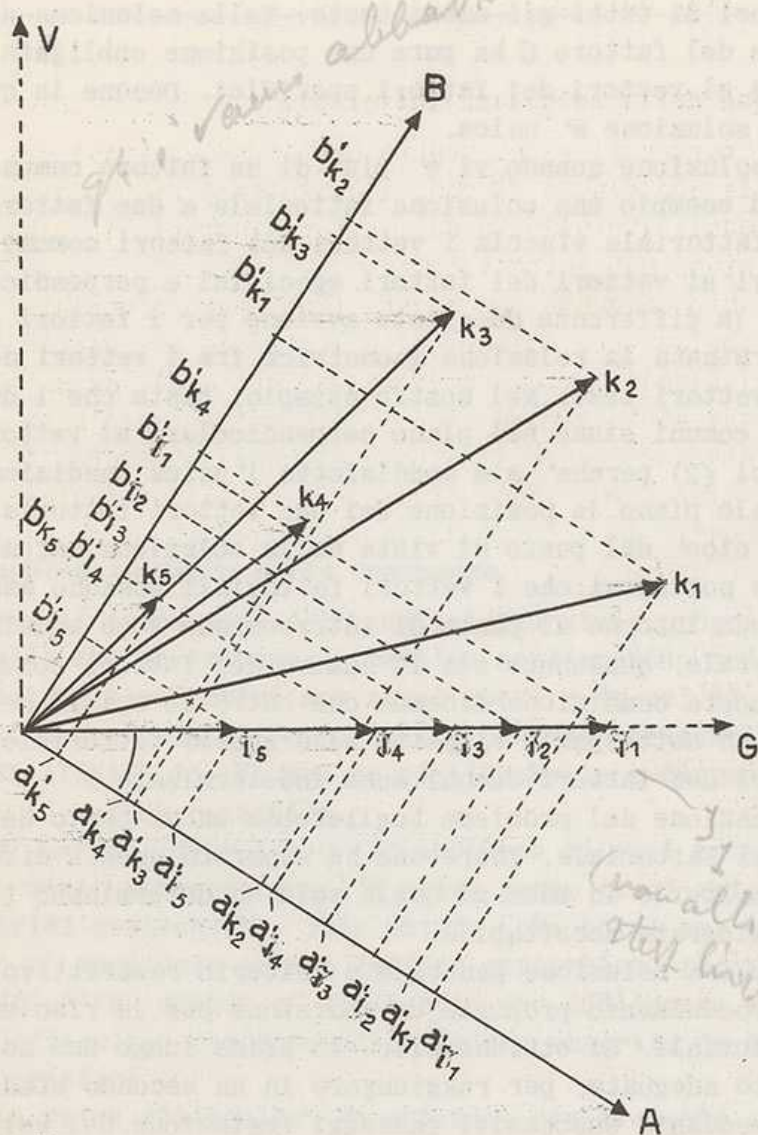


Fig. 54.

Le saturazioni nei due nuovi fattori A e B, che si leggono dal diagramma, costituiscono la nuova matrice fattoriale, diversissima da quella relativa ai fattori G e V.

L'interpretazione dei due fattori in termini psicologici presenterebbe delle difficoltà probabilmente insuperabili. Tuttavia dal punto di vista matematico, i fattori A e B descrivono la matrice delle correlazioni altrettanto bene quanto i fattori G e V. Ciò è provato dal fatto che partendo dalla nuo-

va matrice fattoriale si riproduce la matrice delle correlazioni altrettanto bene quanto partendo dalla matrice dei fattori G e V.

Tuttavia va tenuto presente che tale libertà nel fissare le posizioni dei vettori fattoriali non è assoluta. A prescindere dal problema del significato psicologico dei fattori in dipendenza delle diverse posizioni dei vettori fattoriali rispetto alla configurazione dei tests, non va dimenticato che vi sono dei veri e propri vincoli posti dalla natura stessa della soluzione fattoriale, che determinano rigidamente la posizione di singoli vettori.

Riprendiamo in considerazione, a tale proposito, lo spazio fattoriale completo a $m+k$ dimensioni. Il primo tra i suddetti vincoli è co-

in parte
 costituito dalla posizione obbligata dei vettori dei fattori specifici, ognuno dei quali, essendo specifico di un singolo test, dev'essere perpendicolare ai vettori di tutti gli altri tests. Nella soluzione di Spearman, il vettore del fattore G ha pure una posizione obbligata, essendo perpendicolare ai vettori dei fattori specifici. Dunque in questo caso particolare la soluzione e' unica.

Diversa e' la soluzione quando vi e' piu' di un fattore comune.

Consideriamo ad esempio una soluzione fattoriale a due fattori comuni. La soluzione fattoriale vincola i vettori dei fattori comuni ad essere perpendicolari ai vettori dei fattori specifici e perpendicolari fra loro (1), ma (a differenza da quanto avviene per i fattori specifici) non e' determinata la relazione geometrica fra i vettori dei fattori comuni e i vettori-test. Nel nostro esempio, basta che i due vettori dei fattori comuni siano nel piano perpendicolare ai vettori dei fattori specifici (2) perche' sia soddisfatta l'unica condizione vincolante. Entro tale piano la posizione dei due vettori fattoriali non e' determinata, cioe' dal punto di vista della soluzione matematica tutte le infinite posizioni che i vettori fattoriali possono assumere nel piano, ruotando intorno al punto di intersezione sono ugualmente accettabili. In generale, qualunque sia il numero dei fattori comuni, si puo' esprimere questa condizione dicendo che entro lo spazio dei fattori comuni (che e' un sottospazio rispetto allo spazio fattoriale) le posizioni dei vettori dei fattori comuni sono indeterminate.

Tale indeterminazione del problema toglierebbe buona parte del significato all'analisi fattoriale. Thurstone ha superato questa difficolta' fissando un criterio in base al quale solo un determinato tipo di soluzione e' considerata accettabile.

Questo dualismo fra soluzione generale e criterio restrittivo si ritrova anche nel procedimento proposto da Thurstone per la risoluzione dei problemi fattoriali. Si ottiene cioe' in primo luogo una soluzione matematicamente adeguata, per raggiungere in un secondo stadio dell'elaborazione, mediante successivi passaggi (rotazione dei vettori fattoriali nello spazio dei fattori comuni), la soluzione "adeguata" al problema che l'analisi fattoriale doveva risolvere.

Perche' ogni specifico e' perpendicolare anche a tutti i test comuni. Il rapporto fra fattori comuni e test occasionali e' determinato.

(1) Vedremo in seguito che non sempre si pone quest'ultima condizione.

(2) Ricordiamo che qui si tratta di un iperspazio ad $m+2$ dimensioni in cui m e' il numero dei tests (e quindi anche il numero dei fattori specifici).

L'ANALISI CENTROIDE DI THURSTONE

Capitolo IV

1. L'approssimazione delle comunanze

Per la prima fase dell'analisi Thurstone propone diversi metodi, ma quello che ha trovato la massima applicazione nel periodo in cui i calcolatori elettronici non erano usati o in cui il loro uso non era ancora generalizzato presso le istituzioni scientifiche, e che è tuttora utilizzato da chi non ha continuamente a disposizione tali sussidi, è il metodo centroide.

Il metodo centroide è lo sviluppo di quel metodo delle sommatorie che è stato presentato nella prima parte tra i metodi per analizzare le matrici gerarchiche. Tale metodo, che è di una semplicità lineare quando è applicato ad una matrice gerarchica, presenta però una serie di difficoltà quando è utilizzato per analizzare matrici di rango > 1 , difficoltà che sono state talora superate da Thurstone con eleganti artifici.

La prima difficoltà da superare era presente anche nelle matrici gerarchiche.

Il metodo richiede infatti che la matrice delle correlazioni sia completa di comunanze. Nel caso della matrice gerarchica si trattava di trovare un'approssimazione delle comunanze, cioè di quei valori che, inseriti nelle caselle della diagonale principale, avrebbero determinato l'annullamento di quelle tetradi che interessavano le caselle della diagonale. Ma nel caso della matrice non gerarchica, cioè di rango > 1 , si dovrebbe anzitutto conoscere il rango della matrice, per sapere fino a che ordine devono arrivare i determinanti che devono annullarsi.

Sta il fatto però che la determinazione del rango di una matrice costituita da coefficienti di correlazione sperimentali, e perciò affetti da errori casuali, rappresenterebbe un compito estremamente lungo e complicato.

Resta la possibilità di adottare l'artificio utilizzato nel caso

*il cui
giudicamento
è simile a
quello di
metodi
usati con
i calcolatori
ma
a differenza
di questi
è semplice
perché
il vantaggio
di poter
convergere
risultato con
meno semplici
e per questo
compensabile*

non può essere affrontato direttamente

della matrice gerarchica, cioè di sostituire le comunanze con delle approssimazioni grossolane, e procedere per approssimazioni successive, fino ad ottenere un grado di precisione accettabile (1).

Ma con ciò si ottiene soltanto di rendere possibile l'applicazione pratica del metodo di analisi, senza conoscere il rango della matrice.

E' questa la via che, per necessita', viene seguita. Ma compiere l'analisi di una matrice senza conoscerne il rango rappresenta una rinuncia molto grave. Da un punto di vista teorico, la relazione fra rango della matrice e numero dei fattori comuni, e' il pilastro dell'analisi fattoriale, ed e' molto insoddisfacente non potersi fondare sulla teoria nell'applicazione pratica del metodo. Ma anche dal punto di vista pratico la mancata conoscenza del rango della matrice porta ad una difficoltà non trascurabile. Infatti in tal modo si ignora il numero dei fattori comuni, e percio' occorre un criterio per stabilire quando si deve interrompere l'analisi; a che punto cioè, continuando l'estrazione dei fattori, si estrarrebbero dei fattori fittizi, in quanto si utilizzerebbero dei residui che sono dovuti, non alle variabili che i tests misurano, ma agli errori casuali.

risultato almento

2: I presupposti teorici dell'analisi di una matrice non-gerarchica col metodo delle sommatorie

Il procedimento proposto da Thurstone consiste dunque nell'estrarre successivamente i singoli fattori dalla matrice delle correlazioni col metodo delle sommatorie, dopo aver completato la matrice con una approssimazione delle comunanze. Tuttavia il metodo fondato sulle somme dei termini della matrice, semplice e limpido nel suo significato finché si tratta di estrarre il fattore generale da una matrice gerarchica, si complica notevolmente quando il numero di fattori e' maggiore di 1.

Le difficoltà si presentano immediatamente se si tenta di applicare lo stesso schema di ragionamento seguito nel caso della matrice gerarchica.

A scopo di chiarimento e' utile il raffronto fra lo schema della matrice gerarchica (rango 1) e lo stesso schema esteso ad una matrice di rango 2, cioè a due fattori.

Nel caso della matrice di rango 1, Σ , cioè la somma di tutti i termini della matrice (comprese le comunanze) e' il quadrato della somma delle saturazioni dei tests nel fattore generale, quindi estraendo

(1) Ricordiamo che la soluzione adottata generalmente e' quella di usare come approssimazione della comunanza di un test, il piu' elevato coefficiente di correlazione della relativa colonna (o riga) della matrice; e di ripetere i calcoli per ottenere una migliore approssimazione soltanto se l'ordine della matrice e' inferiore a 10.

MATRICE DI RANGO 1
Correlazioni espresse in termini di saturazioni

Tests	1	2	3	4
1	a_1^2	$a_1 a_2$	$a_1 a_3$	$a_1 a_4$
2	$a_2 a_1$	a_2^2	$a_2 a_3$	$a_2 a_4$
3	$a_3 a_1$	$a_3 a_2$	a_3^2	$a_3 a_4$
4	$a_4 a_1$	$a_4 a_2$	$a_4 a_3$	a_4^2

$$\sum_1 = a_1(a_1+a_2+a_3+a_4) \quad \sum_2 = a_2(a_1+a_2+a_3+a_4) \quad \sum_3 = a_3(a_1+a_2+a_3+a_4) \quad \sum_4 = a_4(a_1+a_2+a_3+a_4)$$

$$\sqrt{\sum \sum} = (a_1+a_2+a_3+a_4) \quad \sqrt{\sum \sum} = (a_1+a_2+a_3+a_4)$$

Saturazioni $\frac{\sum_1}{\sqrt{\sum \sum}} = a_1 \quad \frac{\sum_2}{\sqrt{\sum \sum}} = a_2 \quad \text{ecc.}$

MATRICE DI RANGO 2 (2 fattori)

Correlazioni espresse in termini di saturazioni: $a =$ saturaz. nel I fattore; $b =$ saturaz. nel II fattore.

Tests	1	2	3	4
1	$a_1^2 + b_1^2$	$a_1 a_2 + b_1 b_2$	$a_1 a_3 + b_1 b_3$	$a_1 a_4 + b_1 b_4$
2	$a_2 a_1 + b_2 b_1$	$a_2^2 + b_2^2$	$a_2 a_3 + b_2 b_3$	$a_2 a_4 + b_2 b_4$
3	$a_3 a_1 + b_3 b_1$	$a_3 a_2 + b_3 b_2$	$a_3^2 + b_3^2$	$a_3 a_4 + b_3 b_4$
4	$a_4 a_1 + b_4 b_1$	$a_4 a_2 + b_4 b_2$	$a_4 a_3 + b_4 b_3$	$a_4^2 + b_4^2$

$$\sum_1 = a_1(a_1+a_2+a_3+a_4) + b_1(b_1+b_2+b_3+b_4) \quad \sum_2 = a_2(a_1+a_2+a_3+a_4) + b_2(b_1+b_2+b_3+b_4) +$$

$$+ b_1(b_1+b_2+b_3+b_4) \quad \sum_3 = a_3(a_1+a_2+a_3+a_4) + b_3(b_1+b_2+b_3+b_4) +$$

$$+ b_4(b_1+b_2+b_3+b_4)$$

$$\sqrt{\sum \sum} = (a_1+a_2+a_3+a_4)^2 + (b_1+b_2+b_3+b_4)^2 \quad \sqrt{\sum \sum} = \sqrt{(a_1+a_2+a_3+a_4)^2 + (b_1+b_2+b_3+b_4)^2} = ?$$

Tabella 42.

la radice quadrata si ottiene $\sqrt{\Sigma\Sigma} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, la somma delle saturazioni dei tests nel fattore generale. E poichè la somma Σ_1 di ogni colonna risulta essere $a_1(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, basta dividere la somma di ogni colonna per $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ per ottenere le saturazioni dei tests nel fattore generale, cioè la matrice fattoriale.

Nel caso della matrice di rango superiore a 1 la serie delle operazioni analoghe si arresta per il fatto che $\Sigma\Sigma$ non equivale a un quadrato di un polinomio, per cui non ha più senso calcolarne la radice quadrata, $\sqrt{\Sigma\Sigma}$. Infatti, la somma di una colonna della matrice delle correlazioni non è un prodotto, ma una somma di prodotti $[\Sigma_1 = a_1(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + b_1(b_1 + b_2 + \dots + b_n) + \dots + k_1(k_1 + k_2 + \dots + k_n)]$; e dalla somma delle somme, che non è un quadrato, ma una somma di quadrati, nulla si può ricavare che permetta di proseguire i calcoli.

Il procedimento sembra dunque applicabile soltanto alla matrice di rango 1, o, più generalmente, quando, nelle somme delle colonne, tutti gli addendi successivi al primo sono uguali a zero. Infatti se nelle somme delle colonne $a_1(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + b_1(b_1 + b_2 + \dots + b_n) + \dots + k_1(k_1 + k_2 + \dots + k_n)$, i termini $b_1(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$, ecc. sono tutti uguali a zero, si ritorna alla situazione che si verifica nella matrice di rango 1 la quale porta al calcolo delle saturazioni.

Il ragionamento ci riporta dunque alla matrice di rango 1 che si può definire come una matrice in cui i fattori successivi al primo sono nulli.

Va tuttavia notato che vi sono due diverse condizioni per cui i termini del tipo $h_1(h_1 + h_2 + \dots + h_n)$ (in cui $h \neq a$) possono essere uguali a zero:

a) perchè i singoli addendi $h_1 \dots h_n$ (cioè le saturazioni dei tests nei fattori successivi al primo) sono uguali a zero, come nel caso della matrice gerarchica;

b) perchè, pur non essendo nulle le saturazioni dei tests nei fattori successivo al primo (e quindi essendo la matrice delle correlazioni di rango superiore a 1) tuttavia la loro somma algebrica, cioè la parentesi $(h_1 + h_2 + \dots + h_n)$ è uguale a zero. Su questo si basa la soluzione di Thurstone.

Quand'è che le somme delle saturazioni dei tests in tutti i fattori tranne nel I fattore sono nulle?

Consideriamo il diagramma di fig. 55 che rappresenta lo spazio dei fattori comuni F_1 ed F_2 e 4 vettori-tests, t_1, t_2, t_3, t_4 .

Le proiezioni dei vettori-tests sul vettore fattoriale F_2 sono nell'ordine +.4 (test 1), +.4 (test 2), -.2 (test 3), -.6 (test 4). La somma delle proiezioni, cioè la somma delle saturazioni dei tests nel fattore F_2 è zero ($b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$).

La somma delle proiezioni dei tests sul vettore F_1 è invece evidentemente diversa da zero, poichè le proiezioni (cioè le saturazioni a_1, a_2, a_3, a_4)

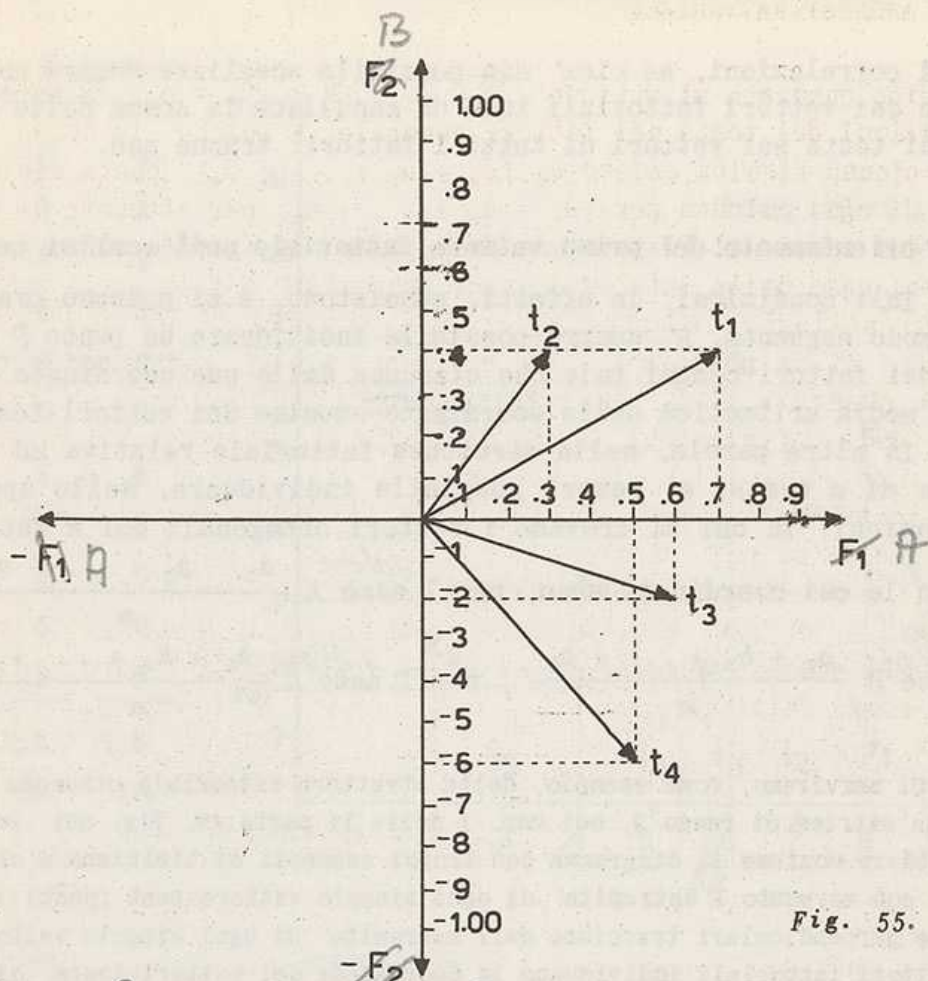


Fig. 55.

	A F1	B F2
t ₁	.7	.4
t ₂	.3	.4
t ₃	.6	-.2
t ₄	.5	-.6
Σ		
.21 = (a ₁ +a ₂ +a ₃ +a ₄)		0 = (b ₁ +b ₂ +b ₃ +b ₄)

sono tutte positive. In questo caso l'estrazione delle saturazioni nel I fattore col metodo delle sommatorie diventa dunque possibile, pur essendo la matrice delle correlazioni di rango inferiore ad 1. Infatti la somma dei termini della la colonna e' $a_1 (a_1+a_2+a_3+a_4) + (b_1)(0) = a_1 (a_1+a_2+a_3+a_4)$.

inferiore

Siamo cioe' nelle condizioni in cui, annullandosi, nelle somme delle colonne della matrice delle correlazioni, i termini successivi al primo (1), si rende possibile l'estrazione del primo fattore. Si tratta ora di vedere se tali condizioni sono realizzabili per qualsiasi matri-

(1) Nel nostro esempio, essendo due i fattori, c' e' solo un termine successivo al primo.

ce di correlazioni, se cioè sia possibile scegliere sempre una posizione dei vettori fattoriali tale da annullare la somma delle proiezioni dei tests sui vettori di tutti i fattori, tranne uno.

3. L'orientamento del primo vettore fattoriale nell'analisi centroeide

Tali condizioni, in effetti, sussistono, e si possono precisare nel modo seguente. È sempre possibile individuare un punto P dello spazio dei fattori comuni tale che ciascuna delle sue coordinate è uguale alla media aritmetica delle coordinate omonime dei vettori-tests nello stesso vettore fattoriale.

In altre parole, nella struttura fattoriale relativa ad una batteria di m tests, è sempre possibile individuare, nello spazio a k dimensioni, in cui si trovano i vettori ortogonali dei k fattori, un punto P le cui coordinate sono, per l'asse A $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m}$, per l'asse B $\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_m}{m}$, per l'asse K $\frac{k_1 + k_2 + \dots + k_m}{m}$.

Ci serviremo, come esempio, della struttura fattoriale ottenuta analizzando una matrice di rango 2, nel cap. I della II parte (v. fig. 56). Per evitare di rendere confuso il diagramma con troppi segmenti ci limitiamo a segnare soltanto con un punto l'estremità di ogni singolo vettore-test (punti i e punti k). Le perpendicolari tracciate dall'estremità di ogni singolo vettore-test ai vettori fattoriali individuano le coordinate dei vettori-tests, cioè le saturazioni dei tests nei due fattori. Le medie aritmetiche delle saturazioni dei tests nei due fattori in G e in V , cioè .58 e .18, sono le coordinate del punto P .

Se lo spazio dei fattori comuni ha k dimensioni, ci sono k vettori fattoriali ortogonali, e k coordinate per ogni punto-test; la matrice dei fattori comuni (la tabella delle coordinate) ha k colonne e il punto P avrà k coordinate che sono le medie delle k colonne della suddetta matrice.

Il punto P così individuato rappresenta il cosiddetto centro di gravità (o centroide) dei punti che rappresentano le estremità dei vettori-tests, nello spazio a k dimensioni.

La sua posizione nello spazio dei tests rimane immutata qualunque sia il sistema di coordinate rispetto al quale si calcolano le medie aritmetiche delle coordinate dei vettori-tests.

Per ottenere che le medie (e quindi le somme) delle proiezioni dei vettori-tests su ogni singolo vettore fattoriale, tranne uno, siano uguali a zero, basta orientare il sistema di vettori fattoriali ortogonali in modo che uno dei vettori passi per il punto P , cioè per il centroide.

Per rendersi conto di questo fatto, basta considerare P come estre-

Matrice dei fattori comuni

Tests	G	V
k_1	.9	.2
k_2	.8	.5
k_3	.6	.6
k_4	.4	.3
k_5	.2	.2
i_1	.8	.0
i_2	.7	.0
i_3	.6	.0
i_4	.5	.0
i_5	.3	.0
Somma	5.8	1.8
Media	.58	.18

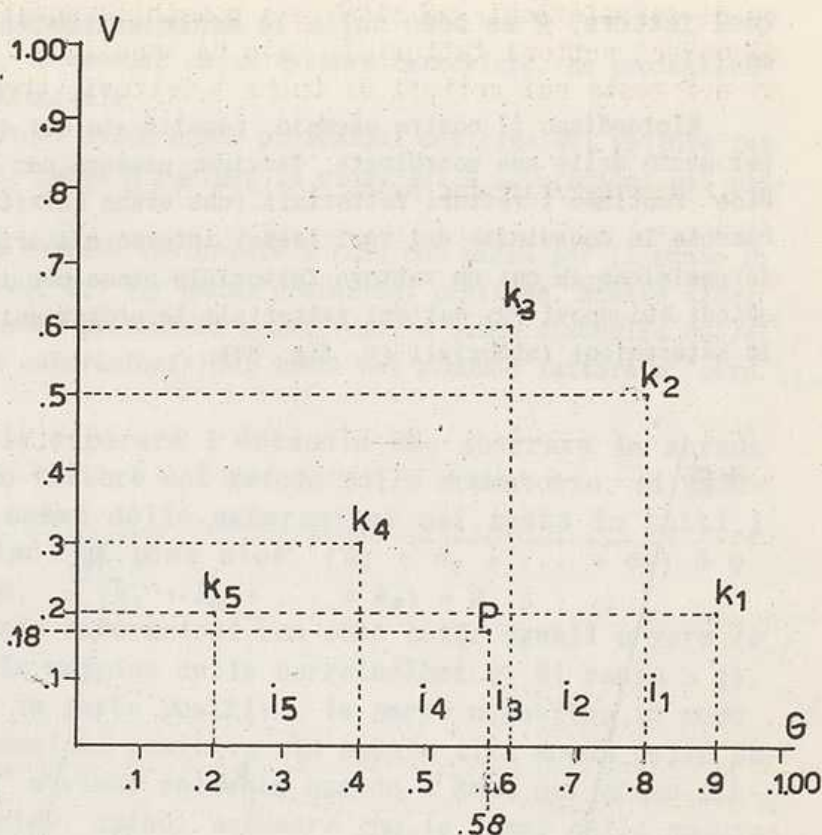


Fig. 56.

mita' di un vettore-test (1). Se un vettore fattoriale passa per il punto P, vuol dire che il vettore-test P giace sul vettore fattoriale, come avviene nella struttura di fig. 56 per i vettori-tests i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 , che giacciono tutti sul vettore fattoriale G. E sappiamo che quando un vettore-test giace su un vettore fattoriale, esso ha proiezione nulla sugli altri vettori fattoriali, che sono ortogonali al primo (2).

Le proiezioni di un test sui vettori fattoriali sono le saturazioni del test nei rispettivi fattori; dunque il vettore-test P ha saturazione zero in tutti i fattori tranne in quello sul cui vettore esso giace. Ma il punto P e' stato fissato in modo che le sue proiezioni sui vettori fattoriali siano le medie aritmetiche delle proiezioni omonime di tutti i tests della batteria. Quindi, se le sue proiezioni su un fattore sono nulle, vuol dire che sono nulle le medie aritmetiche delle proiezioni (cioe' delle saturazioni) di tutti i tests della batteria su

(1) Può darsi, infatti, che uno dei tests della batteria coincida col centroide.

(2) Infatti, i suddetti vettori-tests $i_1 - i_5$ non hanno nessuna proiezione sul vettore fattoriale V.

quel fattore. E se sono nulle le medie aritmetiche, sono nulle le somme (1).

Riprendiamo il nostro esempio. Localizzato nel diagramma il centroide P per mezzo delle sue coordinate, facciamo passare per P un vettore fattoriale, cioè ruotiamo i vettori fattoriali (che erano serviti per determinare graficamente le coordinate dei vari tests) intorno all'origine fino a raggiungere la posizione in cui un vettore fattoriale passa per il centroide P . Segnamo quindi sui nuovi (2) vettori fattoriali le proiezioni dei vettori-tests, cioè le saturazioni fattoriali (v. fig. 57).

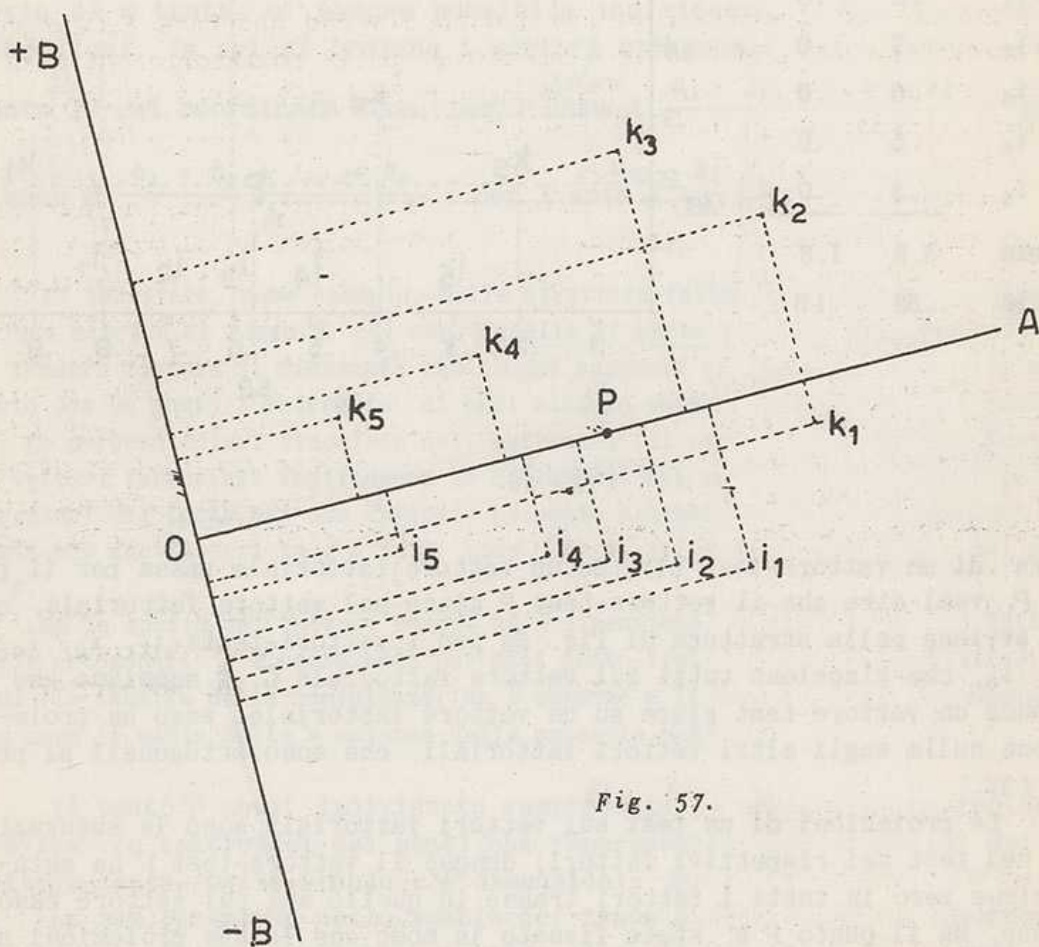


Fig. 57.

(1) Infatti, se $\frac{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_m}{m} = 0$, anche $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_m = 0$, poiché una frazione è uguale a zero, se e solo se il numeratore è uguale a zero.

(2) Si tratta in effetti di fattori completamente diversi da quelli ottenuti nell'analisi compiuta estendendo il metodo di Spearman.

5775
e 01
0

Dalla figura appare immediatamente:

- a) che il punto P , trovandosi su un vettore fattoriale, ha proiezione zero sull'altro vettore fattoriale;
- b) che tutti i vettori-tests hanno proiezioni positive sul vettore fattoriale A , che passa per il punto P (quindi la somma delle saturazioni nel primo fattore non e' nulla);
- c) che invece, sul vettore fattoriale B (che non passa per il punto P) alcuni vettori-tests (k_2, k_3, k_4, k_5) hanno proiezioni positive, mentre altri ($k_1, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$) hanno proiezioni negative, e la somma algebrica delle proiezioni (e quindi delle saturazioni) dei tests nel secondo fattore e' zero.

Con cio' e' agevole superare l'ostacolo che sbarrava la strada all'estrazione del primo fattore col metodo delle sommatorie. Si assume che siano nulle le somme delle saturazioni dei tests in tutti i fattori, tranne il primo! Si pone cioe' $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \neq 0$, $(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = 0 \dots (k_1 + k_2 + \dots + k_n) = 0$.

Ma poiche' le singole saturazioni non sono tutte uguali a zero (e non lo sono, in quanto la matrice delle correlazioni e' di rango > 1), vuol dire che esse sono in parte positive, in parte negative, in modo che la somma delle saturazioni positive sia uguale alla somma delle saturazioni negative. Cio' avviene soltanto quando l'asse del primo fattore passa per il centroide; quindi assumere che le somme delle saturazioni in tutti gli altri fattori tranne il primo siano nulle, equivale a far passare il primo vettore fattoriale per il centroide; o in altre parole, le saturazioni nel primo fattore che si ottengono partendo dalla suddetta assunzione, sono le proiezioni dei vettori-tests su un vettore fattoriale che passa per il centroide (1).

La conseguenza pratica di questo complesso ragionamento e' che si puo' procedere all'estrazione delle saturazioni nel primo fattore, nello stesso modo in cui si estraggono le saturazioni da una matrice di rango 1.

4. L'estrazione del 1° fattore

Prima di procedere ulteriormente ci conviene applicare il procedimento ad un esempio concreto. Prendiamo a tale scopo la matrice di correlazioni analizzate precedentemente nei due fattori G e V (tab. 43) estendendo il metodo di Spearman all'estrazione di un fattore di gruppo oltre al fattore G . Il diagramma di fig. 57 indica la posizione che gli assi assumono quando si fa l'analisi col metodo centroide.

(1) Procedendo in questo modo si determina dunque un particolare orientamento del 1° vettore fattoriale, fra gli infiniti orientamenti possibili, tutti ugualmente giustificati dal punto di vista matematico.

Calcolate le saturazioni dei tests nel primo fattore, si procede, come di consueto, a calcolare la matrice del primo fattore (cioè il contributo del 1° fattore alle correlazioni tra i tests) moltiplicando la colonna delle saturazioni dei tests per la sua trasposta (tabella 44). Quindi si sottrae la matrice del 1° fattore dalla matrice delle correlazioni, ottenendo la I matrice residuale (tabella 45) cioè quella parte della matrice delle correlazioni che rappresenta il contributo degli altri fattori comuni, escluso il 1° (1).

5. Riflessione dei vettori-tests

Al punto di ripetere l'operazione di estrazione nei riguardi del 2° fattore si presenta un nuovo ostacolo.

Saturazioni L'estrazione del 1° fattore era stata resa possibile dall'annullamento delle somme delle saturazioni in tutti gli altri fattori. Ma tale annullamento delle somme, ottenuto facendo passare l'asse del primo fattore per il centroide dei punti tests, permane (2), perciò le somme algebriche delle colonne (e delle righe) della matrice dei residui sono nulle (3).

Tale ostacolo, che renderebbe impossibile la continuazione dell'analisi, viene aggirato mediante un artificio.

Ricordiamo che i risultati dei soggetti espressi in unità standard (punti z) sono positivi o negativi, a seconda che sono superiori o inferiori alla media della popolazione. Ma che cosa significa superiori alla media?

*esempio
il test
con subtests* Consideriamo qualche esempio. In un test di livello intellettuale in cui il risultato si misura in base al numero di subtests superati, sono considerati positivi i risultati dei soggetti che hanno superato un numero di subtests superiore alla media dei soggetti; se invece il risultato è misurato in base al numero degli errori commessi, si considereranno positivi i risultati dei soggetti che hanno commesso meno errori. Ma si tratta di una semplice convenzione. Infatti, in un test di livello intellettuale destinato ai deboli di mente, ci si potrebbe proporre di misurare la debolezza mentale anziché l'intelligenza, e considerare positivi i risultati dei soggetti che si distaccano dalla media nel senso di rappresentare gradi sempre più elevati di deficienza mentale; o si potrebbe trasformare una prova di attenzione in una prova di disattenzione, attribuendo punteggi tanto più alti quanto più

(1) Nell'esempio, essendo due i fattori comuni la prima matrice residuale rappresenta il contributo del 2° fattore.

(2) Ricordiamo che la somma di una colonna qualsiasi della matrice dei residui è $b_1 (b_1 + b_2 + \dots + b_m) + \dots + k_1 (k_1 + k_2 + \dots + k_m)$. Ma essendo $(b_1 + b_2 + \dots + b_m) = 0$ e così tutte le altre somme delle saturazioni, la somma di ogni colonna (e di ogni riga) è zero.

(3) Entro i limiti degli errori di arrotondamento.

.85	.82	.66	.42	.22	.72	.63	.54	.45	.27	<i>Somme</i>
.82	.89	.78	.47	.26	.64	.56	.48	.40	.24	5,58
.66	.78	.72	.42	.24	.48	.42	.36	.30	.18	5,54
.42	.47	.42	.25	.14	.32	.28	.24	.20	.12	
.22	.26	.24	.14	.08	.16	.14	.12	.10	.06	
.72	.64	.48	.32	.16	.64	.56	.48	.40	.24	
.63	.56	.42	.28	.14	.56	.49	.42	.35	.21	
.54	.48	.36	.24	.12	.48	.42	.36	.30	.18	
.45	.40	.30	.20	.10	.40	.35	.30	.25	.15	
.27	.24	.18	.12	.06	.24	.21	.18	.15	.09	
<u>5.58</u>	<u>5.54</u>	<u>4.56</u>	<u>2.86</u>	<u>1.52</u>	<u>4.64</u>	<u>4.06</u>	<u>3.48</u>	<u>2.90</u>	<u>1.74</u>	

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= 5.58 = a_1 (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) \\ \Sigma_2 &= 5.54 = a_2 (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) \\ \Sigma_3 &= 4.56 = a_3 (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) \\ \Sigma_4 &= 2.86 = a_4 (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) \\ \Sigma_5 &= 1.52 = a_5 (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) \\ \Sigma_6 &= 4.64 = a_6 (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) \\ \Sigma_7 &= 4.06 = a_7 (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) \\ \Sigma_8 &= 3.48 = a_8 (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) \\ \Sigma_9 &= 2.90 = a_9 (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) \\ \Sigma_{10} &= 1.74 = a_{10} (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) \end{aligned}$$

$$\Sigma\Sigma = 36.88 = (a_1 + a_2 + \dots + a_{10})^2$$

$$\sqrt{\Sigma\Sigma} = \sqrt{36.88} = 6.07 = (a_1 + a_2 + \dots + a_{10})$$

$$a_1 = \frac{a_1 (a_1 + a_2 + \dots + a_{10})}{(a_1 + a_2 + \dots + a_{10})} = \frac{\Sigma_1}{\sqrt{\Sigma\Sigma}} = \frac{5.58}{6.07} = 0,919$$

$$a_2 = \frac{a_2 (a_1 + a_2 + \dots + a_{10})}{(a_1 + a_2 + \dots + a_{10})} = \frac{\Sigma_2}{\sqrt{\Sigma\Sigma}} = \frac{5.54}{6.07} = 0,912$$

$$a_3 = 0,751$$

$$a_7 = 0,668$$

$$a_4 = 0,471$$

$$a_8 = 0,573$$

$$a_5 = 0,250$$

$$a_9 = 0,477$$

$$a_6 = 0,764$$

$$a_{10} = 0,286$$

Tabella 43.

MATRICE DEL 1° FATTORE

	.919	.912	.751	.471	.250	.764	.668	.573	.477	.286
.919	.845	.838	.690	.433	.230	.702	.614	.526	.438	.263
.912	.838	.832	.685	.430	.228	.697	.609	.523	.435	.261
.751	.690	.685	.564	.354	.188	.574	.502	.430	.358	.215
.471	.433	.430	.354	.222	.118	.360	.315	.270	.225	.135
.250	.230	.228	.188	.118	.062	.191	.167	.143	.119	.072
.764	.702	.697	.574	.360	.191	.584	.510	.438	.364	.218
.668	.614	.609	.502	.315	.167	.510	.446	.383	.319	.191
.573	.526	.523	.430	.270	.143	.438	.383	.328	.273	.164
.477	.438	.435	.358	.225	.119	.364	.319	.273	.228	.136
.286	.263	.261	.215	.135	.072	.218	.191	.164	.136	.082

Tabella 44.

I MATRICE RESIDUALE

.005	-.018	-.030	-.013	-.010	.018	.016	.014	.012	.007
-.018	.058	.095	-.040	.032	-.057	-.049	-.043	-.035	-.021
-.030	.095	.156	.066	.052	-.094	-.082	-.070	-.058	-.035
-.013	.040	.066	.028	.022	-.040	-.035	-.030	-.025	-.015
-.010	.032	.052	.022	.018	-.031	-.027	-.023	-.019	-.012
.018	-.057	-.094	-.040	-.031	.056	.050	.042	.036	.022
.016	-.049	-.082	-.035	-.027	.050	.044	.037	.031	.019
.014	-.043	-.070	-.030	-.023	.042	.037	.032	.027	.016
.012	-.035	-.058	-.025	-.019	.036	.031	.027	.022	.014
.007	-.021	-.035	-.015	-.012	.022	.019	.016	.014	.008
+.001	+.002	.000	-.002	+.002	+.002	+.004	+.002	+.005	+.003

Tabella 45.

numerose sono le disattenzioni commesse dai soggetti. E la precisione della misura e le altre qualità psicometriche del test non ne risulterebbero in alcun modo alterate.

L'artificio al quale Thurstone ricorre consiste nell'invertire (provvisoriamente) il significato di un certo numero di tests, nel senso sopra indicato. Tale procedimento, che prende il nome di "riflessione" di un test, viene praticato finché tutti (o quasi tutti) i termini della matrice dei residui diventano positivi, con la conseguenza che le somme non sono più nulle, e si può quindi procedere all'estrazione del 2° fattore.

Riprendendo in esame la prima matrice residuale (Tab. 45) si arriva, dopo un certo numero di tentativi (1) a stabilire che riflettendo i tests $k_1, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$, cioè cambiando i segni alle rispettive righe e colonne, tutti i residui diventano positivi.

Preparare i segni riflettendo un test cambiando il segno della riga e della colonna, solo se la colonna è...

6. Estrazione del 2° fattore e riflessione delle saturazioni

Si può quindi passare all'estrazione del 2° fattore, ripetendo il procedimento usato per il 1° fattore (2).

Ottenute le saturazioni nel 2° fattore si calcola, moltiplicando la colonna delle saturazioni dei tests nel 2° fattore per la sua trasposta, la matrice del 2° fattore (tab. 47). Quindi si sottrae la matrice del 2° fattore dalla prima matrice residuale con le variabili riflesse (tab. 48) ottenendo così la seconda matrice residuale la quale, nel nostro esempio, trattandosi dell'analisi di una matrice di rango 2, contiene soltanto errori di approssimazione.

Prima di presentare il risultato dell'analisi nella matrice fattoriale e nella matrice delle varianze si deve provvedere a ridare il significato primitivo ai tests che erano stati riflessi nel corso dell'analisi, cambiando i segni alle loro saturazioni (3) (tab. 49).

(1) Per la tecnica della riflessione dei tests vedi il paragrafo 6.

(2) Poiché la matrice delle correlazioni era di rango 2, la matrice residuale è di rango 1, e perciò l'estrazione del 2° fattore non solleva alcun problema teorico, come non ne solleva l'applicazione del metodo delle sommatorie ad una matrice gerarchica. Se invece il rango della matrice di correlazioni è $>$ di 2 si ripresenta la stessa difficoltà che è stata incontrata per l'estrazione del 1° fattore, e la si supera con lo stesso procedimento. Cioè, essendo le somme delle colonne della matrice dei residui (dopo la riflessione dei tests) uguali a $b_1 (b_1 + b_2 + \dots + b_m) + c_1 (c_1 + c_2 + \dots + c_m) + \dots + k_1 (k_1 + k_2 + \dots + k_m)$, si assume la nullità di tutti i termini successivi al primo, e con ciò il fattore B risulta orientato in modo da coincidere col centroide della nuova struttura dei tests (cioè della struttura dei vettori residuali, dopo la riflessione di alcuni di essi).

(3) Si tratta cioè di operare la riflessione delle saturazioni per dare ai tests lo stesso significato rispetto a tutti i fattori. Infatti omettendo quest'operazione, i tests che sono stati riflessi per estrarre il 2° fattore avrebbero significato opposto nei riguardi dei due fattori. Va tenuto presente che quando si è operata la riflessione di un test per poter estrarre un fattore, si è invertito il suo significato rispetto a quel fattore e a tutti gli altri fattori successivamente estratti, e perciò si devono poi cambiare i segni nelle corrispondenti saturazioni fattoriali.

I MATRICE RESIDUALE, CON RIFLESSIONE DELLE VARIABILI 1, 6, 7, 8, 9, 10,
E CALCOLI PER L'ESTRAZIONE DELLE SATURAZIONI NEL 2° FATTORE

.005	.018	.030	.013	.010	.018	.016	.014	.012	.007
.018	.058	.095	.040	.032	.057	.049	.043	.035	.021
.030	.095	.156	.066	.052	.094	.082	.070	.058	.035
.013	.040	.066	.028	.022	.040	.035	.030	.025	.015
.010	.032	.052	.022	.018	.031	.027	.023	.019	.012
.018	.057	.094	.040	.031	.056	.050	.042	.036	.022
.016	.049	.082	.035	.027	.050	.044	.037	.031	.019
.014	.043	.070	.030	.023	.042	.037	.032	.027	.016
.012	.035	.058	.025	.019	.036	.031	.027	.022	.014
.007	.021	.035	.015	.012	.022	.019	.016	.014	.008
<u>.143</u>	<u>.448</u>	<u>.738</u>	<u>.314</u>	<u>.246</u>	<u>.446</u>	<u>.390</u>	<u>.334</u>	<u>.279</u>	<u>.169</u>

$$\Sigma_1 = .143 = b_1 (b_1 + b_2 + \dots + b_{10})$$

$$\Sigma_2 = .448 = b_2 (b_1 + b_2 + \dots + b_{10})$$

$$\Sigma_3 = .738 = b_3 (b_1 + b_2 + \dots + b_{10})$$

$$\Sigma_4 = .314 = b_4 (b_1 + b_2 + \dots + b_{10})$$

$$\Sigma_5 = .246 = b_5 (b_1 + b_2 + \dots + b_{10})$$

$$\Sigma_6 = .446 = b_6 (b_1 + b_2 + \dots + b_{10})$$

$$\Sigma_7 = .390 = b_7 (b_1 + b_2 + \dots + b_{10})$$

$$\Sigma_8 = .334 = b_8 (b_1 + b_2 + \dots + b_{10})$$

$$\Sigma_9 = .279 = b_9 (b_1 + b_2 + \dots + b_{10})$$

$$\Sigma_{10} = .169 = b_{10} (b_1 + b_2 + \dots + b_{10})$$

$$\Sigma\Sigma = 3.507 = (b_1 + b_2 + \dots + b_{10})^2$$

$$\sqrt{\Sigma\Sigma} = \sqrt{3.507} = 1.872 = (b_1 + b_2 + \dots + b_{10})$$

$$b_1 = \frac{b_1 (b_1 + b_2 + \dots + b_{10})}{(b_1 + b_2 + \dots + b_{10})} = \frac{\Sigma_1}{\sqrt{\Sigma\Sigma}} = 0,076$$

$$b_2 = \frac{b_2 (b_1 + b_2 + \dots + b_{10})}{(b_1 + b_2 + \dots + b_{10})} = \frac{\Sigma_2}{\sqrt{\Sigma\Sigma}} = 0,239$$

$$b_3 = 0,394$$

$$b_7 = 0,208$$

$$b_4 = 0,167$$

$$b_8 = 0,178$$

$$b_5 = 0,131$$

$$b_9 = 0,149$$

$$b_6 = 0,238$$

$$b_{10} = 0,090$$

MATRICE DEL 2° FATTORE

	.076	.239	.394	.167	.131	.238	.208	.178	.149	.090
.076	.005	.018	.030	.013	.010	.018	.016	.014	.011	.007
.239	.018	.057	.094	.040	.031	.057	.050	.043	.036	.022
.394	.030	.094	.155	.066	.052	.094	.082	.070	.059	.035
.167	.013	.040	.066	.028	.022	.040	.035	.030	.025	.015
.131	.010	.031	.052	.022	.017	.031	.027	.023	.020	.012
.238	.018	.057	.094	.040	.031	.057	.050	.042	.035	.021
.208	.016	.050	.082	.035	.027	.050	.043	.037	.031	.019
.178	.014	.043	.070	.030	.023	.042	.037	.032	.027	.016
.149	.011	.036	.059	.025	.020	.035	.031	.027	.022	.013
.090	.007	.022	.035	.015	.012	.021	.019	.016	.013	.008

Tabella 47.

II MATRICE RESIDUALE

.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.001	.000
.000	.001	.001	.000	.001	.000	-.001	.000	-.001	-.001
.000	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000	-.001	.000
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000	.001	.000	.000	.001	.000	.000	.000	-.001	.000
.000	.000	.000	.000	.000	-.001	.000	.000	.001	.001
.000	-.001	.000	.000	.000	.000	.001	.000	.000	.000
.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.001	-.001	-.001	.000	-.001	.001	.000	.000	.000	.001
.000	-.001	.000	.000	.000	.001	.000	.000	.001	.000

Tabella 48.

punti decimali

	A	B		A	B
k_1	0,919	0,076	k_1	0,919	-0,076
k_2	0,912	0,239	k_2	0,912	0,239
k_3	0,751	0,394	k_3	0,751	0,394
k_4	0,471	0,167	k_4	0,471	0,167
k_5	0,250	0,131	k_5	0,250	0,131
i_1	0,764	0,238	i_1	0,764	-0,238
i_2	0,668	0,208	i_2	0,668	-0,208
i_3	0,573	0,178	i_3	0,573	-0,178
i_4	0,477	0,149	i_4	0,477	-0,149
i_5	0,286	0,090	i_5	0,286	-0,090

Matrice dei fattori comuni con segni provvisori

Matrice dei fattori comuni con segni definitivi

Tabella 49

B MATRICE DELLE VARIANZE

Tests	A	V	Quote di varianza		Totale
			varianza comune	varianza specifica	
k_1	.84	.01	.85	.15	1.00
k_2	.83	.06	.89	.11	1.00
k_3	.56	.16	.72	.28	1.00
k_4	.22	.03	.25	.75	1.00
k_5	.06	.02	.08	.92	1.00
i_1	.58	.06	.64	.36	1.00
i_2	.45	.04	.49	.51	1.00
i_3	.33	.03	.36	.64	1.00
i_4	.23	.02	.25	.75	1.00
i_5	.08	.01	.09	.91	1.00

Tabella 49 bis.

Dalla matrice delle varianze (tab. 49 bis) si nota che la varianza comune (cioè la somma delle varianze dei fattori comuni) è uguale a quella ottenuta nell'analisi compiuta precedentemente (tab. 37), e corrisponde alle comunanze inserite nella diagonale della matrice delle correlazioni.

7. Il metodo centroide completo

Il metodo centroide completo di Thurstone consiste in una serie di operazioni che portano all'estrazione delle saturazioni fattoriali da una matrice di correlazioni riducendo al minimo il rischio di commettere errori, in quanto ad ogni operazione o gruppo di operazione fa riscontro un'operazione di controllo. Il procedimento diventa in tal modo più lungo, ma tuttavia, per il fatto di mettere in evidenza immediatamente eventuali sviste od errori, porta in definitiva ad un risparmio di tempo e di lavoro. Inoltre la descrizione analitica - operazione per operazione - consente di compiere i calcoli senza dover tener presente continuamente il significato delle varie operazioni. E ciò rappresenta un indubbio vantaggio, in quanto permette di concentrarsi esclusivamente sui calcoli che si devono eseguire. Ma forse il più grande merito del procedimento consiste nella *routine* della riflessione dei tests, operazione che altrimenti risulta difficile da compiere, in quanto porta molto facilmente ad errori di disattenzione; a questo riguardo il procedimento descritto da Thurstone presenta anche il vantaggio ulteriore di ricavare le saturazioni dei tests nei vari fattori *col loro segno definitivo*.

Applichiamo il metodo centroide completo ad una matrice di correlazioni di rango 3, in modo da dare un esempio relativo all'estrazione di 3 fattori comuni. Trattandosi anche questa volta di dati fittizi, avremo la possibilità di confrontare le comunanze vere con le comunanze stimate, e di vedere di che entità sono le modificazioni, cioè gli errori, che la stima delle comunanze determina nelle saturazioni.

METODO CENTROIDE COMPLETO (1)

(descrizione delle operazioni da eseguire successivamente)

1. Compilare una tabella comprendente la matrice delle correlazioni e intestare le righe sotto la matrice e le colonne a fianco della matrice corrispondentemente a tab. 50.

2. Registrare le somme dei termini di ciascuna delle colonne nella riga S_1 e le somme dei termini di ciascuna riga nella colonna Σ . La somma relativa ad ogni colonna deve essere uguale alla somma relativa

(1) v. THURSTONE, *Multiple Factor Analysis*, Chicago 1947. pp. 161 e sgg.

alla riga corrispondente. Controllare (\checkmark). La somma delle somme va registrata al punto di intersezione della riga S_1 con la colonna Σ .

3. Se non tutte le somme sono positive si compiono le operazioni descritte al n. 28 e seguenti. Se invece tutte le somme sono positive, si ricopia la riga S_1 nella riga C (v. esempio in tab. 50).

4. Registrare le stime delle comunanze nella riga d (1). Se non c'è stata necessità di cambiare i segni, la riga d viene ricopiata nella riga D . (In caso contrario seguire quanto indicato al n. 33.)

5. Registrare nella riga E la somma dei termini delle righe C e D ($E = C + D$).

6. Controllo: la somma dei termini della riga E , escluso l'ultimo termine, dev'essere uguale all'ultimo termine.

(Esempio: la somma dei primi 10 termini della riga E è 35,30, cioè è uguale all'ultimo termine). Segnare \checkmark per controllo.

7. Nella tabellina a destra scrivere la somma dei termini della riga E di cui al numero precedente, somma che viene indicata con la lettera T .

(Es.: $T = 35,30$).

8. Calcolare \sqrt{T} con 6 decimali e segnarlo sotto T .

(Es.: $\sqrt{T} = 5,941380$).

9. Calcolare (con 6 decimali) $m = \frac{1}{\sqrt{T}}$ e registrarlo sotto \sqrt{T} .

(Es.: $\frac{1}{\sqrt{T}} = m = .168311$).

10. Calcolare mT e registrarlo sotto m .

11. Controllo: $mT = \sqrt{T}$. Segnare \checkmark per controllo.

12. Calcolare mE , cioè moltiplicare per m gli elementi della riga E , e registrarli nella riga successiva. Questa è intestata $mE = a_1$, perché i numeri di questa riga sono i coefficienti di saturazione del primo fattore, e vanno registrati nella prima colonna della matrice fattoriale (tab. 54).

13. Moltiplicando per m l'ultimo termine della riga E (che è la somma dei termini della riga E) si ottiene $m\Sigma E$ che è uguale (entro i limiti dell'approssimazione) alla somma dei termini della riga a_1 (escluso l'ultimo termine). ($m\Sigma E = \Sigma a = 5,940$).

14. Costruire una tabella analoga a tab. 51. Va tenuto presente che il numero delle righe successive alla riga intestata $-\frac{S_2}{2}$ (cioè, le righe che in tab. 51 bis sono intestate +2, +1, +3, +7, +8) non può essere fissato in precedenza.

(1) Si può scegliere uno dei diversi metodi di stima delle comunanze. Il procedimento più semplice, che di solito si adotta, è di prendere come stima della comunanza il coefficiente di correlazione più elevato di ogni colonna. Nell'esempio è stato adottato questo procedimento.

METODO CENTROIDE COMPLETO - I Tabella - Estrazione del 1° fattore

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ	controllo
1	-	.63	.42	.20	.35	.30	.21	.21	.68	.45	3.45	✓
2	.63	-	.54	.00	.00	.00	.27	.27	.36	.00	2.07	✓
3	.42	.54	-	.42	.18	.30	.36	.66	.24	.00	3.12	✓
4	.20	.00	.42	-	.49	.59	.21	.56	.32	.36	3.15	✓
5	.35	.00	.18	.49	-	.57	.09	.24	.56	.63	3.11	✓
6	.30	.00	.30	.59	.30	-	.15	.40	.48	.54	3.33	✓
7	.21	.27	.36	.21	.09	.15	-	.33	.12	.00	1.74	✓
8	.21	.27	.66	.56	.24	.40	.33	-	.12	.00	2.79	✓
9	.68	.36	.24	.32	.56	.48	.12	.12	-	.72	3.60	✓
10	.45	.00	.00	.36	.63	.54	.00	.00	.72	-	2.70	✓
$\Sigma r = S_1$	3.45	2.07	3.12	3.15	3.11	3.33	1.74	2.79	3.60	2.70	29.06	✓
$-2B = C$	3.45	2.07	3.12	3.15	3.11	3.33	1.74	2.79	3.60	2.70	29.06	✓
d	.68	.63	.66	.59	.63	.59	.36	.66	.72	.72	6.24	✓
$ud = D$.68	.63	.66	.59	.63	.59	.36	.66	.72	.72	6.24	✓
$C + D = E$	4.13	2.70	3.78	3.74	3.74	3.92	2.10	3.45	4.32	3.42	35.30	✓
$mE = a_1$.695	.454	.636	.629	.629	.660	.353	.581	.727	.576	5.940	✓
$T = \Sigma E = 35.30$ $\sqrt{T} = 5,941380$ $\frac{1}{\sqrt{T}} = m = .168311$ $mT = 5,941378 = \sqrt{T}$ $\Sigma a_1 = 5,940 = mT$ $m\Sigma E = \Sigma a_1 = 5.940$												

Tabella 50.

METODO CENTROIDE COMPLETO - II tabella
Residui del 1° fattore ed estrazione del 2° fattore

$\alpha_i = a_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	-5.940 = - v_1
a_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	somme per controllo
.695	-	.314	-.022	-.237	-.087	-.159	-.035	-.194	.175	.050	-.195 ✓
.454	.314	-	.251	-.286	-.286	-.300	.110	.006	.030	-.281	-.422 ✓
.636	-.022	.251	-	.020	-.220	-.120	.135	.290	-.222	-.366	-.254 ✓
.629	-.237	-.286	.020	-	.094	.175	-.012	.195	-.137	-.002	-.190 ✓
.629	-.087	-.286	-.220	.094	-	.155	-.132	-.125	.103	.268	-.230 ✓
.660	-.159	-.300	-.120	.175	.155	-	-.083	.017	.000	.160	-.155 ✓
.353	-.035	.110	.135	-.083	-.132	-.083	-	.125	-.137	-.203	-.232 ✓
.581	-.194	.006	.290	.125	-.125	.017	.125	-	-.302	-.335	-.323 ✓
.727	.175	.030	-.222	-.137	.103	.000	-.137	-.302	-	.301	-.189 ✓
.576	.050	-.261	-.366	-.002	.268	.160	-.203	-.335	.301	-	-.388 ✓
5.940 = v_1											
S_1	3.45	2.07	3.12	3.15	3.11	3.33	1.74	2.79	3.60	2.70	29.06
$\alpha_1 v_1$	-4.128	-2.697	-3.778	-3.736	-3.736	-3.920	-2.097	-3.451	-4.318	-3.421	-35.282 (1)
α_1^2	.483	.206	.404	.396	.396	.436	.125	.338	.529	.332	3.645 (2)

(1) $(-v_1) (v_1) = -35.2836$

(2) $\sum \alpha_1^2 = 3.643$

Tabella 51.

inferire qui la pag. 175

(segue II tabella)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	somme per controllo
$S_1 + \alpha_1 v_1 + \alpha_1^2$	-.195	-.421	-.254	-.190	-.230	-.154	-.232	-.323	-.189	-.389	-2.577 ✓
S_2	-.195	-.422	-.254	-.190	-.230	-.155	-.232	-.323	-.189	-.388	-2.578 ✓
$-\frac{S_2}{2} = A$.0975	.2110	.1270	.0950	.1150	.0775	.1160	.1615	.0945	.1940	1.2890 ✓
+ 2	.4115	(.2110)	.3780	-.1910	-.1710	-.2225	.2260	.1675	.1245	-.0670	.8670 ✓
+ 1	(.4115)	(.5250)	-.3560	-.4280	-.2580	-.3815	.1910	-.0265	.2995	-.0170	.6720 ✓
+ 3	(-.3895)	(.7760)	(.3560)	-.4080	-.4780	-.5015	.3260	.2635	.0775	-.3830	.4180 ✓
+ 7	(.3545)	(.8860)	(.4910)	-.4200	-.6100	-.5845	(.3260)	.3885	-.0595	-.5860	.1860 ✓
B + 8	(.1605)	(.8920)	(.7810)	-.2250	-.7350	-.5675	(.4510)	(.3885)	-.3615	-.9210	-.1370 ✓
-2 B = C	-.321	-1.784	-1.562	.450	1.470	1.135	-.902	-.777	.723	1.842	+ .274 (1)
D	-.314	-.314	-.366	.286	.286	-.300	.203	-.335	.302	.366	
C + D = E	-.635	-2.098	-1.928	.736	1.756	1.435	-1.105	-1.112	1.025	2.208	(2)
$mE = b_1$	-.170	-.560	-.515	.196	.469	.383	-.295	-.297	.274	.589	(3)

(1) $\sum |C| = 10.966$

(2) $\sum |E| = T = 14.038 \sqrt{\quad}$

(3) $\sum |b_1| = 3.748$

$\sqrt{T} = 3.746731 \sqrt{\quad}$

$\sum |D| = \frac{3.072 \sqrt{\quad}}{14.038}$

$m = \frac{1}{\sqrt{T}} = .266899$

$mT = 3.7467$

Tabella 51 bis.

METODO CENTROIDE COMPLETO - III tabella
Residui 2° fattore ed estrazione del 3° fattore

$W_i = -b_i$.170	.560	.515	-.196	-.469	-.383	.295	.297	-.274	-.589	-.074 = -v ₁
a_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	somme per controllo
-.170	-	-.219	-.110	-.204	-.007	-.094	-.085	-.244	.222	.150	-.153 ✓
-.560	.219	-	-.038	-.176	-.023	-.086	-.055	-.160	.183	.069	-.067 ✓
-.515	-.110	-.038	-	.121	.022	.077	-.017	.137	-.081	-.063	.048 ✓
.196	-.204	-.176	.121	-	.002	.100	.046	.253	-.191	-.117	-.166 ✓
.469	-.007	-.023	.022	.002	-	-.025	.006	.014	-.026	-.008	-.045 ✓
.383	-.094	-.086	.077	.100	-.025	-	.030	.131	-.105	-.066	-.038 ✓
-.295	-.085	-.055	-.017	.046	.006	.030	-	.037	-.056	-.029	-.123 ✓
-.297	-.244	-.160	.137	.253	.014	.131	.037	-	-.221	-.160	-.213 ✓
.274	.222	.183	-.081	-.191	-.026	-.105	-.056	-.221	-	.140	-.135 ✓
.589	.150	.069	-.063	-.117	-.008	-.066	-.029	-.160	.140	-	-.084 ✓
$.074 = v_1$											
S_2	-.195	-.422	-.254	-.190	-.230	-.155	-.232	-.323	-.189	-.388	-2.578
$W_1 v_1$.013	.041	.038	-.015	-.035	-.028	.022	.022	-.020	-.044	-.006 (1)
W_1^2	.029	.314	.265	.038	.220	.147	.087	.088	.075	.347	1.610 (2)

(1) $(-v_1) (v_1) = -.005476$.

(2) $\sum a_i^2 = 1.610002$

Tabella 52.

(segue III tabella)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	somme per controllo
$S_2 + W_1 v_1 + W_1^2$	-.153	-.067	.049	-.167	-.045	-.036	-.123	-.213	-.134	-.085	-.974
S_3	-.153	-.067	.048	-.166	-.045	-.038	-.123	-.213	-.135	-.084	-.976
$\frac{-S_3}{2} = A$.0765	.0335	-.0240	.0830	-.0225	.0190	.0615	.1065	.0675	.0420	.4880 ✓
+ 8	-.1675	-.1265	.1130	.3360	.0365	.1500	.0985	(.1065)	-.1535	-.1180	.2750 ✓
+ 4	-.3715	-.3025	.2340	(.3360)	.0385	.2500	.1445	(.3595)	-.3445	-.2350	.1090 ✓
+ 6	-.4655	-.3885	.3110	(.4360)	.0135	(.2500)	.1745	(.4905)	-.4495	-.3010	.0710 ✓
+ 3	-.5755	-.4265	(.3110)	(.5570)	.0355	(.3270)	.1575	(.6275)	-.5305	-.3640	.1190 ✓
+ 7	-.6605	-.4815	(.2940)	(.6030)	.0415	(.3570)	(.1575)	(.6645)	-.5865	-.3930	-.0040 ✓
$B + 5$	-.6675	-.5045	(.3160)	(.6050)	(.0415)	(.3320)	(.1635)	(.6785)	-.6125	-.4010	-.0490 ✓
$-2 B = C$	1.335	1.009	-.632	-1.210	-.083	-.664	-.327	-1.357	1.225	.802	.0098 (1)
D	.244	.219	-.137	-.253	-.026	-.131	-.085	-.253	.222	.160	
$C + D = E$	1.579	1.228	-.769	-1.463	-.109	-.795	-.412	-1.610	1.447	.962	(2)
$mE = c_1$.490	.381	-.239	-.454	-.034	-.247	-.128	-.500	.450	.299	(3)

(1) $\sum |C| = 8.644$ (2) $\sum |E| = T = 10.374V$ (3) $\sum |c_1| = 3.222$ $\sqrt{T} = \sqrt{10.374} = 3.220869$

$\sum |D| = 1.730$
 $\frac{10.374V}{10.374V}$

$m = \frac{1}{\sqrt{T}} = .310475$

$mT = 3.220867$

Tabella 52 bis.

METODO CENTROIDE COMPLETO - IV tabella
Residui del 3° fattore

$W_3 = -c_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$-v_1 = -v_1$
a_1	Tests										Somme per controllo
.490	-	.032	.007	.018	.010	.027	-.022	.001	.002	.003	.078 ✓
.381	.032	-	.053	-.003	-.010	-.008	-.006	.030	.012	-.045	.071 ✓
-.239	.007	.053	-	.012	.014	.018	-.048	.017	.027	.008	.108 ✓
-.454	.018	-.003	.012	-	-.013	-.012	-.012	.026	.013	.019	.048 ✓
-.034	.010	-.010	.014	.013	-	-.033	.002	-.003	-.011	.002	-.042 ✓
-.247	.027	.008	.018	-.012	-.033	-	-.002	.007	.007	.008	.028 ✓
-.128	-.022	-.006	-.048	-.012	.002	-.002	-	-.027	.002	.009	-.104 ✓
-.500	.001	.030	.017	.026	-.003	.007	-.027	-	.004	-.010	.045 ✓
.450	.002	.012	.027	.013	-.011	.007	.002	.004	-	.005	.061 ✓
.299	.003	-.045	.008	.019	.002	.008	.009	-.010	.005	-	-.001 ✓
$018 = v_1$											
S_3	-.153	-.067	.042	-.166	-.045	-.038	-.123	-.213	-.135	-.084	-.976
$W_3 v_1$	-.009	-.007	.004	.008	.001	.004	.002	.009	-.008	-.005	-.001 (1)
W_3^2	.240	.145	.057	.206	.001	.061	.016	.250	.203	.089	1.268 (2)
$S_3 + W_3 v_1 + W_3^2$.078	.071	.109	.048	-.043	.027	-.105	.046	.060	.000	.291
S_4	.078	.071	.108	.048	-.042	.028	-.104	.045	.061	-.001	.292

(1) $(-v_1) (v_1) = -.000324$

(2) $\sum a_i^2 = 1.268048$

Tabella 53.

15. Registrare le saturazioni del 1° fattore, a_1 nella prima colonna e sommarle per ottenere v_1 . Registrare nella prima riga i valori α_1 ($\alpha_1 = -a_1$), sommarli e controllare se $\sum \alpha_1 = -\sum a_1$; $\sum \alpha_1 = -v_1$ (\checkmark).

16. Riportare dalla tabella precedente i valori S_1 registrandoli nella riga S_1 . Sommarli e controllare la somma con quella ottenuta precedentemente.

17. Computare i residui *relativi al test 1*, applicando la formula $\rho_{ij} = r_{ij} + (a_i)(-a_j)$ (in cui ρ_{ij} e' il residuo della correlazione del test i col test j ; $-a_j = \alpha_j$) e registrarli *nella prima colonna*. Sommare i residui e registrare la somma nella riga S_2 . (Si noti che i residui delle comunanze non vengono presi in considerazione. Nuove stime delle comunanze saranno effettuate nella riga D).

18. Calcolare il prodotto $\alpha_1 v_1$ per il test 1 e registrarlo nella casella corrispondente alla riga intestata $\alpha_1 v_1$.

19. Calcolare α_1^2 per il test 1 e registrarlo nella relativa riga.

20. Sommare $S_1 + \alpha_1 v_1 + \alpha_1^2$ e registrare il risultato sotto questi tre numeri (nella riga intestata $S_1 + \alpha_1 v_1 + \alpha_1^2$). Controllare che il valore S_2 già registrato corrisponda a questa somma. E' ammissibile un lieve errore di arrotondamento al 3° decimale (\checkmark).

21. Eseguito il controllo di cui al punto precedente, copiare i residui del test 1 *nella riga* corrispondente della matrice dei residui.

22. Sommare la riga registrata e controllare che il risultato corrisponda ad S_2 per lo stesso test (\checkmark).

23. Fare le operazioni descritte nei punti 17-21 per gli altri tests. Ci sara' da computare un residuo in meno per ogni successivo test. Non ci sara' da computare alcun residuo per l'ultimo test; tuttavia finire la colonna e i controlli per questo test come per gli altri (\checkmark).

24. Sommare i valori S_2 e quelli della colonna delle somme per i controlli nella matrice dei residui e vedere che le due somme corrispondano (\checkmark).

25. Sommare i valori $\alpha_1 v_1$ e α_1^2 e registrare le somme nella colonna dei controlli. La somma $\sum \alpha_1 v_1$ va controllata col prodotto $(-v_1)(v_1)$ (\checkmark). I due valori dovrebbero corrispondere esattamente (\checkmark). $\sum \alpha_1^2$ deve corrispondere esattamente a $\sum a_1^2$ (\checkmark).

26. Vedere che $\sum (S_1 + \alpha_1 v_1 + \alpha_1^2)$ sia uguale a $\sum S_1 + \sum \alpha_1 v_1 + \sum \alpha_1^2$ (\checkmark).

27. Vedere che $\sum S_2$ corrisponda approssimativamente ai valori indicati al punto 26. (\checkmark).

28. Per ogni test, calcolare con 4 decimali (1), il valore di $A = -\frac{S_2}{2}$. (Questa operazione si fa per prepararsi a operare la rifles-

(1) Si continua ad operare con 4 decimali fino alla riga intestata - 2 B = C, cioè finché si procede alla riflessione dei tests.

sione di alcuni tests). Compiere questa operazione anche per la somma degli S_2 nella colonna dei controlli. Controllare il valore ottenuto con la somma della riga A, che deve dare lo stesso risultato (\checkmark).

29. Cercare il piu' grande valore *positivo* della riga A. (Nell' esempio di Tab. 51 si tratta del test 2, e il numero e' .2110). Registrare questo numero nella riga immediatamente sotto a questa, in parentesi. Cio' sta a indicare che la somma dei residui del rispettivo test ha cambiato il segno, ma non il valore numerico.

30. Scrivere + seguito dal numero del test che e' stato riflesso, in testa alla prossima riga (1) (nell' esempio +2, poiche' il test che e' stato riflesso e' il 2). I valori in questa riga stanno a indicare come variano le somme delle colonne dopo la riflessione di tutti i segni nella riga dei residui del test che e' stato riflesso. I singoli valori si ottengono addizionando *algebricamente* il valore A, per ogni singolo test, al residuo corrispondente nella riga del test riflesso.

[Nell' esempio, per il test 1 si ha $(.0975) + (.314) = .4115$; per il test 3 $(.1270) + (.251) = .3780$; per il test 4 $(.0950) + (-.286) = -.1910$, ecc.]. Eseguire l' operazione anche per il valore che si trova nella colonna dei controlli; poi addizionare la riga, e vedere se la somma corrisponde (\checkmark).

31. Ripetere l' operazione di cui al punto 29 con un altro test.

[Esempio: nella riga +2 il valore positivo piu' grande .4115 e' nella colonna del test 1. Percio' si riflette il test 1; si intesta +1 la prossima riga e si riporta in parentesi il numero .4115. Si calcolano quindi gli altri numeri della riga +1, sommando algebricamente i numeri della riga +2 ai corrispondenti numeri della riga 1; cosi' per la colonna 2 $(.2110) + (.314) = .5250$, ecc.].

Si procede cosi' di seguito, riflettendo sempre il test che ha il massimo valore *positivo* fuori della parentesi, e continuando finche' tutti i numeri nella riga sono o negativi fuori dalle parentesi o positivi tra parentesi. Riportare le parentesi di riga in riga per indicare che un test e' stato riflesso. Le parentesi significano che la somma ha il segno negativo. Talvolta, dopo numerose riflessioni, il segno meno puo' venire entro a una parentesi (cioe' un numero tra parentesi puo' acquistare il segno negativo). Cio' significa che la somma (dei residui di quel test) e' diventata nuovamente positiva, cioe' che il test deve venir ri-riflesso.

Le riflessioni si dovrebbero continuare finche' tutti i valori sono negativi (o positivi in parentesi). L' ultima riga, che completa il processo, e' denominata B.

32. Moltiplicare per ogni test, i valori della riga B per -2 per ottenere C. Tutti i tests che avevano valori tra parentesi avranno valori C negativi. Sommare algebricamente i C a scopo di controllo; som-

(1) Cioe' in testa alla riga in cui e' stato registrato il numero tra parentesi.

marli anche aritmeticamente (senza tener conto dei segni) per controlli successivi.

33. Registrare i nuovi valori delle comunanze nella riga D con il segno uguale a quello del valore C della stessa colonna. Ogni valore D è uguale al residuo più grande della relativa colonna. Non importa quale sia il segno del residuo; il segno del valore D deve essere uguale a quello del corrispondente valore C . Calcolare la somma aritmetica dei D (senza tener conto dei segni).

34. Calcolare $E = C + D$ per ogni test. Addizionare aritmeticamente (trascurando i segni) i valori E . Tale somma ($\sum |E|$) deve corrispondere a $\sum |C| + \sum |D|$: $\sum |E| = T$ (\checkmark).

35. Calcolare T e $\frac{1}{\sqrt{T}} = m$. Controllare $mT = \sqrt{T}$.

36. Calcolare le saturazioni b_1 moltiplicando m per E ($mE = b_1$). La somma delle saturazioni in valore assoluto (trascurando i segni) deve corrispondere a \sqrt{T} (\checkmark). ($\sum |b_1| = \sqrt{T}$).

37. Ripetere le operazioni 15-36 per ottenere le saturazioni nel terzo fattore (c_1).

38. Se il rango della matrice è maggiore di 3, ripetere ancora le operazioni 15-36 fino ad esaurire l'estrazione delle saturazioni negli ulteriori fattori (1).

* * *

I risultati dell'analisi, che nel nostro esempio si conclude con l'estrazione del 3° fattore, sono raccolti nella matrice dei fattori comuni (Tab. 54) e nella matrice delle varianze (Tab. 55).

Come controllo dell'esattezza dei calcoli, si procede, in base alla formula $FF' = R$, cioè moltiplicando la matrice fattoriale (F) per la sua trasposta, alla ricostruzione della matrice (R) delle correlazioni. Se i calcoli sono esatti, la matrice ricostruita (Tab. 56, parte superiore) è approssimativamente uguale alla matrice originaria (Tab. 56, parte inferiore): l'entità delle divergenze dipende dall'entità dei residui.

Trattandosi di dati fittizi abbiamo la possibilità di mettere a confronto le comunanze esatte che in questo caso erano note, con le comunanze stimate utilizzando come stima della comunanza di un test (Tab. 57), la più elevata correlazione nella rispettiva colonna; inoltre rifacendo l'analisi, inserendo nella matrice delle correlazioni le comunanze esatte, possiamo vedere l'entità delle differenze tra le saturazioni fattoriali ottenute nelle due diverse condizioni, cioè l'entità dell'errore causato dalla stima delle comunanze (Tab. 58).

(1) Per i criteri in base ai quali si stabilisce quando l'analisi è finita, vedi il paragrafo 9 del presente capitolo.

Tests	Fattori comuni		
	A	B	C
1	.695	-.170	.490
2	.454	-.560	.381
3	.636	-.515	-.239
4	.629	.196	-.454
5	.629	.469	-.034
6	.660	.383	-.247
7	.353	-.295	-.128
8	.581	-.297	-.500
9	.727	.274	.450
10	.576	.589	.299

Tabella 54.
Matrice dei fattori
comuni.

Tests	Varianza dei fattori comuni			Comunanza	Varianza specifica	Totale
	A	B	C			
1	.483	.029	.240	.752	.248	1
2	.206	.314	.145	.665	.335	1
3	.404	.265	.057	.726	.274	1
4	.396	.038	.206	.640	.360	1
5	.396	.220	.001	.617	.383	1
6	.436	.147	.061	.644	.356	1
7	.125	.087	.016	.228	.772	1
8	.338	.088	.250	.676	.324	1
9	.529	.075	.202	.806	.194	1
10	.332	.347	.089	.768	.232	1
	3.645	1.610	1.267	6.522	3.478	10

Tabella 55. - Matrice delle varianze.

	Tests									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		.63	.42	.20	.35	.30	.21	.21	.68	.45
2	.60		.50	.00	.00	.00	.27	.27	.36	.00
3	.41	.49		.42	.18	.30	.36	.66	.24	.00
4	.18	.00	.41		.49	.59	.21	.56	.32	.36
5	.34	.01	.17	.50		.57	.09	.24	.56	.63
6	.27	-.01	.28	.60	.60		.15	.40	.48	.54
7	.23	.28	.41	.22	.09	.15		.33	.12	.00
8	.21	.24	.64	.53	.24	.39	.36		.12	.00
9	.68	.35	.21	.31	.57	.47	.12	.12		.72
10	.45	.04	-.01	.34	.63	.53	-.01	.01	.71	

Tabella 56. - Confronto fra le correlazioni originarie (triangolo superiore) e le correlazioni ricostruite (triangolo inferiore).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Comunanze stimate	.68	.63	.66	.59	.63	.59	.36	.66	.72	.72
Comunanze esatte	.79	.81	.72	.65	.58	.61	.18	.73	.80	.81

Tabella 57. - confronto tra le comunanze stimate e le comunanze esatte.

Tests	Fattori		
	A	B	C
1	.701 (.695)	-.156 (-.170)	.473 (.490)
2	.482 (.454)	-.643 (-.560)	.406 (.381)
3	.643 (.636)	-.504 (-.515)	-.230 (-.239)
4	.636 (.629)	.187 (.196)	-.458 (-.454)
5	.618 (.629)	.444 (.469)	-.030 (-.034)
6	.660 (.660)	.350 (.383)	-.228 (-.247)
7	.321 (.353)	-.252 (-.295)	-.115 (-.128)
8	.589 (.581)	-.315 (-.297)	-.533 (-.500)
9	.737 (.727)	.265 (.274)	.433 (.450)
10	.588 (.576)	.619 (.589)	.284 (.299)

Tabella 58. - Matrice delle saturazioni dei tests nei fattori comuni ottenute analizzando la matrice delle correlazioni con comunanze esatte. (I numeri tra parentesi - trascritti da Tab. 54 - sono le saturazioni ottenute analizzando la matrice delle correlazioni con comunanze stimate).

Confronto tra le saturazioni comuni ottenute analizzando la matrice delle correlazioni a) con comunanze stimate b) con comunanze esatte (I numeri tra parentesi ecc.)

La ricostruzione della matrice delle correlazioni della matrice fattoriale ci fornisce inoltre una seconda stima delle comunanze (1), in base alla quale si potrebbero rifare i calcoli, in modo da ottenere stime delle comunanze che si avvicinano sempre piu' alle comunanze esatte.

8. Le fasi dell'analisi centroide nel modello geometrico

Per rendersi conto del significato delle diverse operazioni che si compiono per ^{calcolare e' uguale a' valore comun fattoriale} estrarre i fattori col metodo centroide, e soprattutto per aver chiaro il processo di riflessione dei tests, e' utile seguire il decorso dell'analisi nel modello geometrico.

Il punto di partenza e' la configurazione dei tests, che e' tridimensionale, poiche' la matrice delle correlazioni (Tab. 50) e' di rango 3. Dobbiamo quindi ricorrere ad una rappresentazione prospettica (fig. 58). *moltiplicazioni delle proiezioni dei settori tests*

Ricordiamo che nello spazio dei fattori comuni, che in questo caso e' tridimensionale, *tab* non si trovano i vettori-tests, ma le loro proiezioni; e in quanto proiezioni non sono di dimensioni unitarie, ma di lunghezza pari ad h_i ($i = 1, 2, \dots, m$) cioe' alla radice quadrata della comunanza. *rispettivi*

Siccome in questo caso tutte le correlazioni fra i tests sono positive, gli angoli che i vettori dei rispettivi due tests (2) formano fra loro *nello spazio dei fattori comuni*, sono acuti (3), retti o nulli (4).

Estraendo il 1° fattore col metodo centroide, il vettore del 1° fattore (A) passa per il centroide, il quale, in quanto "centro di gravita'", si trova in una caratteristica posizione centrale rispetto ai vettori dei tests. In seguito a questa posizione del vettore fattoriale A, tutte le proiezioni dei vettori-tests, cioe' le saturazioni dei tests nel 1° fattore, sono positive. I vettori del 2° e del 3° fattore si trovano nel piano α che passa per l'origine comune dei vettori ed e' perpendicolare al vettore del 1° fattore (vedi fig. 58).

Le operazioni riunite in Tab. 50 consistono nella determinazione delle saturazioni nel primo fattore, cioe' delle proiezioni dei singo-

(1) Applicando la formula $h_i^2 = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2$.

(2) Le proiezioni dei vettori-tests nello spazio dei fattori comuni sono pure vettori.

(3) Nella formula $r_{xy} = h_x h_y \cos_{xy}$, h_x ed h_y sono sempre positivi, quindi se r_{xy} e' positivo, dev' essere positivo \cos_{xy} . E quando il coseno di un angolo e' positivo, l'angolo e' acuto.

(4) Ricordiamo che nello spazio dei fattori comuni, essendo h_x ed h_y minori di 1, a un angolo 0 non corrisponde una correlazione perfetta. Infatti nell'esempio di tab. 32 e figg. 47 e 49 i vettori i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 sono allineati, cioe' formano fra loro angoli nulli (di zero gradi) e tuttavia le loro intercorrelazioni sono diverse da 1.

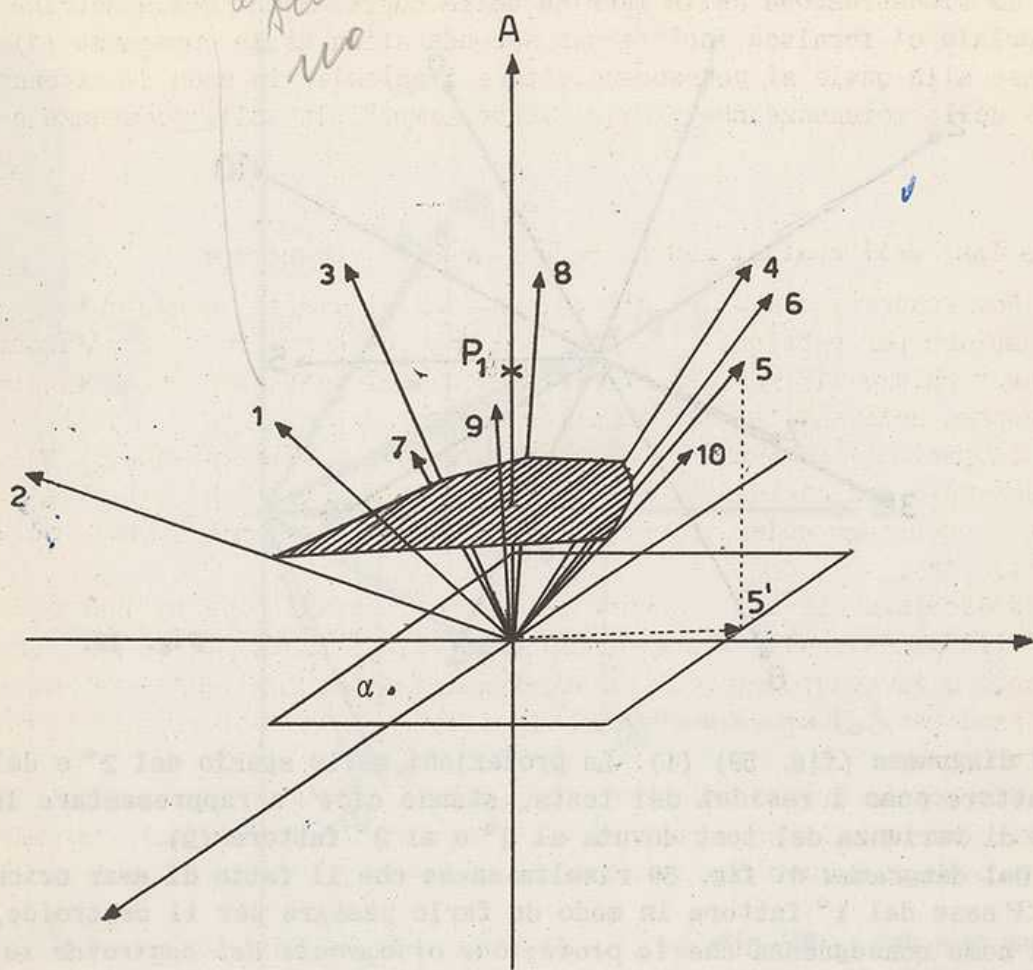


Fig. 58. - Il piano tratteggiato serve soltanto a rendere visibili le direzioni dei vettori-tests.

Il primo vettore fattoriale A passa per il primo centroide P_1 , contrassegnato da una crocetta. Nel piano α , perpendicolare ad A verranno a situarsi i vettori fattoriali B e C e le proiezioni dei vettori-tests, cioè i residui dopo l'estrazione del primo fattore.

li vettori-tests sul vettore fattoriale orientato in modo da passare per il centroide della configurazione.

Il calcolo della matrice dei residui, ottenuti sottraendo dalla matrice delle correlazioni le quote di correlazione dovute al 1° fattore comune (Tab. 51) si traduce geometricamente nella eliminazione della dimensione corrispondente al 1° vettore fattoriale: cioè, tolte le proiezioni dei tests nel 1° fattore, rimangono soltanto le proiezioni dei vettori nello spazio del 2° e del 3° fattore, che è bidimensionale. Quindi la relativa struttura può essere rappresentata esattamente

*anche
l'altra
crata.*

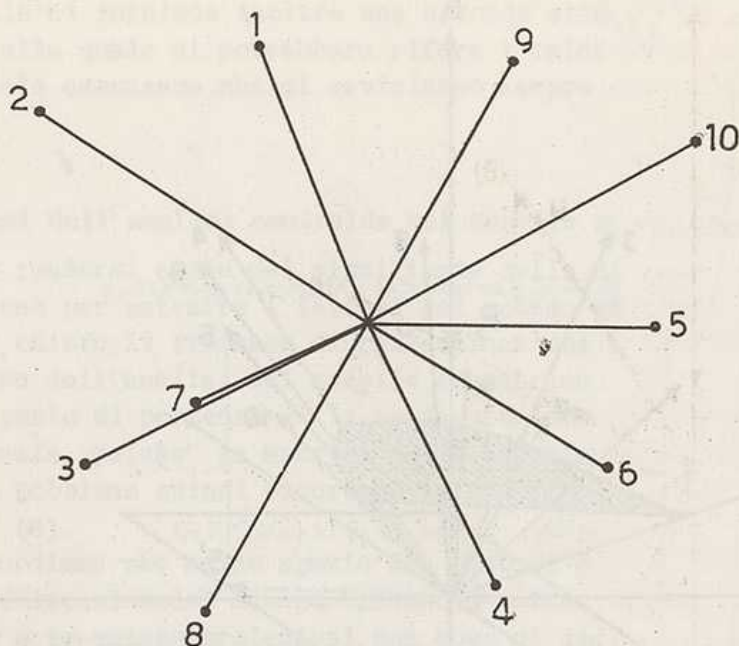


Fig. 59.

mettere sotto sopra (v. Fig. 58)

bidimensionale

in un diagramma (fig. 59) (1). Le proiezioni nello spazio del 2° e del 3° fattore sono i residui dei tests, stanno cioè a rappresentare la quota di varianza del test dovuta al 2° e al 3° fattore (2).

Dal diagramma di fig. 59 risulta anche che il fatto di aver orientato l'asse del 1° fattore in modo da farlo passare per il centroide, porta come conseguenza che la proiezione ortogonale del centroide sul 2° e sul 3° fattore è zero qualunque sia l'orientamento del 2° e del 3° fattore (3); cioè la somma algebrica delle proiezioni dei vettori

concord con l'origine e quindi

cadre nell'origine degli assi ed è quindi zero

(1) La struttura dei residui può essere rappresentata geometricamente senza bisogno di ricorrere ai vettori fattoriali, analogamente a quanto è stato dimostrato per la struttura dei tests, cioè delle proiezioni dei vettori-tests nello spazio dei fattori comuni (v. Parte II, Cap. III, 6). I residui negativi delle correlazioni si traducono nella rappresentazione geometrica in angoli ottusi fra i vettori dei rispettivi tests. Così ad esempio, ai residui delle correlazioni r_{14} , r_{15} , r_{16} , che sono negativi, corrispondono, in fig. 59, angoli ottusi fra i rispettivi vettori.

(2) Ha senso parlare di quota, riferendosi alla comunanza, che rappresenta la quota di varianza dovuta ai fattori comuni. La proiezione del vettore-test nello spazio fattoriale è $h_1 = \sqrt{h_1^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$, mentre la proiezione nel piano del 2° e del 3° fattore è $\sqrt{h_1^2 - a_1^2} = \sqrt{b_1^2 + c_1^2}$.

(3) In altre parole, l'aver stabilito l'orientamento del 1° vettore fattoriale (nel senso che, partendo dall'origine comune dei vettori dei tests, passa per il centroide) porta come conseguenza che i vettori del 2° e del 3° fattore devono trovarsi nel piano perpendicolare al 1° fattore, che passa per l'origine; cioè in quanto gli altri due vettori fattoriali, il cui orientamento non è ancora fissato, sono perpendicolari al 1° vettore fattoriale ed hanno l'origine comune con esso. La proiezione dell'asse del 1° vettore fattoriale sul piano perpendicolare che passa per l'origine è un punto, cioè il punto di intersezione, cioè l'origine del sistema di vettori. E lo stesso punto è la proiezione del centroide (che si trova appunto sul 1° vettore fattoriale).

X

i vettori del 2° e del 3° fattore

La proiezione del centroide, che si trova sul vettore del 1° fattore, corrisponde all'origine del punto di intersezione dei vettori-test, nel piano del 2° e del 3° fattore. Così qualunque sia la posizione di due vettori fattoriali, la proiezione

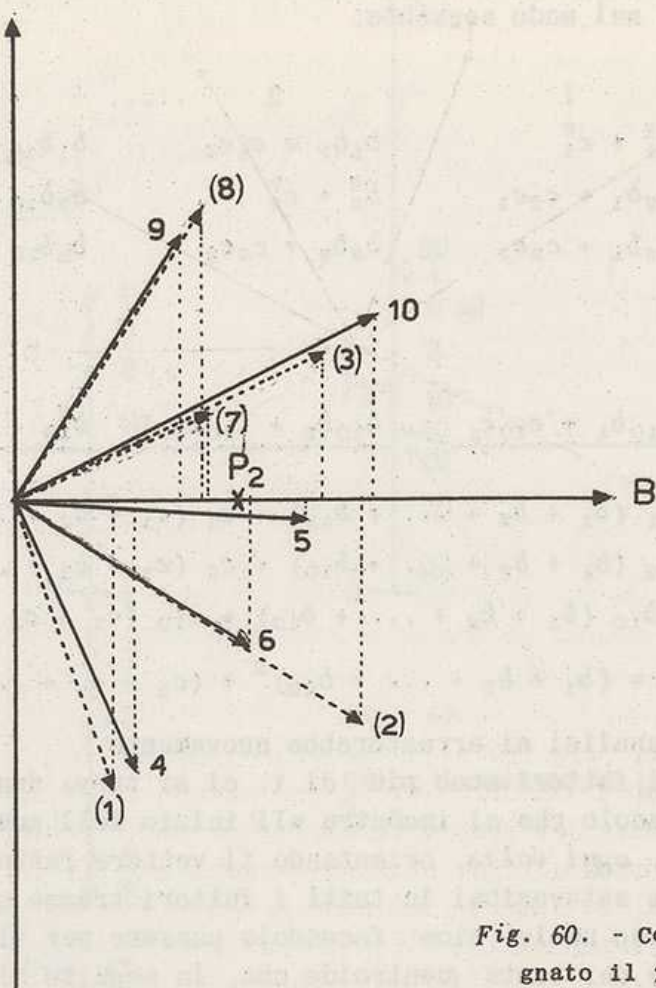


Fig. 60. - Con x e' segnato il 2° centroide P_2 .

dei tests (e quindi delle saturazioni) in ogni successivo fattore e' zero.

L'artificio dell'inversione del significato di alcuni tests, necessario poiche' altrimenti l'analisi centroide non potrebbe piu' procedere, si traduce geometricamente nella *riflessione* dei rispettivi vettori (1).

Ognuno dei suddetti vettori viene cioe' sostituito da un vettore uguale e contrario, il quale e' cioe' situato sul prolungamento del vettore originario, dalla parte opposta rispetto all'origine [vettori (1), (2), (3), (7), (8), che in fig. 60 sono segnati a tratteggio].

Con questa operazione non sono stati tuttavia rimossi tutti gli ostacoli che si oppongono alla prosecuzione dell'analisi; infatti, sic-

(1) In tal modo gli angoli ottusi diventano acuti, cioe' le rispettive correlazioni residue diventano positive, e quindi le somme algebriche delle colonne della matrice diventano positive. Questa operazione ha come conseguenza la non-coincidenza del centroide con l'origine della configurazione.

come i residui contengono ancora due fattori, il procedimento si può schematizzare nel modo seguente:

La n. trasposizione

	1	2 10
1	$b_1^2 + c_1^2$	$b_1 b_2 + c_1 c_2$ $b_1 b_{10} + c_1 c_{10}$
2	$b_2 b_1 + c_2 c_1$	$b_2^2 + c_2^2$ $b_2 b_{10} + c_2 c_{10}$
3	$b_3 b_1 + c_3 c_1$	$b_3 b_2 + c_3 c_2$ $b_3 b_{10} + c_3 c_{10}$
.		
.		
.		
.		
.		
.		
10	<u>$b_{10} b_1 + c_{10} c_1$</u>	<u>$b_{10} b_2 + c_{10} c_2$</u> <u>$b_{10}^2 + c_{10}^2$</u>

*inoltre
la linea
più in basso*

$$\Sigma_1 = b_1 (b_1 + b_2 + \dots + b_{10}) + c_1 (c_1 + c_2 + \dots + c_{10})$$

$$\Sigma_2 = b_2 (b_1 + b_2 + \dots + b_{10}) + c_2 (c_1 + c_2 + \dots + c_{10})$$

$$\Sigma_{10} = b_{10} (b_1 + b_2 + \dots + b_{10}) + c_{10} (c_1 + c_2 + \dots + c_{10})$$

$$T = \Sigma = (b_1 + b_2 + \dots + b_{10})^2 + (c_1 + c_2 + \dots + c_{10})^2$$

e con ciò l'analisi si arresterebbe nuovamente.

Finché i fattori sono più di 1, ci si trova dunque di fronte allo stesso ostacolo che si incontra all'inizio dell'analisi; ostacolo che si supera, *ogni volta*, orientando il vettore fattoriale in modo che le somme delle saturazioni in tutti i fattori tranne quello che si sta estraendo, siano nulle, cioè facendolo passare per il centroide della configurazione dei tests (centroide che, in seguito alla riflessione dei vettori, non coincide più con l'origine).

In fig. 60 è rappresentata la configurazione dei tests dopo la riflessione, il centroide della configurazione (2° centroide, P_2) e l'asse del 2° fattore (B) che passa per il centroide. Dalla figura si vede anche che tutte le proiezioni sul 2° vettore fattoriale sono positive. Ma questa è una conseguenza dell'artificio della riflessione di un gruppo di tests; in realtà, siccome la riflessione, cioè l'inversione del significato di un gruppo di tests, viene attuata solo provvisoriamente, come espediente per poter procedere nell'analisi, alle saturazioni dei tests riflessi viene in seguito cambiato il segno per ridare ai relativi tests il significato originario; esse diventano negative in seguito alla ri-riflessione (1).

Le operazioni riunite nella seconda parte di tab. 51 consistono nella riflessione dei suddetti 5 tests e nel calcolo delle saturazioni nel 2° fattore.

(1) Nel metodo *centroide completo* le saturazioni ottengono direttamente il segno definitivo e quindi la ri-riflessione è immediata.

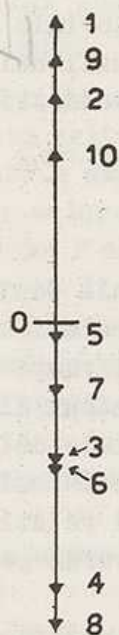


Fig. 61.

non dovrebbe essere più lungo? come quest?

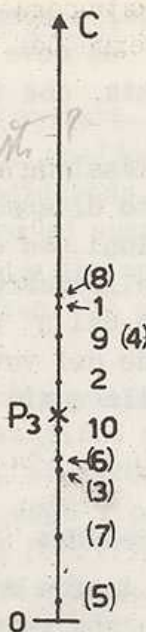


Fig. 62.

Con x e' segnato il terzo centroide P_3 .

per di uguare il 3° centroide?

*Non occorre
E' una
matrice
unifattoriale
(ma lo è)
L'assi per chi non
si sa - p. una
matrice
referenziale
quant',
son 2
fattori*

Il calcolo della II matrice dei residui (Tab. 52), ottenuta sottraendo dalla I matrice dei residui le quote di correlazione dovute al 2° fattore, si traduce geometricamente nell'eliminazione di un'ulteriore dimensione. Poiche' ormai resta da estrarre soltanto un fattore comune, lo spazio dei fattori comuni e' unidimensionale; infatti i vettori residuali, cioe' le proiezioni dei vettori nello spazio del 3° fattore (fig. 61), si dispongono lungo una retta (1).

Nel modello geometrico (fig. 61) e' evidente che non vi sono alternative per la direzione del 3° fattore, il quale deve disporsi lungo la retta sulla quale sono disposti i vettori residuali. Ma il procedimento di calcolo delle saturazioni e' ancora una volta bloccato in

(1) Siccome nel metodo centroide completo si ottengono immediatamente le saturazioni con i segni definitivi, la riflessione dei tests non influisce sul calcolo dei residui. In altre parole, i residui non si ottengono a partire dalla situazione di fig. 60, bensì a partire dalla situazione di fig. 59, e quindi le proiezioni sull'asse del 3° fattore sono quelle dei vettori originali anziche' quelle dei vettori riflessi.

(2) Retta d'allineamento per l'orientamento del Vettore

seguito all'annullarsi della somma delle saturazioni ($c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{10} = 0$). Perciò si deve ripetere l'operazione della riflessione di un gruppo di tests, che in questo caso sono i tests 3, 4, 5, 6, 7, 8 (fig. 62).

In seguito alla riflessione dei suddetti tests la somma delle saturazioni dà un risultato diverso da zero, e si può quindi procedere al calcolo delle saturazioni con cui si concludono le operazioni raccolte in tab. 52, e all'eliminazione della terza ed ultima dimensione (fig. 62). L'orientamento del 3° vettore fattoriale è stabilito anche questa volta dal centroide dei vettori residuali dei tests, che è localizzato sulla retta sulla quale i vettori suddetti si trovano, ed ha valore positivo (1).

9. Significatività dei residui

Poiché, secondo la teoria multifattoriale di Thurstone il numero di fattori da estrarre da una matrice di correlazioni è pari al rango della matrice stessa, basterebbe calcolare il rango della matrice delle correlazioni per sapere dopo quante estrazioni di fattori l'analisi deve considerarsi conclusa. Ma la determinazione del rango di una matrice implica il calcolo di un numero di minori così grande da costituire un compito proibitivo anche per matrici relativamente piccole; perciò si è costretti a seguire una via diversa per stabilire quando è il caso di considerare conclusa l'analisi.

È stata elaborata a tale scopo tutta una serie di criteri per stimare se le correlazioni residue dopo l'estrazione di un fattore sono da considerarsi significativamente diverse da zero, o in altre parole, se estraendo un ulteriore fattore si ottengono saturazioni significativamente diverse da zero. Ma nessuno dei criteri applicabili all'analisi centroide è del tutto soddisfacente. La ragione per cui si dispone a tale scopo di una pluralità di criteri diversi i quali, applicati allo stesso problema, non danno in genere risultati concordanti è che la deduzione di una formula dell'errore-tipo, che permetta di stabilire quale probabilità c'è che i residui ottenuti dopo l'estrazione di un fattore non siano dovuti alla fluttuazione casuale dei campioni (errore di campionatura), ma a un ulteriore fattore, presenta difficoltà insuperabili quando si procede all'estrazione dei fattori con un metodo come quello centroide, che utilizza le comunanze stimate (2).

Pertanto i criteri proposti per stabilire quando si debba considerare conclusa l'estrazione dei fattori hanno il carattere di regole pratiche e non di metodi teoricamente accertati.

(1) Infatti nello spazio unidimensionale il vettore fattoriale può avere due diversi orientamenti.

(2) THOMSON, cap. VIII, 2. p. 121.

Ci limiteremo ad elencare alcuni di questi criteri, indicando come si applicano.

a) *Somma algebrica dei residui* (Mosier). - Il criterio si basa sul confronto tra le somme algebriche dei residui (calcolati dopo aver operato la riflessione dei tests, ed escludendo le comunanze) dopo la estrazione di ogni fattore. Si continuano ad estrarre i fattori finché la somma algebrica dei residui continua a diminuire dopo l'estrazione di ogni fattore; quando non diminuisce più, si conclude l'analisi scartando l'ultimo fattore.

b) *Rapporto tra le somme dei valori assoluti dei residui* (Tucker). - Secondo questo criterio, per stabilire se un determinato fattore D è da accogliere o da respingere, si calcola il rapporto fra le somme dei residui (in valore assoluto) dopo l'estrazione di un ulteriore fattore, E , e dopo l'estrazione di D ; il fattore D viene accolto e si ripete la prova per il successivo fattore E se tale rapporto è minore di $(m-1)/(m+1)$ (essendo m il numero dei tests).

Si procede nel modo seguente:

1. Aggiungere i valori assoluti degli elementi della matrice dei residui dopo l'estrazione del fattore D .

2. Stimare le comunanze per calcolare un successivo fattore E , e addizionarle.

3. Aggiungere la somma ottenuta al punto (1) alla somma ottenuta al punto (2).

4. Estrarre un ulteriore fattore E . Aggiungere i valori assoluti degli elementi della matrice residuale successiva all'estrazione del fattore E .

5. Calcolare i residui delle comunanze dopo l'estrazione del fattore E e addizionarli.

6. Aggiungere la somma ottenuta al punto (4) alla somma ottenuta al punto (5).

7. Dividere la somma ottenuta al punto (6) per la somma ottenuta al punto (3).

8. Calcolare $(m-1)/(m+1)$ (essendo m il numero dei tests).

9. Se il risultato ottenuto al punto (7) è minore di $\frac{m-1}{m+1}$,

il fattore D è accolto e si ripete la prova per il successivo fattore E ; se è maggiore o uguale si prendono in considerazione soltanto D e i fattori estratti precedentemente a D .

c) *Numero di segni negativi nei residui dopo la riflessione* (Coombs). - Questo criterio è applicabile solo se la matrice delle correlazioni contiene soltanto correlazioni positive, o tutt'al più correlazioni negative non significativamente diverse da zero; esso si fonda sul principio che se ci sono ancora dei fattori significativi, dopo la riflessione dei tests non vi dovrebbero essere residui negativi in

numero superiore a quello probabile per azione di fattori casuali. Il criterio si applica contando il numero di residui negativi che rimangono nella tabella dei residui *dopo operata la riflessione*. Se il numero e' significativamente maggiore di quello indicato nella riga 2 di tab. 59, il fattore e' considerato genuino e quindi accolto; altrimenti viene respinto e il processo di estrazione dei fattori si considera concluso.

1. Numero dei tests	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	25	30	35	40	50
2. Numero di segni negativi dopo le riflessioni	31	39	48	57	69	79	92	105	119	134	149	242	358	497	660	1061
3. Errore standard di (2)	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	12	15	17	20	25

Tabella 59.

d) *Errore standard dei coefficienti di correlazione* (Guilford e Lacey). - Il criterio e' costituito dall'errore standard dei coefficienti di correlazione, cioe', se per calcolare i coefficienti di correlazione si e' usata la formula di Pearson, $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Il prodotto delle due piu' grandi saturazioni dev' essere maggiore di $\frac{1}{\sqrt{n}}$ [o, secondo Humphrey (1) maggiore di $2 \frac{1}{\sqrt{n}}$].

e) *Criterio di Saunders*. - E' un criterio fondato sulla stima dell'errore-tipo dei residui, calcolato tenendo conto anche della grandezza del campione dei soggetti sui cui risultati sono stati calcolati i coefficienti di correlazione originari.

Si procede nel modo seguente:

1. Aggiungere i quadrati dei residui dopo l'estrazione dell'ultimo fattore, escluse le comunanze.

2. Moltiplicare per $\frac{2m}{m-1}$ la somma ottenuta al numero (1) (in cui m e' il numero dei tests).

(1) Vedi FRUCHTER, cap. V.

3. Calcolare la differenza fra il numero di tests (m) e il numero di fattori estratti (k).

4. Dividere il risultato ottenuto in (3) per il numero dei tests (m) e innalzare al quadrato il risultato.

5. Innalzare al quadrato le saturazioni di tutti i fattori e sommarle.

6. Sottrarre da m (cioe' dal numero dei tests) il risultato ottenuto al numero (5).

7. Innalzare al quadrato il risultato ottenuto al numero (6).

8. Dividere il risultato ottenuto al numero (7) per il numero di soggetti (N) del campione su cui sono state calcolate le correlazioni.

9. Moltiplicare il risultato di cui al numero (4) per il risultato di cui al numero (8).

10. Confrontare il risultato ottenuto al numero (2) col risultato ottenuto al numero (9). Se (2) < (9), la fattorizzazione e' completa. Altrimenti si deve estrarre un ulteriore fattore.

Simbolicamente

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n k \rho_{ij}^2 < \left[\frac{m - k}{m} \right]^2 (m - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n l_{ij}^2) \frac{1}{n}$$

in cui $k\rho$ sono i residui dopo estratto l'ultimo fattore k e l sono le saturazioni nei vari fattori, cioe' gli elementi della matrice fattoriale.

In generale non e' prudente fidarsi di un solo criterio, e conviene applicarne almeno due o tre. Se, come spesso avviene, i criteri si contraddicono, si puo' ricorrere, per decidere, all'applicazione di un ulteriore criterio, scegliendone uno dei piu' attendibili, anche se di applicazione piu' laboriosa, come per es. il criterio di Saunders che tiene conto anche del numero dei soggetti.

Si tratta comunque di prendere una decisione, che come tutte le decisioni relative alla significativita' di un dato, implica il rischio di due opposti errori, e cioe', in questo caso, il rischio di accettare come saturazioni fattoriali degli artefatti, dovuti soltanto a scostamenti casuali dallo zero, e l'altro rischio, di trascurare le saturazioni relative ad un fattore, considerando come varianza di errore delle quote di varianza sistematica. Vi sono a questo proposito due opposti punti di vista sostenuto ciascuno da diversi studiosi. Da un lato si sostiene che il rischio di trascurare un fattore che ha una varianza molto limitata avra' poca importanza nel determinare la struttura fattoriale ottenuta attraverso alle successive rotazioni; inoltre la conoscenza del numero esatto dei fattori ottenuti in una particolare analisi e' di scarsa importanza. D'altra parte si afferma, e con ragione, che fra i due pericoli, di estrarre un fattore in piu' o di estrarne uno in meno, e' preferibile il primo, in quanto in genere un fatto-

re spurio scompare operando le rotazioni in quanto tende a perdere progressivamente la varianza cedendola ad altri fattori; e tale varianza serve a precisare la struttura fattoriale definitiva, ottenuta alla fine del processo di rotazione.

In realta' quest'ultimo punto di vista e' fondato sulla convinzione che la varianza erronea si distribuisca in tutti i fattori, e che procedendo nell'estrazione si ottengono sempre dei fattori che comprendono una quota, per quanto piccola, di varianza sistematica. Ma anche ammettendo la fondatezza di questo punto di vista, e' sempre necessario utilizzare un criterio per stabilire quando l'apporto di varianza sistematica da parte di un fattore diventa trascurabile.

Guilford afferma in base alla sua esperienza che, quando un fattore ha una o piu' saturazioni dell'entita' di almeno $\pm 0,20$, contiene abbastanza varianza da risultare utile nelle rotazioni, e che cio' vale anche per un fattore che ha due o piu' saturazioni tra 0,15 e 0,20, benché in questo caso si tratti certamente di un fattore residuale, che perdera' varianza riducendosi alla fine a non avere saturazioni sostanziali (1).

Non è scritto

(1) Cioe' maggiori di 0,25 o 0,30.

1. Le caratteristiche della struttura centroide

L'aver analizzato due volte gli stessi dati (tabb. 32 e 43) con due metodi diversi contribuisce notevolmente a chiarire la natura dell'analisi fattoriale.

E' utile avere dinanzi agli occhi i due diagrammi relativi l'uno all'analisi compiuta col metodo di Spearman esteso ai fattori di gruppo e l'altro col metodo centroide di Thurstone (figg. 49 e 57). In primo luogo risulta evidente, dalla netta diversita' dei risultati delle due analisi, che quando si abbandona (necessariamente) la teoria dei due fattori, e si applicano quindi i metodi di analisi alle matrici di rango superiore a 1, il risultato non e' univoco. Dal confronto dei due diagrammi si vede che essi differiscono in quanto i due vettori fattoriali perpendicolari che costituiscono le coordinate della struttura dei vettori-tests sono in posizione diversa; ed e' chiaro che oltre alle due posizioni assunte nei due diagrammi, i vettori fattoriali possono assumere infinite altre posizioni ruotando intorno all'origine. Tali posizioni forniscono ciascuna una diversa descrizione dei tests in termini di coordinate, descrizioni che sono, dal punto di vista geometrico, tutte ugualmente valide.

Tuttavia, anche intuitivamente, le due soluzioni fattoriali appaiono, oltre che diverse, non ugualmente soddisfacenti. Nella prima uno dei due assi assume una posizione privilegiata, in quanto, per cosi' dire, indicata dalla particolare posizione di un gruppo di cinque vettori-tests (i_1-i_5) disposti tutti lungo una stessa retta. Facendo passare uno dei vettori fattoriali lungo questa stessa retta (fig. 49) i cinque vettori-tests hanno proiezione nulla sul secondo vettore fattoriale, e risultano quindi unifattoriali. In questo senso la struttura ottenuta dall'analisi ha il vantaggio della semplicita'.

Se poi vogliamo renderci conto di quale possa essere il significato psicologico delle due diverse strutture fattoriali, la prima delle

due soluzioni risulta ulteriormente avvantaggiata. È chiaro che, essendo il risultato della prima analisi la conferma di un'interpretazione psicologica (l'ipotesi dell'esistenza di un fattore verbale) l'interpretazione della struttura fattoriale ottenuta non offre difficoltà. Ma anche a prescindere da questo vantaggio iniziale, la difficoltà di trovare un'interpretazione psicologica ai fattori risultati dalla seconda analisi appare veramente insuperabile.

I fattori sono pure due (1) ma tutti e due hanno proiezioni non nulle di tutti i tests. Sono dunque due fattori generali; tuttavia hanno caratteristiche nettamente diverse. Il primo fattore passa in mezzo ai vettori-tests e su di esso tutti i tests hanno proiezioni positive. Si tratta dunque di un fattore generale con caratteristiche affini al fattore G, in quanto satura positivamente tutti i tests della batteria. Il secondo fattore ha invece proiezioni positive di 4 e negative di 6 vettori-tests; si tratta dunque di un fattore *bipolare* che satura positivamente un gruppo di tests e negativamente un altro gruppo.

In altre parole, questo fattore avrebbe la proprietà di determinare il successo in un gruppo di tests e l'insuccesso in un altro gruppo.

È veramente molto difficile concepire il significato psicologico di un fattore che abbia queste caratteristiche (2).

Ma vi è anche una ragione di ordine generale per cui la ricerca di un significato psicologico dei fattori ottenuti col metodo centroide non appare giustificata.

Se infatti prendiamo in considerazione la seconda analisi compiuta col metodo centroide (3), notiamo immediatamente che le caratteristiche osservate per la prima analisi si ripetono; il primo fattore ha tutte le saturazioni positive, mentre il secondo (e il terzo) hanno saturazioni positive per alcuni tests e negative per alcuni altri (fattori bipolari). Tali caratteristiche si ritrovano in ogni analisi centroide, indipendentemente dal contenuto dei tests analizzati: si tratta quindi di un artefatto tecnico di cui non ha senso cercare un'interpretazione.

2. L'esigenza della semplicità

Siamo giunti dunque alle seguenti conclusioni. 1. Vi sono infinite soluzioni fattoriali, corrispondenti alle infinite posizioni che può assumere un sistema di coordinate ruotando intorno alla propria origine, tutte ugualmente esatte ed accettabili dal punto di vista ma-

(1) Il numero dei fattori è costante, in quanto corrisponde al rango della matrice delle correlazioni.

(2) Almeno finché l'analisi si svolge nell'ambito delle attitudini; non è così per l'analisi dei tratti del carattere.

(3) Cioè l'analisi di una matrice di rango 3, compiuta col metodo centroide completo di Thurstone.

tematico. 2. Si possono tuttavia formulare dei criteri, in base ai quali le soluzioni fattoriali aventi determinate caratteristiche sono preferibili alle altre. 3. Le caratteristiche della soluzione fattoriale ottenuta con una determinata tecnica possono essere dipendenti da quella particolare tecnica e costituire quindi degli artefatti che non rispecchiano in alcun modo le caratteristiche dei dati sottoposti ad analisi.

E' perciò evidente che, almeno in questi ultimi casi, non vi e' nessuna ragione per preferire la soluzione fattoriale imposta da una particolare tecnica di estrazione dei fattori ad una qualsiasi delle infinite soluzioni fattoriali matematicamente corrette, mentre e' giustificato scegliere una soluzione che risulti privilegiata in base ad un criterio di ordine generale.

Cio' significa che il risultato dell'analisi deve essere considerato non tanto come un punto di arrivo, quanto come un punto di partenza per una nuova serie di operazioni che portano a raggiungere la soluzione definitiva.

In termini di tecnica fattoriale si tratta cioe' di *ruotare* il sistema dei vettori fattoriali ottenuti nella prima fase dell'analisi fino ad una posizione che determini una struttura che risulti privilegiata rispetto alle altre soluzioni possibili.

Resta da stabilire quali caratteristiche debba avere una struttura affinche' essa sia privilegiata rispetto a tutte le altre strutture corrispondenti alle infinite posizioni possibili del sistema dei vettori fattoriali rispetto alla configurazione dei vettori-tests. Thurstone nel definire tale struttura si appella al principio della semplicita': quando c' e' la possibilita' di piu' soluzioni, la soluzione scientificamente accettabile e' quella piu' semplice, che e' anche la piu' economica.

Si tratta dunque di ottenere una *struttura semplice*. Vediamo di precisare che significato si deve attribuire alla nozione di semplicita' di una struttura fattoriale. In che senso la struttura fattoriale ottenuta applicando l'estensione del metodo di Spearman (struttura A) e' risultata piu' semplice di quella ottenuta applicando il metodo centroide (struttura B)? Possiamo confrontare le due strutture sia nel riguardo dei vettori-tests, sia nel riguardo dei vettori fattoriali: dal primo punto di vista la struttura A e' piu' semplice perche' un certo numero di tests risulta monofattoriale, cioe' di costituzione semplice, mentre dal secondo punto di vista la struttura A e' piu' semplice perche' uno dei due fattori satura soltanto alcuni tests. L'una e l'altra caratteristica si compendiano dicendo che una parte dei tests ha proiezione zero in uno dei due fattori.

Vi e' anche un altro aspetto per cui la struttura A e' piu' semplice della struttura B: nella struttura A i fattori hanno soltanto proiezioni positive, mentre nella struttura B, come si e' visto, uno

dei fattori e' bipolare, cioe' ha proiezioni in parte positive, in parte negative.

3 La soluzione di Thurstone

Thurstone fissa appunto queste due condizioni per l'accettabilita' di una soluzione: "insieme" positivo e struttura semplice. La struttura semplice viene precisata nei riguardi della matrice delle saturazioni fattoriali, la quale deve avere:

- a) almeno una saturazione nulla per ogni tests;
 b) un certo numero di saturazioni nulle in ogni fattore (secondo Thurstone, tante, quanti sono i fattori);
 c) per ogni coppia di fattori un certo numero di tests con una saturazione zero in un fattore e una saturazione significativa nell'altro (secondo Thurstone, tanti, quanti sono i fattori) (1).

F a t t o r i

	A	B	C	D
t_1	0	X	X	X
t_2	0	X	0	X
t_3	0	X	0	X
t_4	0	0	X	X
t_5	X	0	X	X
t_6	X	0	X	X
t_7	X	0	X	0
t_8	X	X	0	0
t_9	X	X	0	0
t_{10}	X	X	X	0

Tabella 60.

Per intendere il significato delle esigenze poste da Thurstone, presentiamo nella matrice fattoriale di tab. 60 un esempio di una struttura fattoriale semplice. Sono indicate con una X le saturazioni fattoriali non-nulle, cioe' statisticamente significative, e con uno 0 le saturazioni nulle o non significativamente diverse da zero.

Il punto a) riguarda la composizione fattoriale dei singoli tests,

(1) Le caratteristiche di una matrice fattoriale che corrisponde alla regola di Thurstone sono dunque le seguenti:

- a) almeno uno zero in ogni riga,
 b) almeno tanti zeri quante sono le colonne, in ogni colonna,
 c) per ogni coppia di colonne, almeno tante righe costituite da uno zero e da un numero diverso da zero, quante sono le colonne (intendendosi con zero ogni numero non significativamente diverso da zero).

e pone un'esigenza di semplicità in quanto nessun test dev'essere saturato da tutti i fattori. Nel nostro esempio, ci sono 6 tests che sono saturati da 2 fattori ($t_2, t_3, t_4, t_7, t_8, t_9$), 4 tests saturati da tre fattori (t_1, t_5, t_6, t_{10}), ma nessun test è saturato da tutti e quattro i fattori. Di conseguenza risultano più semplici le equazioni di specificazione fattoriale (1), e risulta evidentemente meno complessa l'interpretazione del significato di ogni singolo test in termini di fattori.

Il punto b) riguarda invece la "semplicità dei fattori", nel senso che la "stima" del punteggio fattoriale di un soggetto dovrebbe implicare solo una parte dei tests e non tutti i tests della batteria. In altre parole, nell'esempio considerato, l'equazione di regressione multipla (2) per la stima del punteggio fattoriale di un soggetto comprenderebbe 6 termini anziché 10, poiché i punteggi di 4 tests avrebbero ponderazione 0, essendo nullo il relativo coefficiente di regressione multipla. Per esempio la stima del punteggio del soggetto P nel fattore C si otterrebbe impostando l'equazione

$$C_p = \beta_{c1}z_{1p} + \beta_{c4}z_{4p} + \beta_{c5}z_{5p} + \beta_{c6}z_{6p} + \beta_{c7}z_{7p} + \beta_{c10}z_{10p}$$

poiché, data la composizione della matrice fattoriale, $\beta_{c2}, \beta_{c3}, \beta_{c8}$ e β_{c9} sarebbero nulli.

Infine il punto c), riguarda la semplicità di composizione delle correlazioni (3) e la diversità di composizione fattoriale dei singoli tests. Si esige in tal modo che ogni test della batteria rappresenti un nuovo apporto di informazione e non ripeta semplicemente l'informazione già contenuta in un altro test.

Si tratta, tuttavia, di esigenze molto restrittive, alle quali spesso riesce impossibile ottemperare, anche se non si accolgono rigidamente, dal punto di vista quantitativo. Di fatto esse non sono uni-

(1) Per es. l'equazione di specificazione del test t_3 è:

$$z_{p3} = b_3B_p + d_3D_p + u_3S_{3p}$$

in cui b_3 e d_3 sono i coefficienti di saturazione dei fattori B e D nel test t_3

(2) Vedi Parte I, cap. IV, 5. Va ricordato però che il procedimento indicato alla fine del paragrafo si può usare soltanto per la stima della G da una matrice gerarchica. Nel caso presente l'equazione di regressione multipla si imposta con i metodi classici, descritti nei testi di statistica: i coefficienti di regressione β si calcolano per mezzo dei coefficienti di correlazione fra i tests della batteria e dei coefficienti di saturazione dei tests nel fattore che si intende stimare (in quanto i coefficienti di saturazione sono coefficienti di correlazione dei tests con il fattore).

(3) Ricordiamo che per la generalizzazione dell'equazione fattoriale della correlazione, nel caso di 4 fattori comuni A, B, C, D si avrà per es.:

$$r_{12} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$$

ma essendo nel nostro esempio $a_1 = 0, a_2 = 0, c_1 = 0, c_2 = 0$ il primo e il terzo termine si annullano e l'equazione si riduce a $r_{12} = b_1b_2 + d_1d_2$.

X Controllare questi punti. La semplicità dei fattori, se la rotazione è obliqua implicherebbe la semplicità semplice, non la composizione semplice

versalmente accettate, pur essendo generalmente accettato il principio della massima semplicità della struttura. Infatti, neppure la struttura A del nostro primo esempio di analisi soddisfa al criterio di Thurstone, in quanto c'è un fattore che ha saturazioni in tutti i tests. Secondo il criterio di Thurstone non è infatti ammissibile la presenza di un fattore generale in una struttura.

4. Adeguatezza della soluzione e semplicità della struttura

Prima di prendere posizione nei riguardi del criterio di Thurstone ci conviene renderci conto delle ragioni su cui esso si fonda.

La constatazione della indeterminazione della soluzione fattoriale, quando si esce dalle condizioni fissate da Spearman, del fatto che cioè quando la matrice delle correlazioni è di rango superiore ad 1, vi sono infinite soluzioni (1) tutte altrettanto valide dal punto di vista matematico, mette in crisi il metodo. L'utilità dell'analisi fattoriale diviene cioè molto limitata a meno che non si trovi modo di stabilire quale tra le infinite soluzioni sia da considerare la soluzione accettabile. Si tratta, in sostanza, di ripristinare l'unicità della soluzione; e il fissare il criterio della massima semplicità non basta. In questo modo si viene cioè ad indicare la direzione in cui va ricercata la soluzione, ma non è ancora fissato il criterio per individuarla. Bisogna infatti che la soluzione definitiva sia riconoscibile, sia nei confronti di un'altra soluzione (mentre potrebbe non essere evidente quale di due soluzioni date sia più semplice essendovi diverse forme di semplicità) sia in se stessa (in quanto dovrebbe essere esclusa anche la possibilità di un'altra soluzione ancor più soddisfacente).

In questo senso le condizioni fissate da Thurstone rappresentano un tentativo di sostituire con un criterio determinato empiricamente in modo da rendere improbabile una soluzione "migliore", una soluzione matematica che finora manca.

Cattell (2), pur accettando il punto di vista di Thurstone lo interpreta in maniera meno rigida e più aderente ai fatti.

Applicare il principio della semplicità consiste in effetti nello scoprire la struttura adatta per un determinato insieme di dati, quella che corrisponde alle variabili, manifeste o latenti che siano, che agiscono in una determinata situazione. Certe esigenze di semplicità non si possono porre in astratto, perché possono non corrispondere alle caratteristiche intrinseche dell'oggetto della ricerca. Così l'esigenza dell'"insieme positivo", valida finché la ricerca si svolge nel campo delle attitudini, diventa inadeguata nell'ambito della

(1) Infinite ma non qualsiasi.

(2) R. CATTELL, *Factor Analysis*, New York, 1952. Cap. XIV.

struttura del carattere, dove la bipolarità delle variabili appare connaturata all'oggetto della ricerca.

Cio' significa anche che una struttura semplice deve esserci nei dati su cui verte l'analisi, affinché sia possibile trovarla. In altre parole se si affastellano a caso delle correlazioni fra dati qualsiasi in una matrice, non c'è ragione di aspettarsi di trovare una struttura semplice; mentre se i dati sono scelti in base ad un criterio scientifico in relazione ad un problema, si scopre che le variabili hanno una struttura. Tale struttura viene rivelata nei diagrammi dal fatto che serie di punti, che rappresentano le estremità dei vettori delle variabili (per es. dei tests) si dispongono secondo rette che passano per l'origine. Se i fattori sono soltanto due, si tratta effettivamente di rette, mentre se c'è una terza dimensione la retta rappresenta il profilo (o traccia) di un piano (cioè di un disco) perpendicolare al piano del diagramma. Orbene, tale retta o piano (1) rappresenta l'indicazione dell'orientamento che, per mezzo della rotazione deve assumere un fattore: il vettore fattoriale deve venir orientato *perpendicolarmente* alla retta (o al piano o, se i fattori sono più di tre, all'iperpiano) individuati dai vettori-tests, che nella proiezione appaiono allineati o quasi (2), in modo che la loro proiezione nel vettore fattoriale sia nulla. Questo procedimento è sintetizzato da Cattell dicendo che la posizione dei poli di un fattore viene scoperta trovando un equatore (fig. 63). È chiaro che, secondo questo punto di vista, nell'esempio bifattoriale la soluzione adeguata risulta quella ottenuta attraverso l'estensione del procedimento di Spearman (struttura A): infatti, essendovi due dimensioni soltanto, ed essendo alcuni vettori-tests disposti lungo una semiretta che parte dall'origine, uno

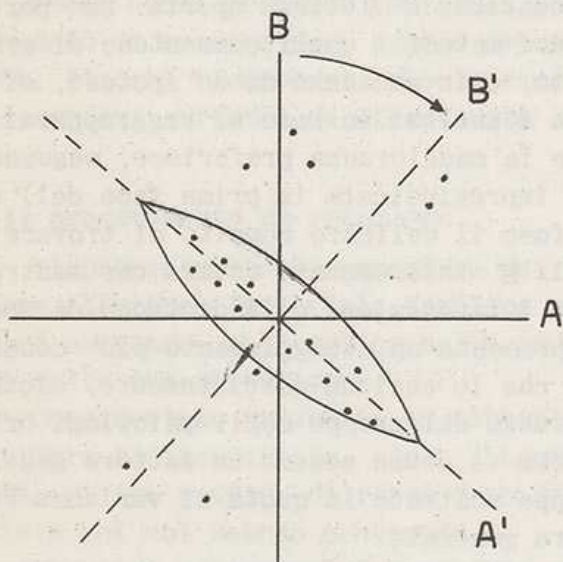


Fig. 63.

vando un equatore (fig. 63). È chiaro che, secondo questo punto di vista, nell'esempio bifattoriale la soluzione adeguata risulta quella ottenuta attraverso l'estensione del procedimento di Spearman (struttura A): infatti, essendovi due dimensioni soltanto, ed essendo alcuni vettori-tests disposti lungo una semiretta che parte dall'origine, uno

(1) Se le dimensioni sono quattro si tratta della traccia di una sfera, e in genere di un iperpiano se le dimensioni sono più di tre, e quindi lo spazio fattoriale è un iperspazio.

(2) Evidentemente non è necessario che i vettori-tests (o i loro punti estremi) diano come proiezione esattamente una retta, perché trattandosi di dati sperimentali, affetti da errori di campionatura, non sarebbe giusto esigere un allineamento perfetto.

dei vettori fattoriali dev' essere orientato perpendicolarmente a tale semiretta, e l'altro, perpendicolarmente al primo, e quindi coincidente con i vettori-tests (1).

A questo punto sorge naturale un'obiezione. Se dopo aver estratto i fattori col metodo centroide bisogna ruotarli fino a raggiungere una struttura semplice che coincide con quella che si era trovata direttamente sviluppando il procedimento di Spearman, non e' piu' conveniente scegliere sempre la via diretta anziche' quella indiretta del metodo centroide?

L'obiezione si puo' tradurre in termini generali, senza riferimento al particolare procedimento da noi adottato, ponendo la questione se non sia piu' conveniente partire da un'ipotesi circa la struttura fattoriale e procedere direttamente all'estrazione dei fattori corrispondentemente all'ipotesi, anziche' eseguire prima un'analisi che da' un artefatto strutturale e da questo cercare la soluzione adeguata.

Posta in questi termini la questione e' tuttora aperta. Una parte dei ricercatori preferisce usare dei metodi i quali consentono di servirsi di un'ipotesi fin dall'inizio, o in mancanza di un'ipotesi, offrono la possibilita' di orientare l'analisi in base al raggrupparsi dei dati secondo affinita'; mentre la maggioranza preferisce, seguendo la tecnica di Thurstone, lasciare impregiudicata la prima fase dell'analisi, ed affidare alla seconda fase il delicato compito di trovare la struttura *naturale* delle variabili. E' interessante notare che mentre il metodo di Thurstone rappresenta l'innovazione e il distacco da Spearman, l'altro gruppo di metodi rappresenta un atteggiamento piu' conservatore: a differenza da Thurstone che lo esclude assolutamente, alcuni di questi metodi, adottati soprattutto dal gruppo degli psicologi britannici, partono dal presupposto che vi debba essere un fattore generale, e riservano ai fattori di gruppo soltanto la quota di varianza residua dopo l'estrazione del fattore generale.

L'utilizzazione del metodo centroide per l'estrazione dei fattori impone comunque di ruotare i fattori per ricercare la struttura semplice. Si tratta di un metodo che ha il vantaggio di essere generalmente applicabile, ed e' di fatto il metodo piu' comunemente usato.

D'altra parte, va tenuto presente che altri criteri, oltre a quello della semplicita' della struttura - che rappresenta il criterio base - possono essere adottati a guidare le rotazioni degli assi a par-

(1) In definitiva puo' apparire conveniente limitarsi a dire che si tratta di far coincidere un vettore fattoriale con la traccia di un iperpiano. In realta', pero', cio' che si cerca di raggiungere e' la semplicita' della struttura, che si ottiene situando un vettore fattoriale in modo che un certo numero di tests (o, in generale, di variabili) abbia proiezione nulla su di esso; e questo risultato si ottiene disponendo il vettore fattoriale *perpendicolarmente* alla traccia dell'iperpiano che contiene i vettori-tests. Il fatto che un altro vettore fattoriale venga a coincidere con la traccia dell'iperpiano e' semplicemente una conseguenza del fatto che i vettori fattoriali sono ortogonali.

tire dalla struttura centroide. Il piu' importante consiste nell' utilizzare dei tests la cui composizione fattoriale e' nota (per es. dei tests fattoriali introdotti appositamente nella batteria dei tests da sottoporre ad analisi) come *indicatori* i quali servono a marcare la posizione che devono assumere i singoli assi.

E' questo un esempio dell'adozione di un criterio opposto a quello di Thurstone e Cattell. Mentre i propugnatori della "struttura semplice" sostengono che si devono compiere le operazioni di rotazione degli assi tenendo conto soltanto della progressiva semplificazione della struttura, nella fiducia che, se il problema e' impostato adeguatamente, ad una struttura semplice deve corrispondere una evidente interpretazione psicologica, altri ricercatori ritengono che, pure adottando il procedimento di rotazione di Thurstone, si debba lasciarsi guidare dall'ipotesi di partenza, che sia cioe' opportuno eseguire le rotazioni avendo presente il significato da raggiungere.

Anche senza prendere posizione nell'uno o nell'altro senso, poiche' il metodo da seguire puo' essere imposto dalla natura del singolo problema, bisogna riconoscere che la ricerca della struttura semplice offre maggiore garanzia di obiettivita'.

5. Il procedimento di rotazione

Il procedimento di rotazione dei vettori fattoriali alla ricerca di una struttura fattoriale semplice o comunque corrispondente a particolari esigenze, e' semplice nella sua essenza, ma complicato e difficile nella sua attuazione.

Consideriamo anzitutto la situazione estremamente semplice di una struttura bidimensionale, cioe' l'esempio discusso nei precedenti paragrafi, di una matrice di rango 2 analizzata prima col metodo bifattoriale e poi col metodo centroide.

La prima operazione da compiere, conclusa l'analisi centroide ed ottenuta la matrice fattoriale (tab. 49) consiste nel rappresentare geometricamente la struttura fattoriale (fig. 64) in un diagramma (1). Si prendono quindi in esame, tra le infinite posizioni che possono assumere gli assi fattoriali ruotando intorno all'origine, quelle che soddisfano alle particolari finalita' che ci si propone di raggiungere. Come e' stato detto, generalmente ci si propone un insieme positivo e una struttura semplice.

Consideriamo anzitutto la prima esigenza, per cui i vettori-tests

(1) Ricordiamo che mentre in questo caso vi e' un unico diagramma da costruire essendo due i fattori comuni, quando i fattori comuni sono piu' di due, occorrono tanti diagrammi quante sono le combinazioni dei fattori a due a due, cioe' $\frac{k(k-1)}{2}$, essendo k il numero dei fattori.

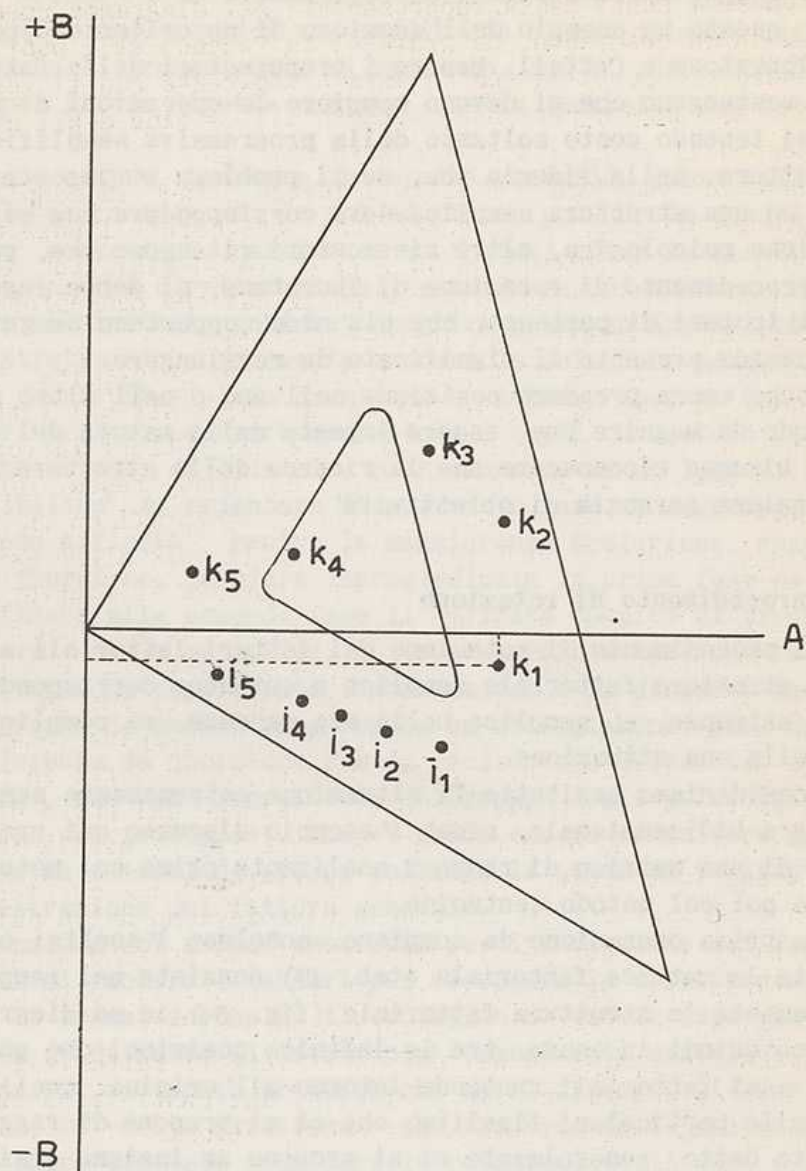


Fig. 64.

dovrebbero avere soltanto proiezioni positive o nulle sugli assi fattoriali.

Siccome solo i punti che sono compresi nel primo quadrante hanno proiezioni positive su tutte e due le coordinate, si tratta di vedere anzitutto se i punti tests rappresentati nel diagramma possono essere compresi in un quadrante. La prova si fa vedendo se i punti-tests possono essere ricoperti da una squadra trasparente con il vertice corrispondente all'angolo retto sovrapposto all'origine degli assi (fig. 64). Nell'esempio il risultato è positivo (1).

Resta da considerare l'altra esigenza, cioè la semplicità della struttura risultante. Siccome nel caso considerato l'angolo che comprende i punti-tests è minore di 90° , vi è la possibilità di fare assumere ai vettori fattoriali diverse posizioni che consentono tutte di soddisfare all'esigenza dell'insieme positivo.

Per soddisfare al criterio della massima semplicità bisogna cercare, entro la zona in cui le proiezioni dei tests sui vettori fattoriali sono tutte positive, una posizione dei vettori fattoriali che determini un massimo di proiezioni nulle dei punti-tests. Siccome gli assi fattoriali sono ortogonali, i punti intercettati da un asse si proiettano all'origine e hanno proiezione nulla sull'altro asse: basterà quindi situare gli assi in modo da intercettare il maggior numero possibile di punti-tests. Facendo perno sul vertice ad angolo retto posto in coincidenza con l'origine del sistema dei vettori, e girando la squadra entro i limiti in cui tutti i punti-tests (2) restano coperti dalla squadra, si sceglie la posizione in cui il maggior numero di punti coincide con i lati della squadra. Come è stato detto in precedenza, nel nostro esempio la posizione degli assi che dal punto di vista della semplicità della struttura è la migliore, è quella in cui il vettore A viene fatto coincidere con i punti-tests i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 , i quali vengono ad avere in tal modo una proiezione nulla sull'altro vettore; infatti in tutte le altre posizioni che possono assumere i due vettori fattoriali ortogonali, il numero dei punti-tests che vengono intercettati dai due vettori è sempre minore di 5.

Segnata la posizione dei due nuovi vettori fattoriali A' e B' (fig. 65) restano da determinare le proiezioni dei punti-tests su A' e B' , cioè le saturazioni dei tests nei nuovi fattori.

(1) In questo caso il fatto era già noto, in quanto nella prima analisi, fatta col metodo di Spearman, tutti i tests avevano saturazioni positive nei due fattori.

(2) Parliamo per comodità di punti-tests, perché i tests sono rappresentati con dei punti nel diagramma. Ma, siccome i punti-tests sono in realtà le estremità delle proiezioni dei vettori-tests nello spazio dei fattori comuni, quando un punto-test giace su un vettore fattoriale, la proiezione del vettore-test è collineare al vettore fattoriale. Pertanto il vettore-test ha proiezione nulla sui vettori fattoriali ortogonali a quello con cui il vettore-test coincide.

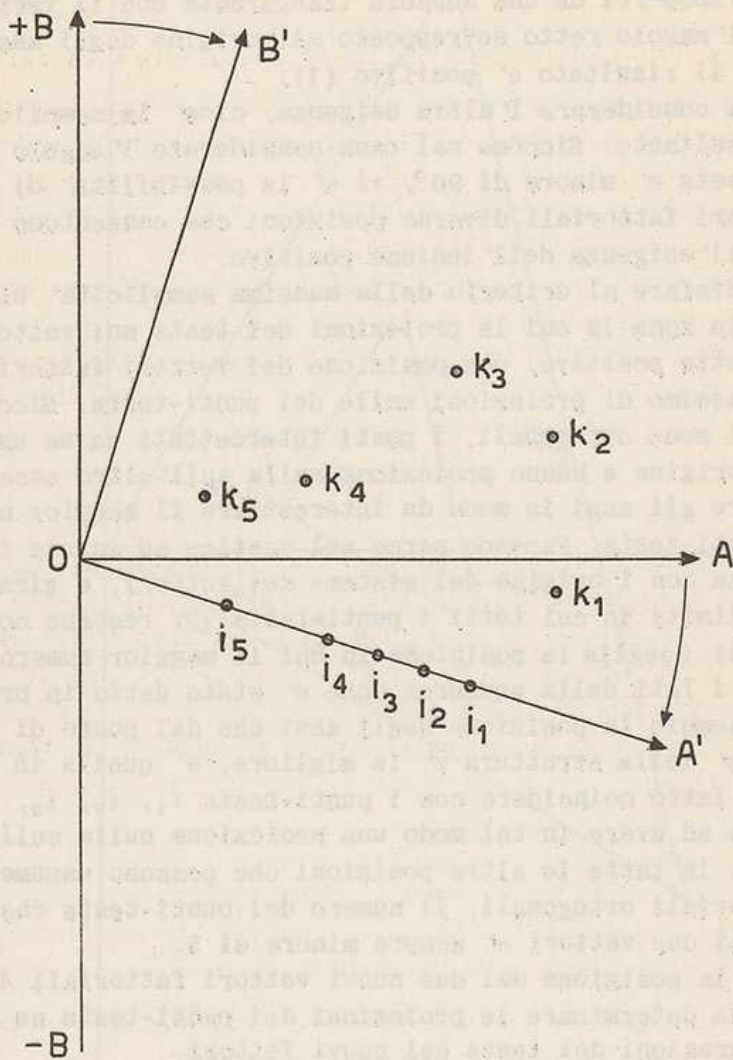


Fig. 65

Una misura approssimativa delle saturazioni si puo' ottenere dal diagramma, tracciando le perpendicolari ai due assi per ogni punto e misurando le relative coordinate.

Così, ad esempio, per il punto-test k_1 le misure delle coordinate rispetto alla coppia di vettori fattoriali ortogonali A' e B' (cioè le saturazioni a'_{k_1} e b'_{k_1}) risultano essere approssimativamente .9 e .2.

6. Il calcolo delle saturazioni dei tests nei fattori ruotati

Invece di ricorrere a questo procedimento necessariamente impreciso si calcolano con esattezza le saturazioni fattoriali nei fattori ruotati servendosi del procedimento di "trasformazione delle coordinate", di uso comune in geometria analitica.

Le formule per il calcolo delle nuove coordinate di un punto nel caso di rotazione degli assi si differenziano a seconda che si tratta di rotazione in senso orario o antiorario.

Per le rotazioni in senso orario, le formule di trasformazione delle coordinate sono

$$a' = a \cos \theta - b \sin \theta$$

$$b' = a \sin \theta + b \cos \theta$$

in cui a' e b' sono le coordinate (cioè le saturazioni) nei fattori ruotati, a e b sono le coordinate (cioè le saturazioni) nei fattori originari, e θ è l'angolo di rotazione, cioè l'angolo tra la posizione originaria e la nuova posizione assunta da un vettore fattoriale in seguito alla rotazione.

Per le rotazioni in senso antiorario, le formule di trasformazione sono:

$$a' = a \cos \theta + b \sin \theta$$

$$b' = -a \sin \theta + b \cos \theta$$

La deduzione delle predette formule si trova in ogni testo di geometria analitica.

Data la dimestichezza di chi si serve dell'analisi fattoriale con la nozione di correlazione, esprimeremo le suddette formule di trasformazione in termini di correlazione fra ognuno dei vettori fattoriali ruotati A' e B' e i vettori fattoriali originari A e B (1); in tal modo avremo il vantaggio di ottenere delle formule che restano identiche qualunque sia il verso della rotazione.

(1) Per rendersi conto del significato di una correlazione fra gli assi o meglio fra i vettori fattoriali basta considerare ogni vettore fattoriale come un test privo di fattore specifico.

*V. Harman
p. 254-5*
cos $\theta = \sum_{A'} A$ in quanto k_A e $k_{A'}$ sono unitari, k_A e $k_{A'}$ sono vettori

Le formule di trasformazione sono:

$$a'_t = a_t r_{A'A} + b_t r_{A'B}$$

$$b'_t = a_t r_{B'A} + b_t r_{B'B}$$

in cui a'_t e b'_t sono le saturazioni del test t nei fattori ruotati, cioè nei nuovi fattori A' e B' , a_t e b_t sono le saturazioni del test t nei fattori originari A e B (cioè le proiezioni del punto t sugli assi fattoriali originari A e B) e $r_{A'A}$, $r_{A'B}$, $r_{B'A}$, $r_{B'B}$ sono i coseni degli angoli che formano fra loro, a due a due, gli assi ruotati A' e B' con gli assi originari A e B .

Per maggior chiarezza è utile considerare le figg. 66 e 67. In fig. 66 è rappresentato il punto t (che è l'estremità del vettore-test Ot) e le sue proiezioni sugli assi A e B e sugli assi ruotati A' e B' , cioè le saturazioni originarie nei fattori A e B e le saturazioni nei nuovi fattori A' e B' .

In fig. 67 sono rappresentati nel cerchio trigonometrico gli assi fattoriali originari A e B , gli assi fattoriali ruotati A' e B' e i coseni degli angoli $A'A$, $A'B$, $B'A$, $B'B$. Dalla figura risulta che, essendo l'angolo $A'B$ ottuso, $\cos A'B$ è negativo. Va ricordato che uno dei quattro coseni utilizzati nelle formule sopra elencate è necessariamente negativo, e che perciò conviene fare sempre uno schizzo da cui risulti quale dei coseni è negativo. Infatti, nella situazione di fig. 68 in cui la rotazione è antioraria, $\cos A'B$ è positivo e invece $\cos B'A$ è negativo.

Una volta stabilito il segno dei coseni degli angoli che formano i vettori fattoriali ruotati con i vettori fattoriali primitivi, si ricavano i coseni, utilizzando eventualmente le tavole delle funzioni goniometriche (1) e si è quindi in condizione di usare le formule per calcolare le nuove coordinate dei punti-tests.

Nel nostro esempio (fig. 65) l'angolo di rotazione $\theta = 17^\circ$ e $10'$, $\cos \theta = .995$ e $\cos (90 - \theta) = .295$; quindi $r_{A'A} = r_{B'B} = .995$, $r_{A'B} = -.295$, $r_{B'A} = .295$. Applicando le formule di trasformazione si ottengono le coordinate dei punti-tests k_1-k_5 ed i_1-i_5 rispetto agli assi ruotati A' e B' , cioè le saturazioni dei tests k_1-k_5 ed i_1-i_5 nei fattori A' e B' . I calcoli sono indicati nella tab. 61.

(1) Per utilizzare le tavole delle funzioni geometriche basta conoscere la misura dell'angolo di rotazione, θ , e il suo complementare, $90 - \theta$; θ è l'angolo formato dai vettori omonimi $A'A$ e $B'B$, mentre $90 - \theta$ e $90 + \theta$ sono gli angoli formati dai vettori eteronimi $A'B$ e $B'A$. Ma in valore assoluto $\cos 90 + \theta = \cos 90 - \theta$. Basta dunque leggere le misure di $\cos \theta$ e di $\cos 90 - \theta$ e poi stabilire i segni in base alla figura.

Tuttavia partendo dalla misura dell'angolo, che non si può ottenere con esattezza, si ottengono soltanto delle approssimazioni grezze dei coseni. Vedremo in seguito il procedimento da usare per ottenere delle approssimazioni sufficientemente esatte.

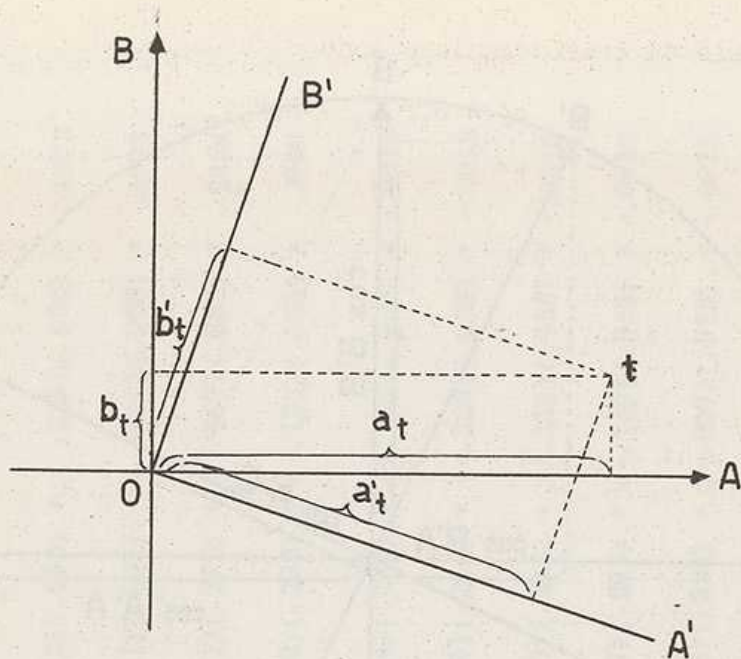


Fig. 66.

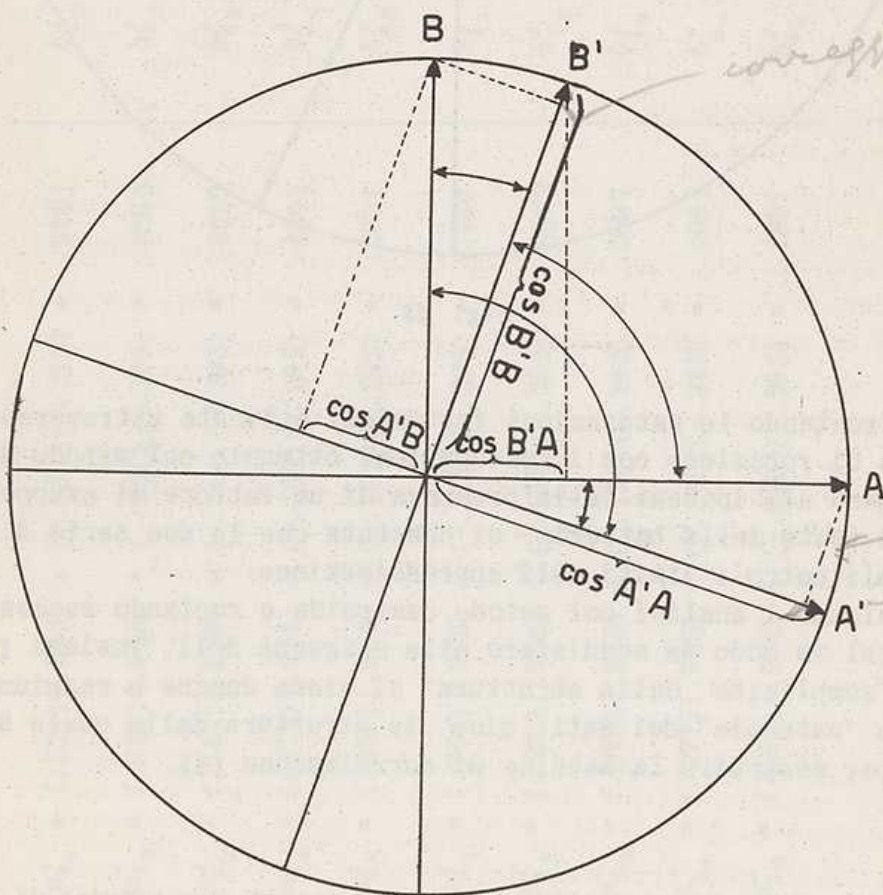


Fig. 67.

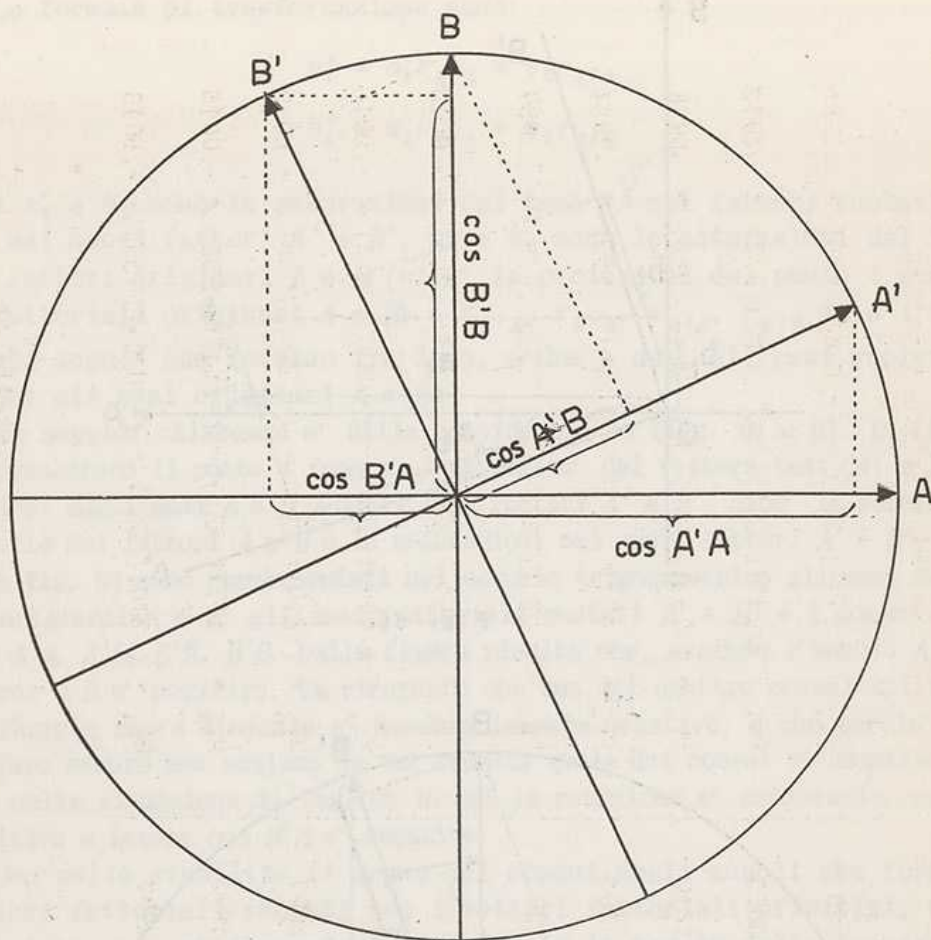


Fig. 68.

Confrontando le saturazioni fattoriali ottenute attraverso al procedimento di rotazione con le saturazioni ottenute col metodo di Spearman, in base all'ipotesi della presenza di un fattore di gruppo in una parte dei tests della batteria, si constata che le due serie di valori sono uguali entro i limiti dell'approssimazione.

Compiendo l'analisi col metodo centroide e ruotando successivamente gli assi in modo da soddisfare alle esigenze dell'"insieme positivo" e della "semplicità della struttura" si viene dunque a raggiungere la struttura "naturale" dei dati, cioè la struttura dalla quale si era partiti per costruire la matrice di correlazione (1).

(1) Ricordiamo che si trattava in questo caso di una matrice di correlazioni fittizie, calcolate partendo da una matrice fattoriale scelta arbitrariamente in base all'equazione matriciale $FF' = R$ (v. in proposito il paragrafo successivo).

$a'_t = a_t \Gamma_{A'A} + b_t \Gamma_{A'B}$		$b'_t = a_t \Gamma_{B'A} + b_t \Gamma_{B'B}$	
$a'_{k_1} = (.919)(.955) + (-.076)(-.295) = .9001$	$a'_{i_1} = (.764)(.955) + (-.238)(-.295) = .7998$	$b'_{k_1} = (.919)(.295) + (-.076)(.955) = .1985$	$b'_{i_1} = (.764)(.295) + (-.238)(.955) = -.0019$
$a'_{k_2} = (.912)(.955) + (.239)(-.295) = .8005$	$a'_{i_2} = (.668)(.955) + (-.208)(-.295) = .6993$	$b'_{k_2} = (.912)(.295) + (.239)(.955) = .4973$	$b'_{i_2} = (.668)(.295) + (-.208)(.955) = -.0016$
$a'_{k_3} = (.751)(.955) + (.394)(-.295) = .6010$	$a'_{i_3} = (.573)(.955) + (-.178)(-.295) = .5997$	$b'_{k_3} = (.751)(.295) + (.394)(.955) = .5978$	$b'_{i_3} = (.573)(.295) + (-.178)(.955) = -.0010$
$a'_{k_4} = (.471)(.955) + (.167)(-.295) = .4005$	$a'_{i_4} = (.477)(.955) + (-.149)(-.295) = .4995$	$b'_{k_4} = (.471)(.295) + (.167)(.955) = .2984$	$b'_{i_4} = (.477)(.295) + (-.149)(.955) = -.0016$
$a'_{k_5} = (.250)(.955) + (.131)(-.295) = .2001$	$a'_{i_5} = (.286)(.955) + (-.090)(-.295) = .2997$	$b'_{k_5} = (.250)(.295) + (.131)(.955) = .1989$	$b'_{i_5} = (.286)(.295) + (-.090)(.955) = -.0016$

Tabella 61.

7. Rotazione di strutture fattoriali a piu' di due dimensioni

Siccome una struttura bidimensionale si rappresenta con un unico diagramma, la posizione degli assi fattoriali che determina in tutti i tests proiezioni positive o nulle, e che meglio risponde alle esigenze di semplicita' della struttura, si raggiunge con un'unica rotazione.

Diverso e' il procedimento quando le dimensioni della struttura fattoriale sono piu' di due. Anche quando si tratta di una struttura che presenta soltanto tre dimensioni, occorrono tre diagrammi bidimensionali per rappresentarla. E poiche' ogni rotazione determina una trasformazione in tutti i diagrammi in cui e' rappresentato uno dei due assi che sono stati ruotati, la struttura privilegiata si raggiunge per aggiustamenti successivi, dopo un numero piu' o meno grande di rotazioni.

Illustreremo il procedimento applicandolo ai dati di una matrice fattoriale tridimensionale.

La matrice, riportata in tab. 62 e' stata ottenuta sottoponendo ad analisi centroide la matrice di correlazioni fittizie di tab. 50; pero', a differenza del procedimento usato nel paragrafo 7 del Cap. IV, anziche' ricorrere alla stima delle comunanze, sono state utilizzate - per ragioni che saranno illustrate in seguito - le comunanze esatte, che in questo caso, trattandosi di correlazioni fittizie, costruite artificialmente, erano note.

tests	Fattori		
	A	B	C
1	.701	-.156	.473
2	.482	-.643	.406
3	.643	-.504	-.230
4	.636	.187	-.458
5	.618	.444	-.030
6	.660	.350	-.228
7	.321	-.252	-.115
8	.589	-.315	-.533
9	.737	.265	.433
10	.588	.619	.284

Tabella 62.

Per procedere alla rotazione si devono anzitutto costruire tanti diagrammi bidimensionali quante sono le combinazioni di fattori a due a due. Nel nostro esempio le coppie possibili sono 3, e cioe' AB, AC, BC e quindi si costruiscono 3 diagrammi, ognuno dei quali rappresenta il piano individuato da una coppia di assi, con le proiezioni delle estremita' dei vettori-tests.

Esempio: costruzione del diagramma AB.

Si tracciano su un foglio di carta millimetrata due assi perpendicolari (v. fig. 69), denominando A l'asse orizzontale e B l'asse verticale. (Si segue la convenzione di attribuire la posizione orizzontale al primo dei due assi rappresentati nel diagramma: se per es. il diagramma si riferisce ad una struttura a 5 dimensioni e quindi gli assi sono 5, $ABCDE$, nel diagramma DE l'asse D sarà orizzontale, nel diagramma CD l'asse C sarà orizzontale, nel diagramma ED l'asse B sarà orizzontale ecc.).

I punti-tests hanno come proiezioni ortogonali sugli assi fattoriali le misure indicate nella tabella 62; così il punto-test 1 è quel punto del diagramma che ha una proiezione di .701 sull'asse A e di -.156 sull'asse B .

Per ottenere un diagramma di una certa esattezza conviene prendere come unità la misura di 10 cm; poiché il diagramma rappresenta quel sottospazio dello spazio dei fattori comuni che è individuato dai due vettori fondamentali A e B , e quindi comprende i due vettori e non le loro proiezioni, i vettori fattoriali devono avere la lunghezza unitaria, a differenza dei vettori-tests, che essendo presenti come proiezioni, devono avere una lunghezza inferiore all'unità. I due vettori fattoriali hanno dunque la lunghezza di 10 cm dall'origine all'estremità. prendendo in considerazione sui predetti vettori fattoriali le proiezioni di ogni singolo vettore-test e tracciando le perpendicolari alle estremità di tali proiezioni si individua l'estremità del vettore-test (cioè il punto-test, che viene contrassegnato col relativo numero) che si trova all'intersezione delle suddette perpendicolari.

Prendendo come misura del vettore unitario 10 cm, si devono approssimare le proiezioni al millimetro, cioè a due decimali; pertanto il punto-test 1 si trova all'intersezione della perpendicolare all'asse A a 70 mm dall'origine, con la perpendicolare all'asse B a -16 mm dall'origine.

Procedendo analogamente si costruiscono i tre diagrammi AB , BC , AC (figg. 69, 70, 71) -

Si tratta ora di stabilire in quale dei tre diagrammi conviene eseguire la rotazione degli assi.

Delle due finalità che ci si propone, in genere (1), di raggiungere mediante la rotazione degli assi, l'"insieme positivo" e la "struttura semplice", la prima è più facile da approssimare fin dalle fasi iniziali. Conviene dunque vedere se uno dei tre diagrammi offre la possibilità di raggiungere o di approssimare, con una rotazione, l'insieme positivo (2).

I tre diagrammi presentano le caratteristiche comuni alle strutture centroidi, connesse al fatto che il primo fattore centroide (A) pre-

(1) Va ricordato ancora una volta che non sempre ci si propone di raggiungere l'"insieme positivo"; vi sono infatti delle variabili che sono per loro natura bipolari.

(2) Naturalmente il risultato non è completo se non quando l'insieme positivo si realizza per tutta la struttura e compare quindi in tutti e tre i diagrammi.

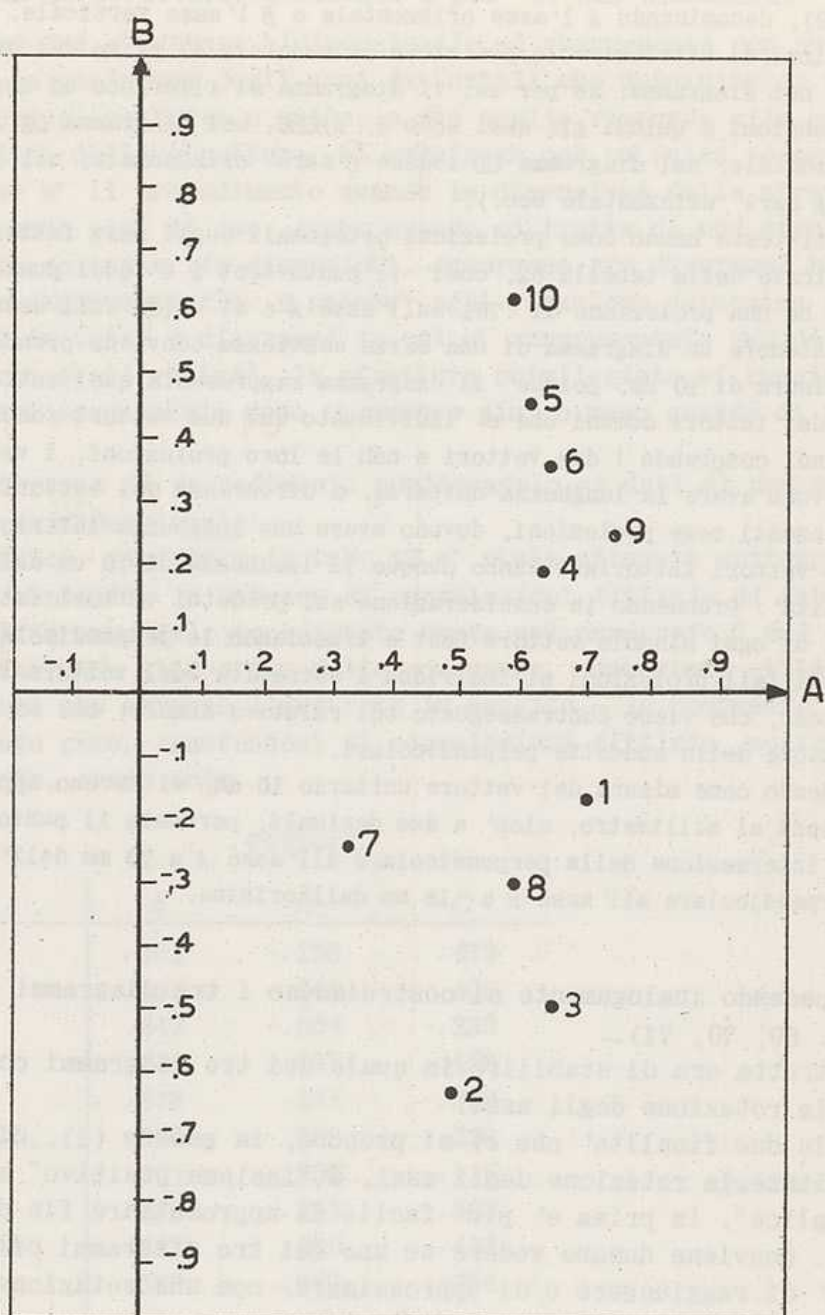


Fig. 69.

Rotazione ortogonale - Diagramma 1

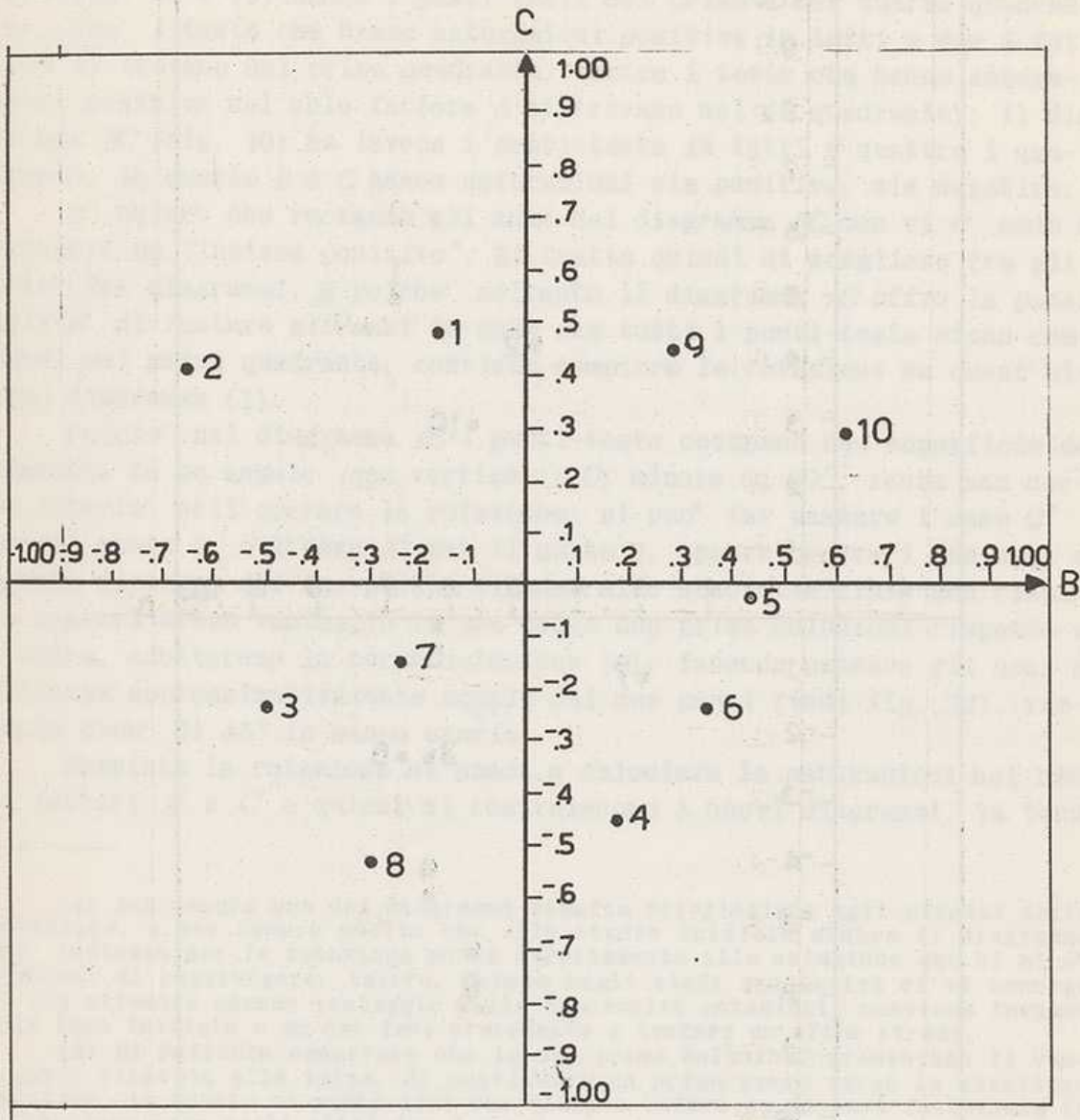


Fig. 70.

Rotazione ortogonale - Diagramma 2

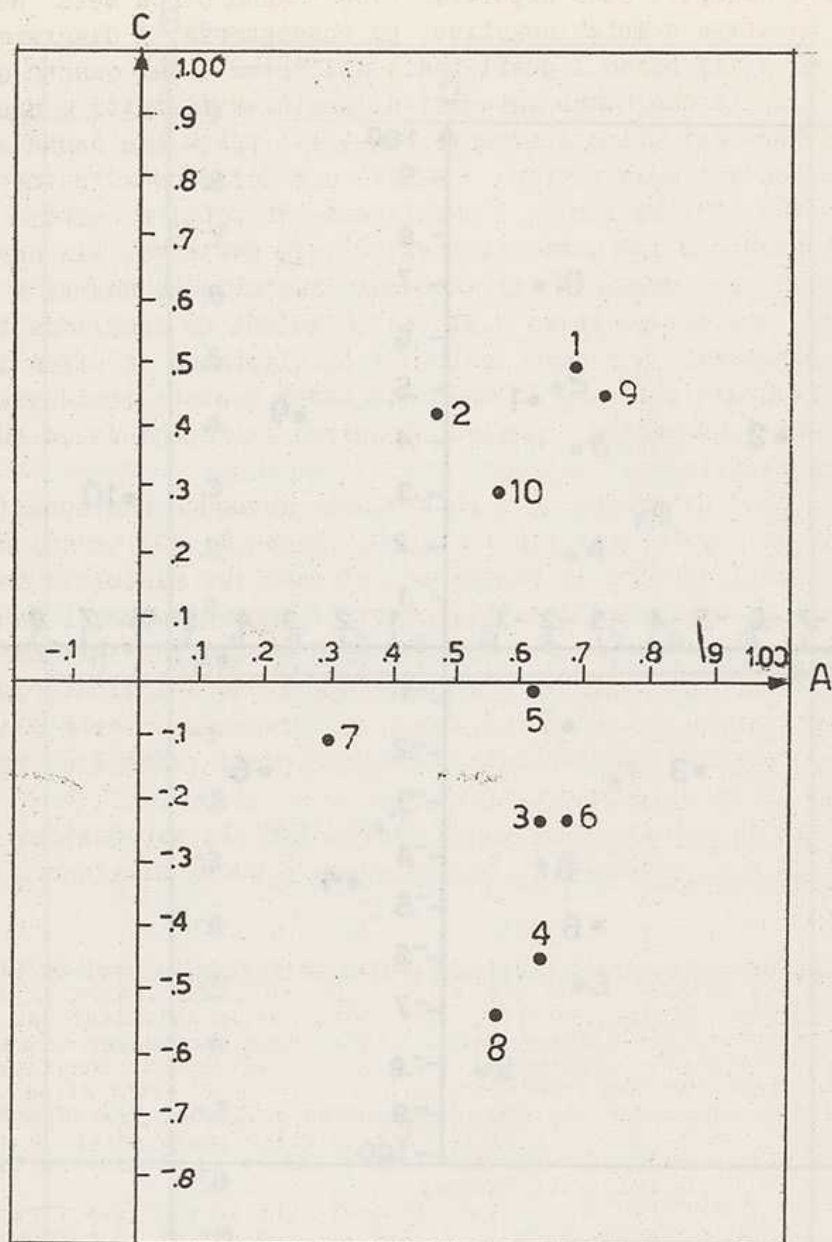


Fig. 71.

Rotazione ortogonale - Diagramma 3.

senta saturazioni soltanto positive, mentre i successivi fattori (B e C nel nostro esempio) sono bipolari, cioè hanno circa metà delle saturazioni positive e metà negative. Di conseguenza, i diagrammi AB e AC (figg. 69 e 71) hanno i punti-tests nel primo e nel quarto quadrante (cioè i tests che hanno saturazioni positive in tutti e due i fattori si trovano nel primo quadrante, mentre i tests che hanno saturazione positiva nel solo fattore A si trovano nel 4° quadrante); il diagramma BC (fig. 70) ha invece i punti-tests in tutti e quattro i quadranti, in quanto B e C hanno saturazioni sia positive, sia negative.

È chiaro che ruotando gli assi nel diagramma BC non vi è modo di ottenere un "insieme positivo". Si tratta quindi di scegliere fra gli altri due diagrammi. E poiché soltanto il diagramma AC offre la possibilità di ruotare gli assi in modo che tutti i punti-tests siano compresi nel primo quadrante, conviene compiere la rotazione su quest'ultimo diagramma (1).

Poiché nel diagramma AC i punti-tests occupano una superficie delimitata da un angolo (con vertice in O) minore di 90° , resta una certa libertà nell'operare la rotazione; si può far passare l'asse C' per il punto 2, o l'asse A' per il punto 8, oppure tenere i due assi ad uguale distanza dai due punti. Siccome allo stadio iniziale non risulta esservi alcun vantaggio in una delle due prime soluzioni rispetto all'altra, adotteremo la terza soluzione (2), facendo passare gli assi a distanza approssimativamente uguale dai due punti (vedi fig. 72), ruotando cioè di 45° in senso orario.

Compiuta la rotazione si passa a calcolare le saturazioni nei nuovi fattori A' e C' e quindi si costruiscono i nuovi diagrammi. Va tenu-

(1) Non sempre uno dei diagrammi risulta privilegiato agli effetti della rotazione, e non sempre quello che allo stadio iniziale sembra il diagramma più indicato per la rotazione porta direttamente alla soluzione che ci si è proposti di raggiungere: talora, quando negli stadi successivi ci si accorge di non ottenere nessun vantaggio nelle successive rotazioni, conviene tornare alla fase iniziale o ad una fase precedente e tentare un'altra strada.

(2) Si potrebbe osservare che le due prime soluzioni presentano il vantaggio, rispetto alla terza, di costituire un primo passo verso la struttura semplice, in quanto un punto-test che viene a cadere su un asse fattoriale ha saturazione zero negli altri due fattori.

A questo proposito si deve tenere presente che in generale i punti-tests non si trovano nel piano individuato da due assi, e quindi la sovrapposizione di un punto-test con un asse in un diagramma significa soltanto che la proiezione del punto-test in quel particolare piano coincide con l'asse. Si ha dunque proiezione zero soltanto su uno degli assi.

Comunque è questa la via per ottenere la struttura semplice, poiché con una rotazione nel piano ortogonale a quello considerato (o con rotazioni nei piani ortogonali a quello considerato, quando la struttura è multidimensionale) si può ottenere la coincidenza del punto-test (o, più esattamente, della proiezione del punto-test nello spazio dei fattori comuni) con l'asse fattoriale.

Va tuttavia notato che all'inizio non serve far coincidere punti-tests con gli assi, perché si rendono necessari ulteriori spostamenti che annullerebbero aggiustamenti troppo precisi. La soluzione adottata è particolarmente indicata perché permette successivi aggiustamenti nella direzione dell'"insieme positivo" senza perdere il vantaggio acquistato.

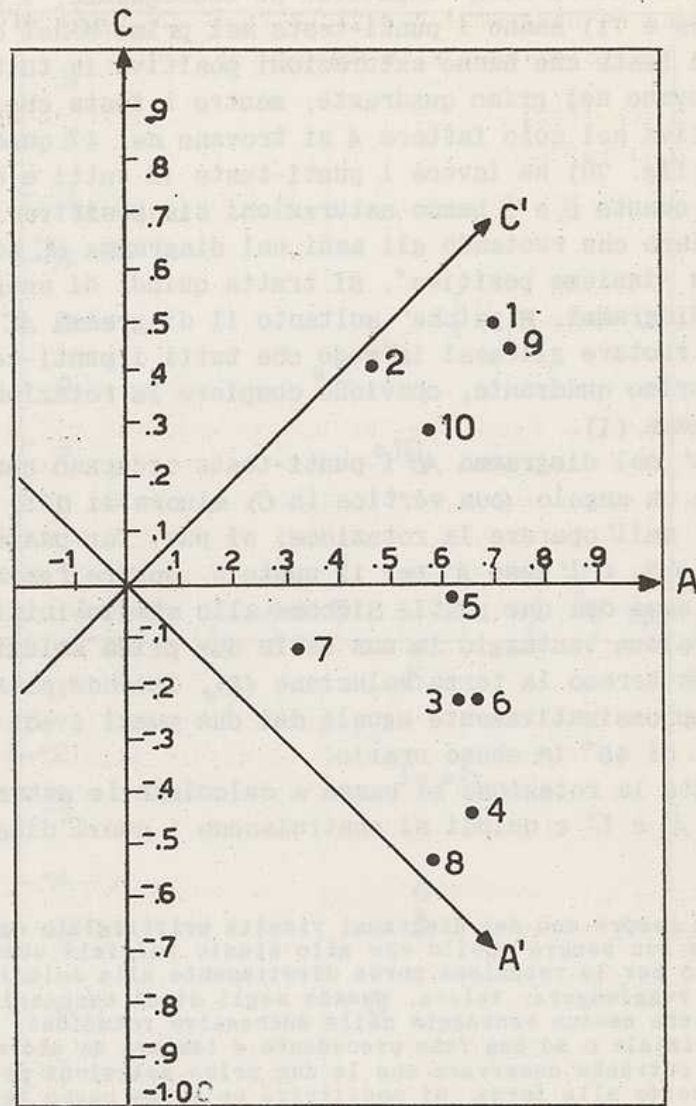


Fig. 72.

Rotazione ortogonale - Diagramma 4

to presente infatti che, *compiuta una rotazione, tutti i diagrammi che implicano uno degli assi ruotati non sono più validi e sarebbe errato utilizzarli.* Per evitare confusioni di questo genere conviene dare un numero d'ordine ai diagrammi e registrare lo sviluppo cronologico delle operazioni di rotazione, alla maniera seguente:

I struttura
(centroide)

II struttura

- | | |
|---|-----------------------------------|
| <p>1. AB (punti-tests nel I e IV quadrante)</p> <p>2. BC (punti-tests in tutti e quattro i quadranti)</p> <p>3. AC → A'C'</p> | <p>4. A'C' (insieme positivo)</p> |
|---|-----------------------------------|

Tale *Cronologia delle strutture*, che seguirà gli sviluppi del problema che stiamo trattando, serve, oltre ad evitare le sviste, a tener presenti i progressi realizzati nella direzione degli obiettivi che si intendono raggiungere (per es. "insieme positivo", "struttura semplice") ed a mettere in evidenza eventuali regressi o l'assenza di progressi, che indicano che si è seguita una via infruttuosa.

In questo caso il calcolo delle nuove saturazioni è reso semplice dal fatto che, essendo l'angolo di rotazione di 45° anche l'angolo complementare è di 45° e quindi i coseni sono tutti uguali ($\cos 45^\circ = .707$). Resta da stabilire quale è il coseno negativo, e dal diagramma 4 (fig. 72) per semplice ispezione si constata che l'angolo A'C' è ottuso e quindi $\cos A'C'$ è negativo. Si avrà quindi

$$\begin{aligned} a' &= a \cos A'A + c \cos A'C & \text{cioè} & \quad a' = a (.707) + c (-.707) \\ c' &= a \cos C'A + c \cos C'C & & \quad c' = a (.707) + c (.707) \end{aligned}$$

Avremo dunque

$$\begin{aligned} a'_1 &= (.701)(.707) + (.473)(-.707) = .162 \\ a'_2 &= (.482)(.707) + (.406)(-.707) = .054 \\ a'_3 &= (.643)(.707) + (-.230)(-.707) = .618 \\ a'_4 &= (.636)(.707) + (-.458)(-.707) = .774 \\ a'_5 &= (.618)(.707) + (-.030)(-.707) = .458 \\ a'_6 &= (.660)(.707) + (-.228)(-.707) = .628 \\ a'_7 &= (.321)(.707) + (-.115)(-.707) = .308 \\ a'_8 &= (.589)(.707) + (-.533)(-.707) = .793 \\ a'_9 &= (.737)(.707) + (.433)(-.707) = .215 \\ a'_{10} &= (.588)(.707) + (.284)(-.707) = .215 \\ c'_1 &= (.701)(.707) + (.473)(.707) = .830 \\ c'_2 &= (.482)(.707) + (.406)(.707) = .628 \\ c'_3 &= (.643)(.707) + (-.230)(.707) = .292 \\ c'_4 &= (.636)(.707) + (-.458)(.707) = .126 \\ c'_5 &= (.618)(.707) + (-.030)(.707) = .416 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c'_6 &= (.660)(.707) + (-.228)(.707) = .306 \\
 c'_7 &= (.321)(.707) + (-.115)(.707) = .146 \\
 c'_8 &= (.589)(.707) + (-.533)(.707) = .039 \\
 c'_9 &= (.737)(.707) + (.433)(.707) = .827 \\
 c'_{10} &= (.588)(.707) + (.284)(.707) = .617
 \end{aligned}$$

Tenuto conto che le saturazioni nel fattore *B* restano invariate, perché la rotazione è avvenuta sul piano *AC*, fermo restando l'asse *B*, si è in grado di scrivere la matrice fattoriale ruotata, comprendente i fattori *A'*, *B'*, *C'* (tab. 63) e quindi di costruire i diagrammi relativi alla nuova struttura, *A'B*, *BC'*, *A'C'* (1).

	<i>A'</i>	<i>B</i>	<i>C'</i>
1	.162	-.156	.830
2	.054	-.643	.628
3	.618	-.504	.292
4	.774	.187	.126
5	.458	.444	.416
6	.628	.350	.306
7	.308	-.252	.146
8	.793	-.315	.039
9	.215	.265	.827
10	.215	.619	.617

Tabella 63.

Si passa quindi a considerare i due nuovi diagrammi *A'B* (fig. 73) e *BC'* (fig. 74) per stabilire quale dei due presenta delle indicazioni per una rotazione (2).

Nel piano *BC'* si offre la possibilità di una rotazione particolarmente vantaggiosa, poiché non solo ci si può avvicinare all'"insieme positivo", in quanto l'angolo che comprende i punti-tests è notevolmente inferiore ai 180° (e si ricordi che nella precedente struttura il piano *BC* aveva i punti-tests dispersi in tutti e quattro i quadranti), ma si riesce anche a fare un primo passo verso la struttura semplice, perché vi è la possibilità di ruotare gli assi in modo che la maggior parte dei punti-tests si trovino molto vicino ai due assi. Perciò viene compiuta la rotazione degli assi nel diagramma *BC'* (fig. 75).

(1) Il diagramma ottenuto ruotando gli assi (nel nostro esempio, *A'C'*) è già a disposizione e perciò basta costruire gli altri due.

(2) È chiaro che il diagramma *A'C'* sul quale è stata operata la precedente rotazione, non va preso in considerazione, perché la rotazione che risultava vantaggiosa nel piano individuato da quegli assi è già stata effettuata.

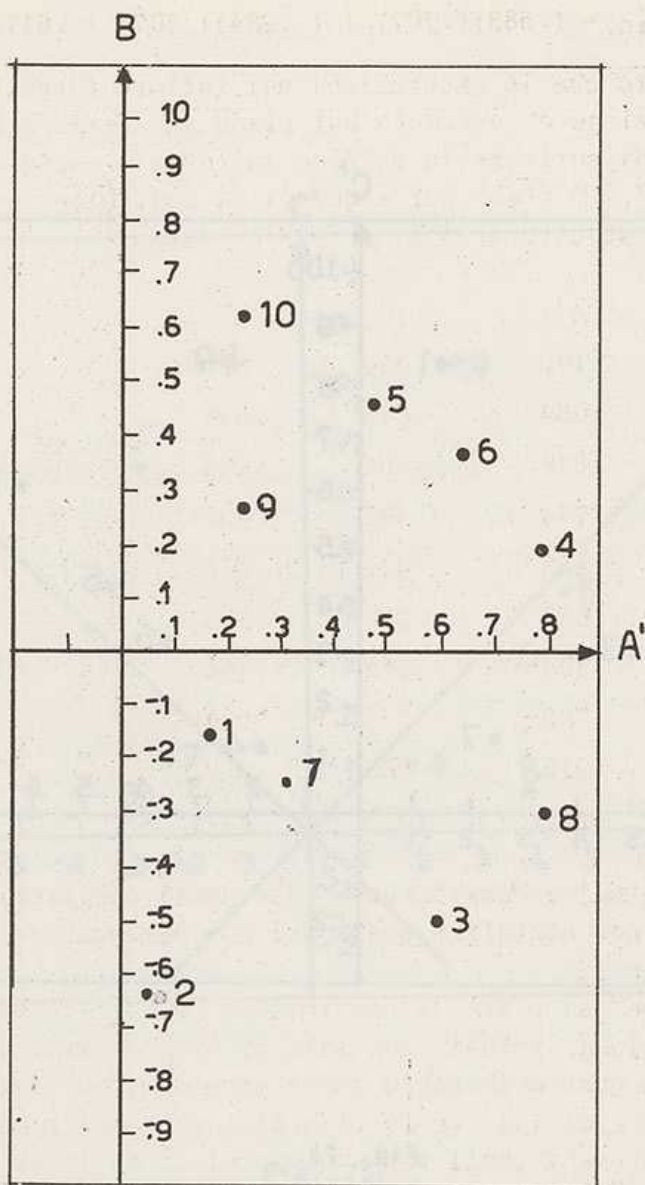


Fig. 73.

Rotazione ortogonale - Diagramma 5

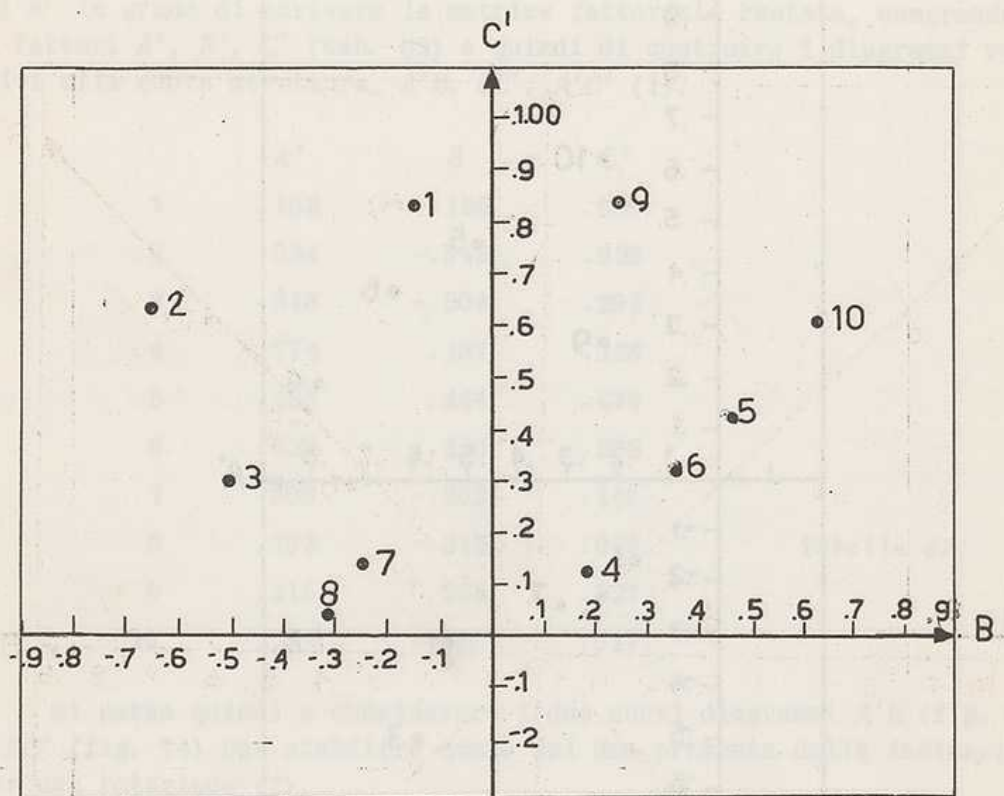


Fig. 74.

Rotazione ortogonale - Diagramma 6

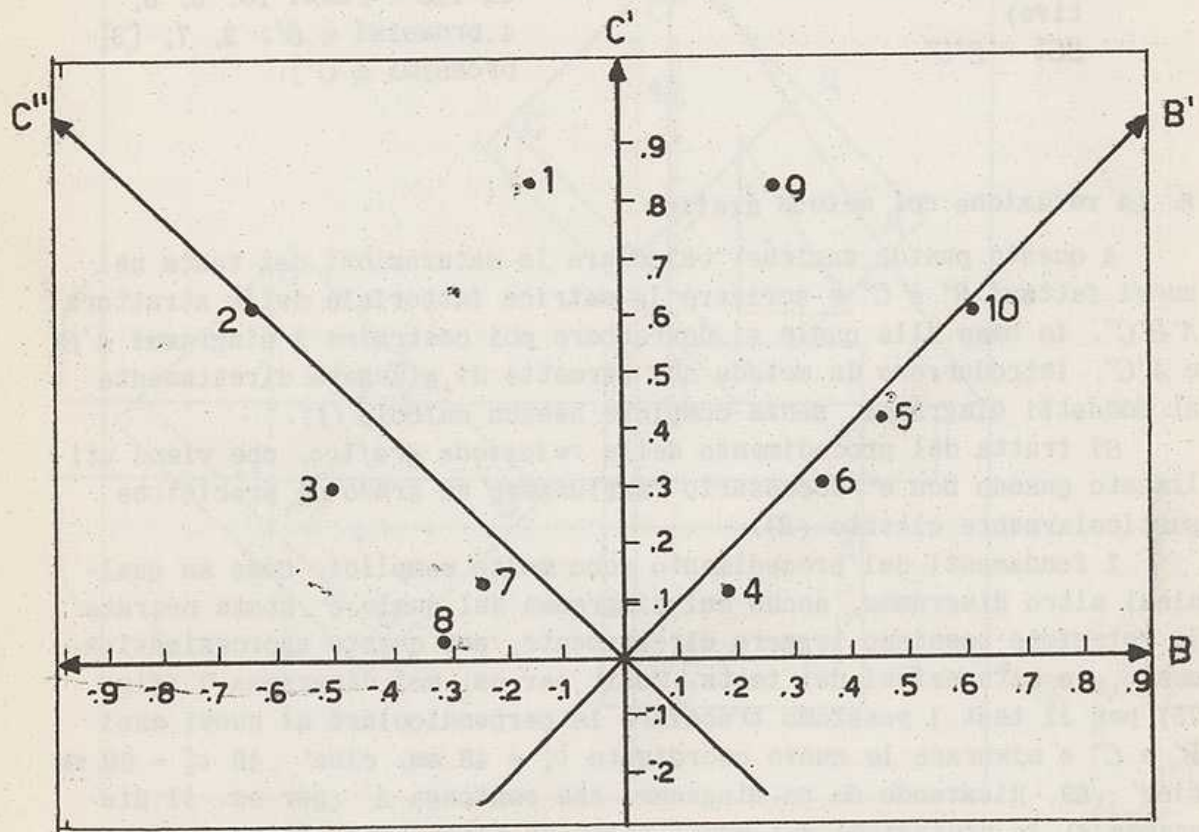


Fig. 75.

Rotazione ortogonale - Diagramma 7

La nuova situazione prodotta in seguito alle rotazioni risulta chiaramente dalla cronologia delle strutture, in cui si registra:

II Struttura

4. $A'C'$ (insieme positivo)
5. $A'B$ (saturazioni in A' positive)
6. BC' (saturazioni in C' positive)
 $BC' \rightarrow B'C''$

III Struttura

7. $B'C''$ [si approssima l'insieme positivo e la struttura semplice: punti-tests compresi entro un angolo di 125° . Punti 10, 5, 6, 4 prossimi a B' ; 2, 7, [3] prossimi a C''].

8. La rotazione col metodo grafico

A questo punto, anziché calcolare le saturazioni dei tests nei nuovi fattori B' e C'' e scrivere la matrice fattoriale della struttura $A'B'C''$, in base alla quale si dovrebbero poi costruire i diagrammi $A'B'$ e $A'C''$, introdurremo un metodo che permette di giungere direttamente ai suddetti diagrammi, senza compiere nessun calcolo (1).

Si tratta del procedimento della *rotazione grafica*, che viene utilizzato quando non è necessario raggiungere un grado di precisione particolarmente elevato (2).

I fondamenti del procedimento sono molto semplici. Come su qualsiasi altro diagramma, anche sul diagramma sul quale è stata operata la rotazione possiamo leggere direttamente, per quanto approssimativamente, le saturazioni dei tests. Così per es. nel diagramma 7 (fig. 75) per il test 1 possiamo tracciare le perpendicolari ai nuovi assi B' e C'' e misurare le nuove coordinate $b'_1 = 48$ mm, cioè $c''_1 = 69$ mm cioè .69. Ricavando da un diagramma che contenga A' (per es. il diagramma 4) le proiezioni dei punti-tests su quest'asse, siamo in grado di scrivere, sia pure con una modesta approssimazione, la matrice $A'B'C''$, dalla quale potremmo costruire i nuovi diagrammi, e cioè senza aver fatto alcun calcolo.

Ma per ottenere i diagrammi non c'è neppure bisogno di scrivere la matrice fattoriale né di misurare le proiezioni dei punti-tests sugli assi. Tali proiezioni si possono infatti *trasferire* in un nuovo diagramma procedendo nel modo seguente.

Partiamo dal punto in cui siamo giunti con le operazioni di rotazione. Operata la rotazione $BC' \rightarrow B'C''$ ci occorrono i diagrammi $A'B'$ e $A'C''$ su uno dei quali potremo operare una ulteriore rotazione.

(1) Vedi W.S. ZIMMERMANN, A simple graphical method for orthogonal rotations, *Psychometrica*, 1946, 11, pp. 51-55.

(2) Molti problemi fattoriali sono impostati in modo che interessa sapere soltanto quali tests hanno saturazioni sostanziali e quali hanno saturazioni trascurabili in un determinato fattore.

Cominciamo col costruire il diagramma $A'C''$. Ci servono a tale scopo due diagrammi che contengono, l'uno l'asse A' , l'altro l'asse C'' . Prendiamo per es. il diagramma 7 (fig. 75) dal quale ricaveremo le proiezioni sul l'asse C'' e il diagramma 4 (fig. 72) dal quale ricaveremo le proiezioni sull'asse A' (1). I due diagrammi vengono disposti come in fig. 76, e cioè' il diagramma dal quale si ricavano le proiezioni rispetto all'asse che nel nuovo diagramma sarà oriz-

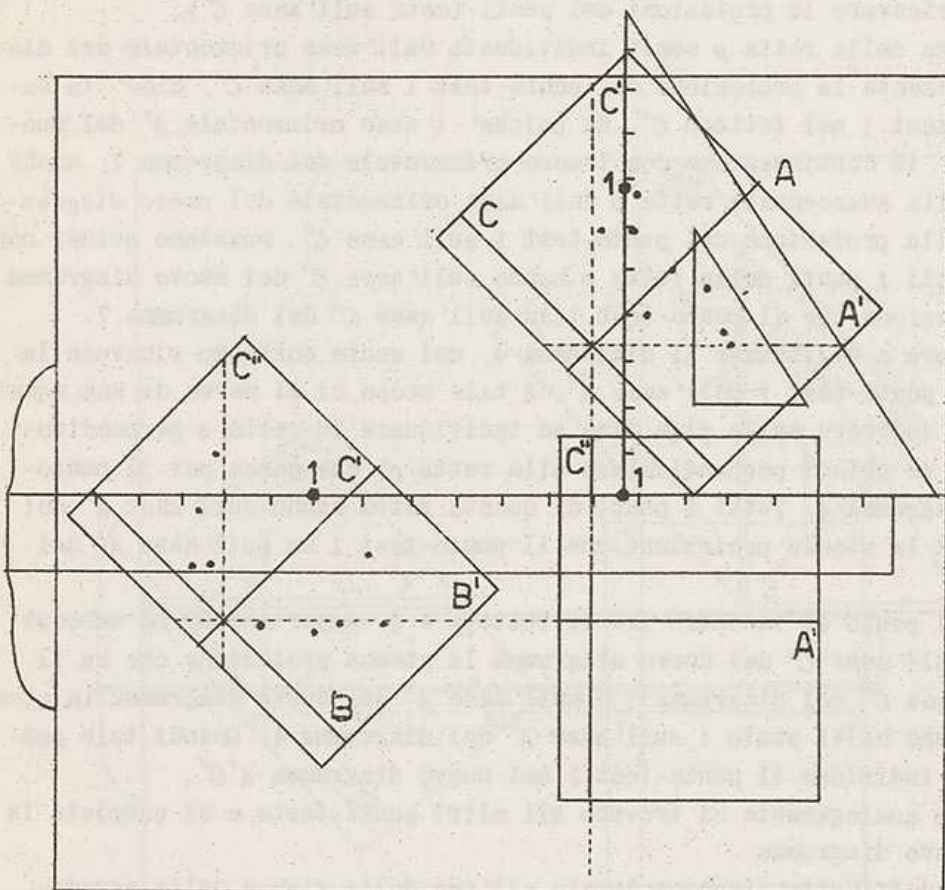


Fig. 76.

*forché
comincio
inquadro
l'asse e l'angolo
e poi per punti
gli assi ruotati, se
mai il resto.*

zontale, a destra in alto, e il diagramma dal quale si ricavano le proiezioni rispetto all'asse che nel nuovo diagramma sarà verticale, a sinistra in basso. Quindi, nel caso nostro, il diagramma 4 che contiene l'asse A' , a destra in alto (con l'asse A' disposto orizzontalmente) e il diagramma 7 che contiene l'asse C'' a sinistra in basso (con l'asse C'' disposto verticalmente). I due diagrammi devono essere orientati in modo che gli assi dell'uno siano paralleli (e rispettivamente perpendicolari) agli assi dell'altro.

La carta su cui sarà costruito il nuovo diagramma va collocato sotto il diagramma situato superiormente e a destra del diagramma situato in basso a sinistra, in modo che gli assi del nuovo diagramma siano collineari all'asse orizzontale del diagramma inferiore e all'asse verticale del diagramma superiore. Denominiamo tali assi A' e C'' .

(1) Invece del diagramma 4 si può usare il diagramma 5 (fig. 73) che contiene anch'esso l'asse A' .

*non completare la vista di
(1) Bisogna fare attenzione a prendere un diagramma in cui entrambi
d'asse C'' e sia l'asse C' o C .*

Tracciati i due assi del nuovo diagramma si passa ad individuare i punti-tests. A tale scopo si usa una riga che si sposti parallelamente agli assi orizzontali dei diagrammi (riga a martello, tecnigrafo o simili). Cominciamo col determinare la posizione del punto-test 1 sul nuovo diagramma. A tale scopo si porta la riga in modo da individuare la retta parallela all'asse orizzontale che passa per il punto-test 1 del diagramma 7 (cioè di quel diagramma dal quale intendiamo ricavare le proiezioni dei punti-tests sull'asse C'').

La distanza dalla retta p così individuata dall'asse orizzontale del diagramma 7 rappresenta la proiezione del punto-test 1 sull'asse C'' , cioè la saturazione del test 1 nel fattore C'' . Ma poiché l'asse orizzontale A' del nuovo diagramma è in continuazione con l'asse orizzontale del diagramma 7, anche la distanza della suaccennata retta p dall'asse orizzontale del nuovo diagramma è uguale alla proiezione del punto-test 1 sull'asse C'' . Possiamo quindi concludere che tutti i punti della retta p hanno sull'asse C'' del nuovo diagramma la stessa proiezione che il punto-test 1 ha sull'asse C'' del diagramma 7.

Passiamo ora a utilizzare il diagramma 4, dal quale dobbiamo ricavare la proiezione del punto-test 1 sull'asse A' . A tale scopo ci si serve di una squadra e la si fa scorrere sulla riga fino ad individuare la retta q perpendicolare alla riga (e quindi perpendicolare alla retta p) che passa per il punto-test 1 del diagramma 4. Tutti i punti di questa retta hanno sull'asse A' del nuovo diagramma la stessa proiezione che il punto-test 1 ha sull'asse A' del diagramma 4.

Perciò il punto di incontro fra le rette p e q , appartenendo ad ambedue le rette, ha sull'asse C'' del nuovo diagramma la stessa proiezione che ha il punto 1 sull'asse C'' del diagramma 7 e sull'asse A' del nuovo diagramma la stessa proiezione che ha il punto 1 sull'asse A' del diagramma 4. Quindi tale punto di incontro individua il punto-test 1 nel nuovo diagramma $A'C''$.

Procedendo analogamente si trovano gli altri punti-tests e si completa in tal modo il nuovo diagramma.

Vi è una difficoltà tecnica legata all'uso della riga e della squadra: è difficile segnare con esattezza il punto di incontro delle due rette p e q , punto che viene a trovarsi al vertice dell'angolo retto che la squadra forma con la riga. Perciò si usano di solito una squadra e una riga trasparenti con modificazioni tali da permettere di segnare con esattezza i punti-tests (vedi fig. 77) (1).

(1) Come risulta da fig. 77, la squadra ad angolo retto ha impresse due righe parallele ai due cateti, ed esattamente al punto di incontro delle due righe c'è un foro di grandezza tale da lasciar passare la punta della matita. La stecca a T ha pure impressa una riga parallelamente al bordo superiore, ed inoltre una incisione nella metà superiore destra, tale da far coincidere la riga impressa alla stecca con la riga impressa alla squadra, quando quest'ultima è appoggiata alla incisione della stecca.

Nel costruire un diagramma sulla base di altri due diagrammi si fanno coincidere i punti omonimi dei due diagrammi di partenza (per es. il punto-test 2 del diagramma in basso a sinistra e quello del diagramma in alto a destra) con le righe impresse rispettivamente sulla stecca e sulla squadra (e dunque non più con i bordi della stecca e della squadra). In questo modo, il punto corrispondente del nuovo diagramma viene a coincidere con il foro praticato nella squadra e viene segnato esattamente penetrando nel foro colla punta della matita.

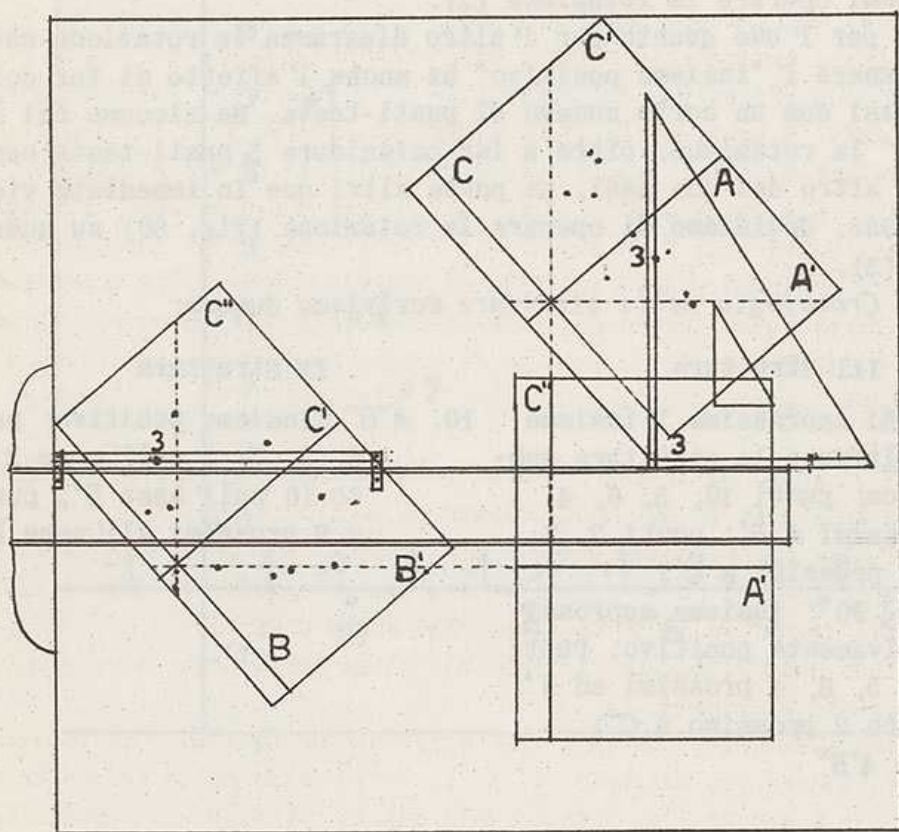


Fig. 77.

*non soffermici
per la zija*

(adattata da ZIMMERMANN, op. cit.).

Servendosi di tale procedimento (1) si possono costruire i diagrammi, evitando il calcolo delle saturazioni.

Costruiti in tal modo i diagrammi $A'C''$ e $A'B'$ (figg. 78 e 79) possiamo considerarne le caratteristiche in vista di una ulteriore rotazione.

La rotazione $BC' \rightarrow B'C''$ ha portato ottimi risultati. Tutti e due i diagrammi $A'C''$ e $A'B'$ relativi alla nuova struttura hanno i punti-tests disposti in modo tale che con una piccola rotazione si viene a realizzare l'insieme positivo. Si tratta ora di decidere su quale dei due diagrammi operare la rotazione (2).

Tanto per l'uno quanto per l'altro diagramma la rotazione che porta a realizzare l'"insieme positivo" ha anche l'effetto di far coincidere gli assi con un certo numero di punti-tests. Ma siccome nel diagramma $A'B'$ la rotazione, oltre a far coincidere 5 punti-tests con l'uno o con l'altro dei due assi, ne porta altri due in immediata vicinanza di un asse, decidiamo di operare la rotazione (fig. 80) su questo diagramma (3).

Nella *Cronologia delle strutture* scriviamo dunque:

III Struttura

7. $B'C''$ [Si approssima l'insieme positivo e la struttura semplice: punti 10, 5, 6, 4 prossimi a B' ; punti 2, 7, (3) prossimi a C']
8. $A'C''$ ($\approx 90^\circ$; insieme approssimativamente positivo. Punti 10, 5, 6, 4 prossimi ad A' ; punto 2 prossimo a C'')
9. $A'B' \rightarrow A''B''$

IV Struttura

10. $A''B''$ (Insieme positivo; punti 8, 3, 7, 2 sull'asse A'' ; punto 10 sull'asse B'' ; punti 1 e 9 prossimi all'asse B'')

(1) Nell'usare la tecnica della rotazione grafica si deve far attenzione a due punti. In primo luogo si deve evitare l'errore di ricavare le proiezioni da un asse fattoriale già superato da successive rotazioni (per es. l'asse A' quando nella successiva rotazione si è già passati all'asse A''); tale errore si evita utilizzando adeguatamente la cronologia delle strutture. In secondo luogo bisogna tener presente che l'asse dal quale si ricavano le proiezioni è parallelo e non collineare all'asse del nuovo diagramma. In altre parole, se si costruisce un diagramma MN (M orizzontale ed N verticale), il diagramma MQ dal quale si ricava l'asse orizzontale M deve stare in alto a destra, con l'asse M orizzontale, mentre il diagramma NO da cui si ricava l'asse N deve stare a sinistra in basso con l'asse N disposto verticalmente.

(2) Non è forse inutile far presente che con questo procedimento la rotazione può essere effettuata soltanto su uno dei due diagrammi; infatti avendo i due diagrammi un asse comune A' , una volta operata la rotazione su un diagramma, l'altro non è più valido.

(3) Inoltre il diagramma $A'C''$ richiederebbe una rotazione minima e quindi a differenza del diagramma $A'B'$, realizza già approssimativamente l'insieme positivo e la struttura semplice.

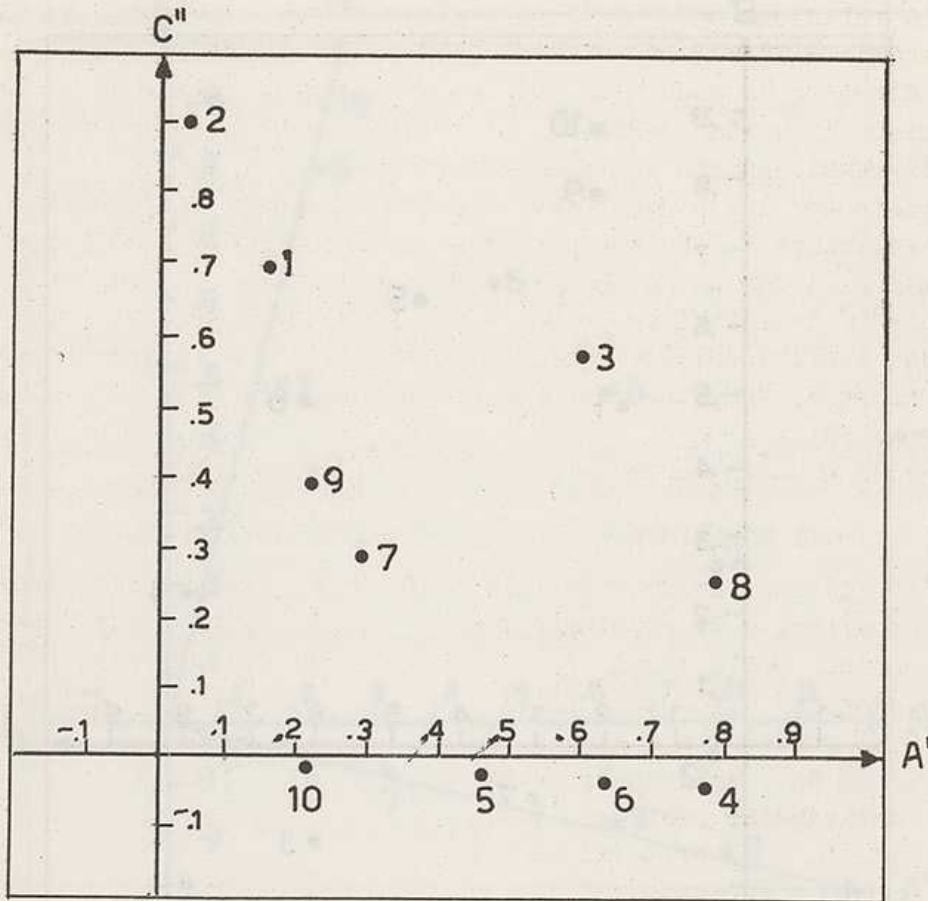


Fig. 78.

Rotazione ortogonale - diagramma 8

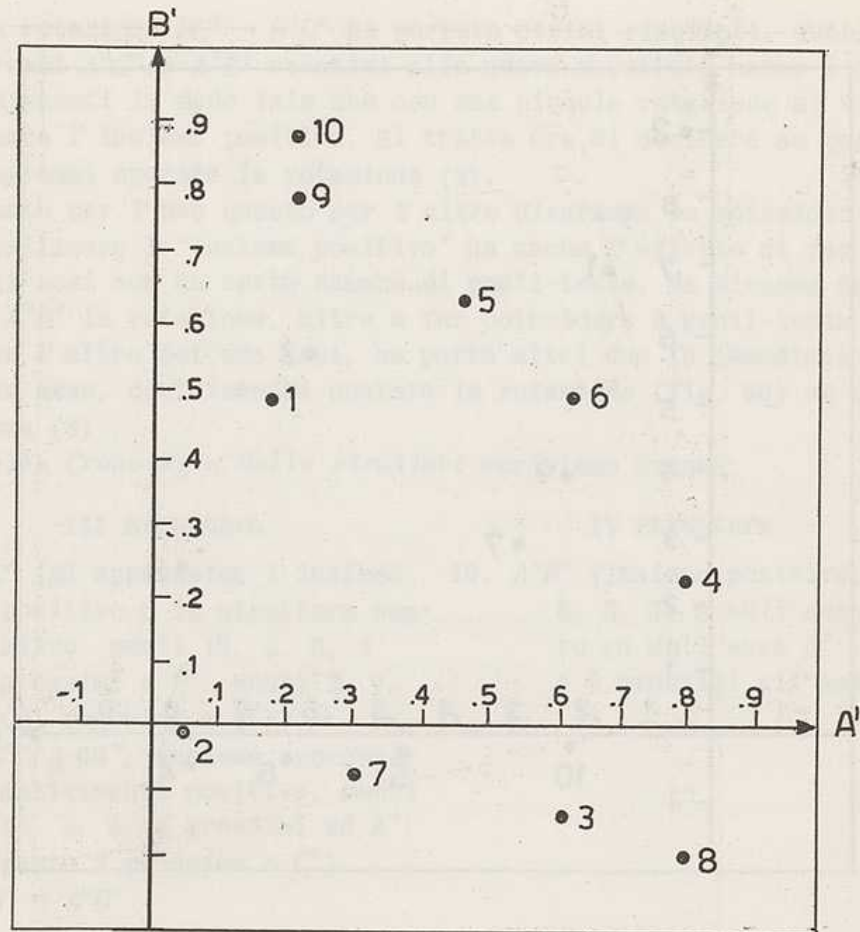


Fig. 79.

Rotazione ortogonale - Diagramma 9.

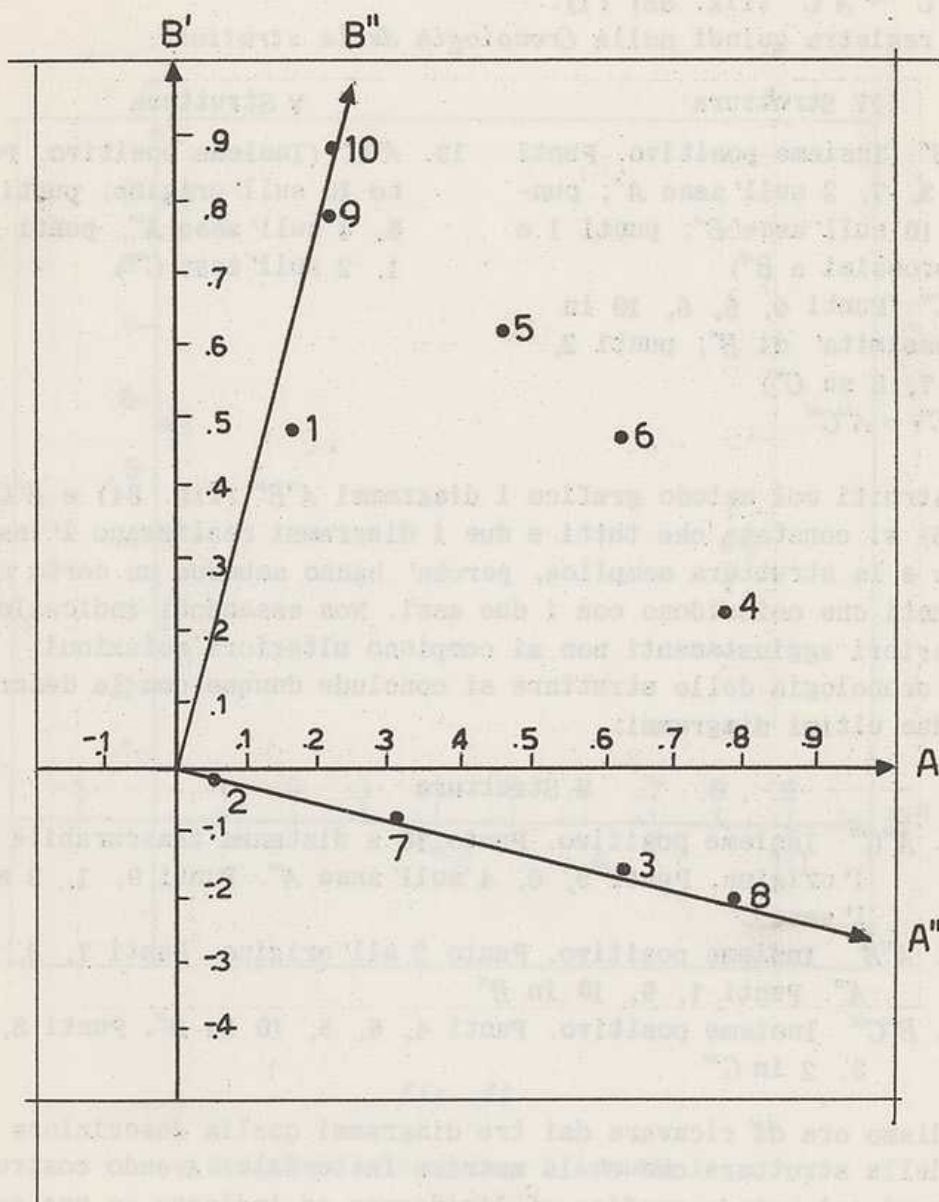


Fig. 80.

Rotazione ortogonale - Diagramma 10

Costruiti col metodo grafico i due diagrammi $B''C''$ (fig. 81) e $A''C''$ (fig. 82) vediamo che il diagramma $A''C''$ indica l'opportunità di una ulteriore piccola rotazione che permette di realizzare quasi esattamente l'insieme positivo e la struttura semplice. Si opera quindi la rotazione $A''C'' \rightarrow A'''C'''$ (fig. 83) (1).

Si registra quindi nella *Cronologia delle strutture*:

- | IV Struttura | V Struttura |
|---|--|
| 10. $A''B''$ (Insieme positivo. Punti 8, 3, 7, 2 sull'asse A'' ; punto 10 sull'asse B'' ; punti 1 e 9 prossimi a B''). | 13. $A'''C'''$ (Insieme positivo. Punto 10 sull'origine; punti 5, 6, 4 sull'asse A''' ; punti 9, 1, 2 sull'asse C''') |
| 11. $B''C''$ (Punti 4, 5, 6, 10 in prossimità di B'' ; punti 2, 3, 7, 8 su C'') | |
| 12. $A''C'' \rightarrow A'''C'''$ | |

Costruiti col metodo grafico i diagrammi $A'''B'''$ (fig. 84) e $B'''C'''$ (fig. 85) si constata che tutti e due i diagrammi realizzano l'insieme positivo e la struttura semplice, perché hanno ambedue un certo numero di punti che coincidono con i due assi. Non essendoci indicazioni per ulteriori aggiustamenti non si compiono ulteriori rotazioni.

La cronologia delle strutture si conclude dunque con la descrizione dei due ultimi diagrammi:

- | V Struttura |
|---|
| 13. $A'''C'''$ Insieme positivo. Punto 10 a distanza trascurabile dall'origine. Punti 5, 6, 4 sull'asse A''' . Punti 9, 1, 2 sull'asse C''' |
| 14. $A'''B'''$ Insieme positivo. Punto 2 all'origine. Punti 7, 3, 8 in A''' . Punti 1, 9, 10 in B''' |
| 15. $B'''C'''$ Insieme positivo. Punti 4, 6, 5, 10 in B''' . Punti 8, 7, 3, 2 in C''' |

Vediamo ora di ricavare dai tre diagrammi quella descrizione sintetica della struttura che è la matrice fattoriale. Avendo costruito i diagrammi col metodo grafico ci limiteremo ad indicare se una saturazione è zero (0) o diversa da zero (X). Poiché si è raggiunto l'insieme positivo, è chiaro che le saturazioni diverse da zero sono tutte positive (2).

(1) A scopo dimostrativo presentiamo due volte lo stesso diagramma (per es. figg. 82 e 83), una volta con gli assi nella posizione originaria e una seconda volta con in più gli assi ruotati. Ma ciò non è necessario: la rotazione si esegue direttamente sul diagramma primitivo (cioè, qui, in fig. 82).

(2) Si ricavano le saturazioni in A''' da uno qualsiasi dei due diagrammi in cui compare l'asse A''' ; altrettanto vale per le saturazioni in B''' e in C''' .

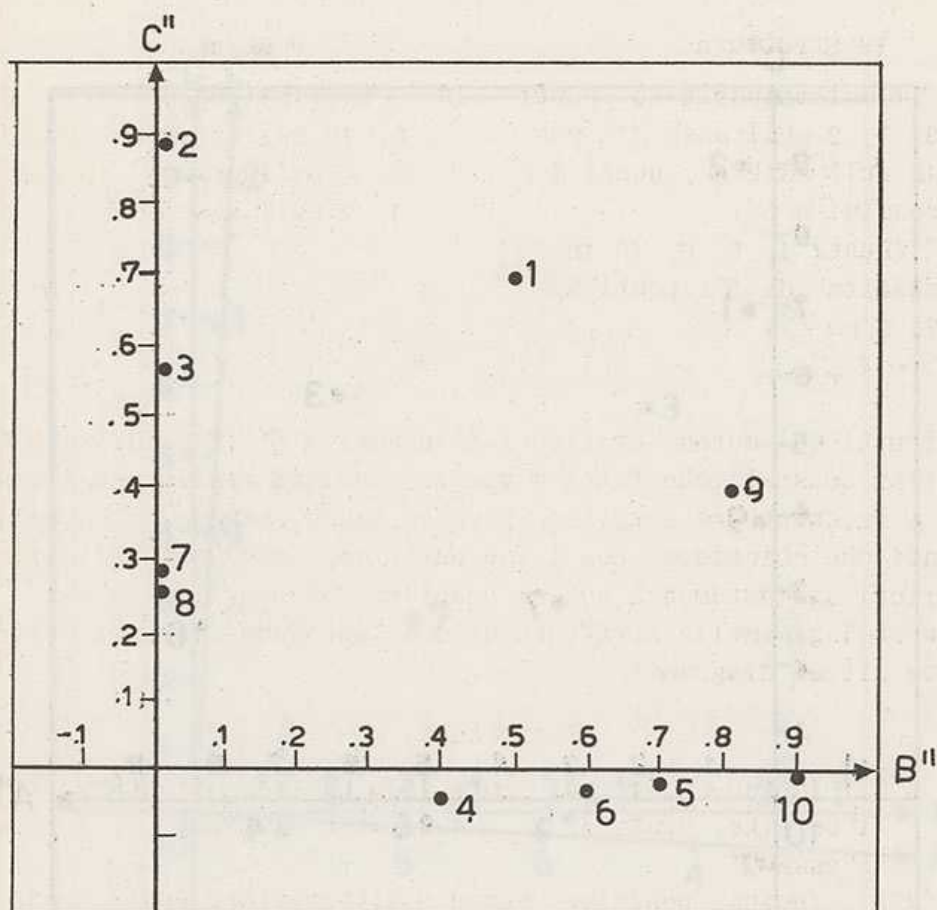


Fig. 81.

Rotazione ortogonale - Diagramma 11.

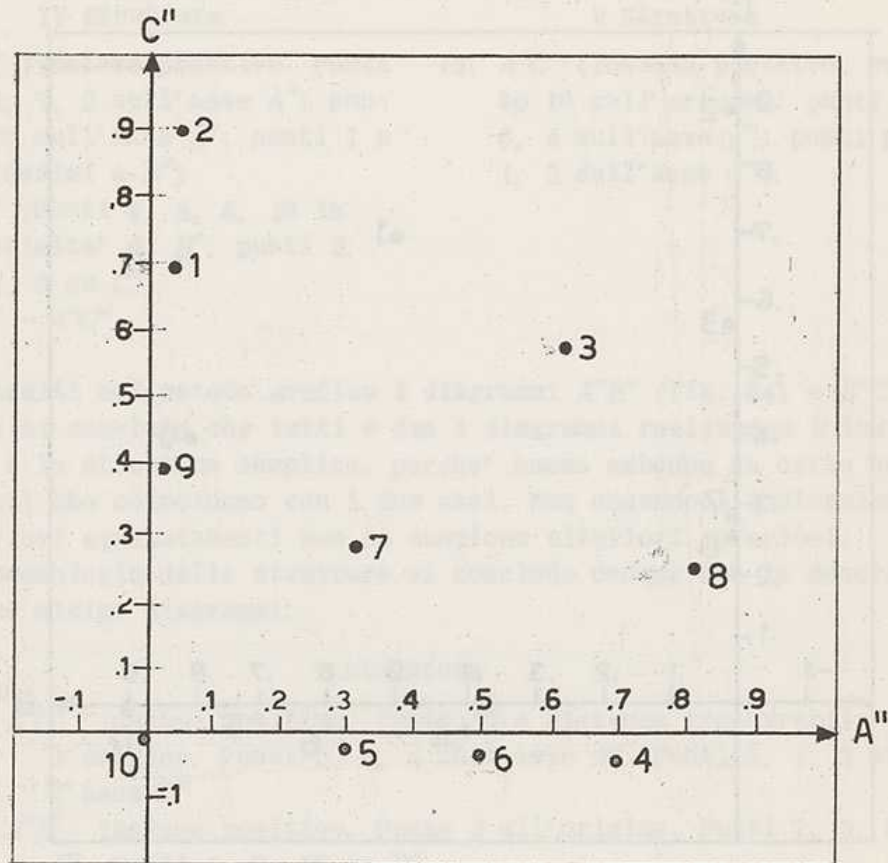


Fig. 82.

Rotazione ortogonale - Diagramma 12

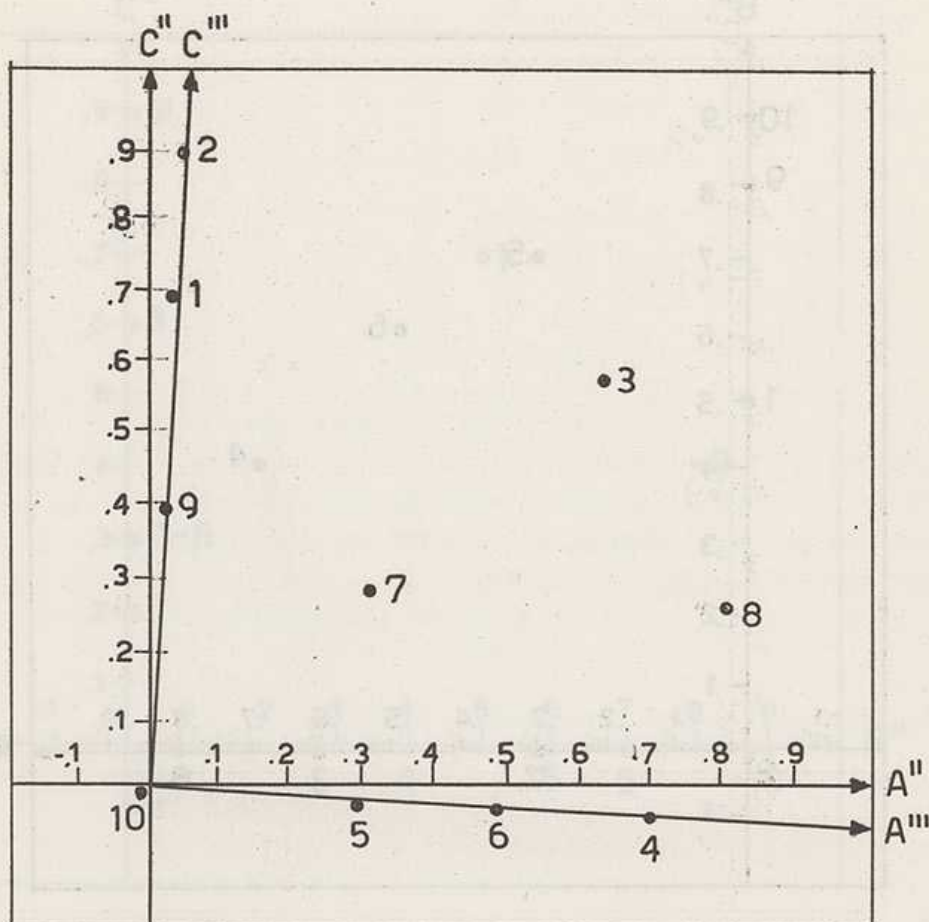


Fig. 83.

Proiezione ortogonale - Diagramma 13

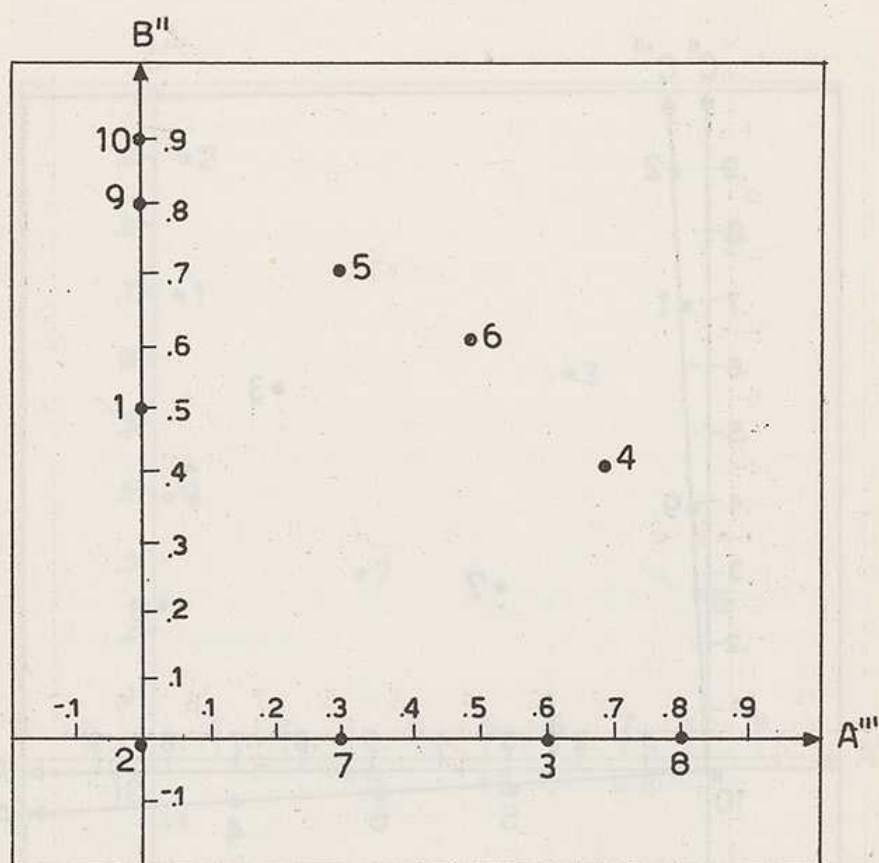


Fig. 84.

Rotazione ortogonale - Diagramma 14

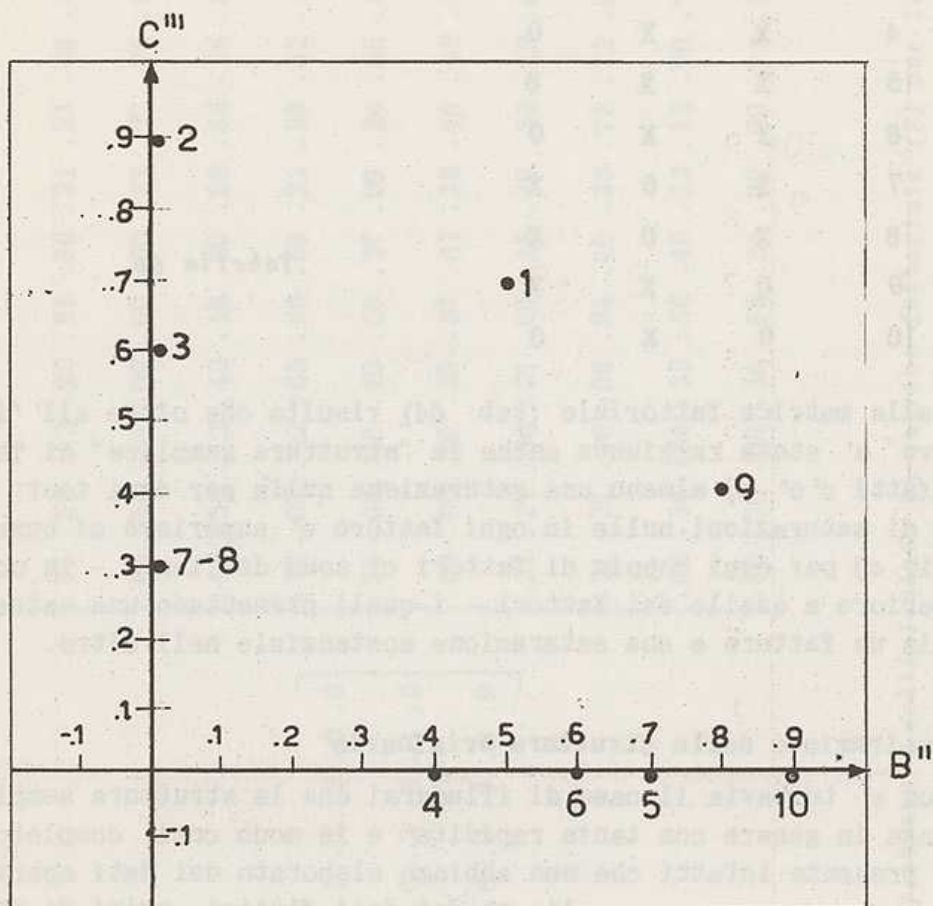


Fig. 85.

Rotazione ortogonale - Diagramma 15

	A'''	B''	C'''
1	0	X	X
2	0	0	X
3	X	0	X
4	X	X	0
5	X	X	0
6	X	X	0
7	X	0	X
8	X	0	X
9	0	X	X
10	0	X	0

Tabella 64.

Dalla matrice fattoriale (tab. 64) risulta che oltre all' "insieme positivo" e' stata raggiunta anche la "struttura semplice" di Thurstone: infatti c' e' a) almeno una saturazione nulla per ogni test; b) il numero di saturazioni nulle in ogni fattore e' superiore al numero dei fattori; c) per ogni coppia di fattori ci sono dei tests - in un numero superiore a quello dei fattori - i quali presentano una saturazione nulla in un fattore e una saturazione sostanziale nell' altro.

9. Ricostruzione della struttura originaria

Non e' tuttavia il caso di illudersi che la struttura semplice si raggiunga in genere con tanta rapidita' e in modo cosi' completo. Va tenuto presente infatti che non abbiamo elaborato dei dati sperimentali, ma dei dati fittizi, privi di errori di campionatura, e che la matrice delle correlazioni era stata costruita in modo che le variabili correlate (i tests fittizi) costituissero una struttura semplice.

	A	B	C
1	.0	.7	.5
2	.0	.9	.0
3	.6	.6	.0
4	.7	.0	.4
5	.3	.0	.7
6	.5	.0	.6
7	.3	.3	.0
8	.8	.3	.0
9	.0	.4	.8
10	.0	.0	.9

Tabella 65.

Il procedimento seguito consisteva nelle seguenti fasi.

1. Costruzione di una matrice fattoriale scegliendo le saturazioni nulle in modo che la struttura risultante corrispondesse alle esigenze poste da Thurstone per la struttura semplice e fissando ad arbitrio l'entita' delle saturazioni non-nulle.

La matrice fattoriale (F) cosi' costruita era quella riportata in tab. 65.

2. Calcolo della matrice delle corre-

$$\begin{array}{c}
 F \\
 \begin{bmatrix}
 .0 & .7 & .5 \\
 .0 & .9 & .0 \\
 .6 & .6 & .0 \\
 .7 & .0 & .4 \\
 .3 & .0 & .7 \\
 .5 & .0 & .6 \\
 .3 & .3 & .0 \\
 .8 & .3 & .0 \\
 .0 & .4 & .8 \\
 .0 & .0 & .9
 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 F' \\
 \begin{bmatrix}
 .0 & .0 & .6 & .7 & .3 & .5 & .3 & .8 & .0 & .0 \\
 .7 & .9 & .6 & .0 & .0 & .0 & .3 & .3 & .4 & .0 \\
 .5 & .0 & .0 & .4 & .7 & .6 & .0 & .0 & .8 & .9
 \end{bmatrix}
 =
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 R = FF' \\
 \begin{bmatrix}
 .74 & .63 & .42 & .20 & .35 & .30 & .21 & .21 & .68 & .45 \\
 .63 & .81 & .54 & .00 & .00 & .00 & .27 & .27 & .36 & .00 \\
 .42 & .54 & .72 & .42 & .18 & .30 & .36 & .66 & .24 & .00 \\
 .20 & .00 & .42 & .65 & .49 & .59 & .21 & .56 & .32 & .36 \\
 .35 & .00 & .18 & .49 & .58 & .57 & .09 & .24 & .56 & .63 \\
 .80 & .00 & .30 & .59 & .57 & .61 & .15 & .40 & .48 & .54 \\
 .21 & .27 & .36 & .21 & .09 & .15 & .18 & .33 & .12 & .00 \\
 .21 & .27 & .66 & .56 & .24 & .40 & .33 & .73 & .12 & .00 \\
 .68 & .36 & .24 & .32 & .56 & .48 & .12 & .12 & .80 & .72 \\
 .45 & .00 & .00 & .36 & .63 & .54 & .00 & .00 & .72 & .81
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Tabella 66.

Matrice delle correlazioni (R) ottenuta moltiplicando la matrice fattoriale (F) per la sua trasposta (F').

lazioni (R) in base all'equazione matriciale $FF' = R$.

Si ottiene in tal modo una matrice di correlazioni fra le variabili fittizie, *completa di comunanze*. Sottoponendo tale matrice ad analisi centroide (1), si e' ottenuta una struttura fattoriale pure tridimensionale, ma con caratteristiche completamente diverse dalla struttura fattoriale originaria (nessuna saturazione nulla, un fattore generale con tutte le proiezioni positive, due fattori bipolari); ma ruotando gli assi fattoriali si e' raggiunta infine la struttura semplice originaria. Leggendo le saturazioni dai tre ultimi diagrammi si constata infatti che esse corrispondono con buona approssimazione a quelle della matrice originaria (2).

Il procedimento sta ad indicare che quando nei dati e' presente una struttura semplice, tale struttura si puo' ottenere attraverso successive rotazioni degli assi.

In questo caso, essendo lo spazio dei fattori comuni tridimensionale, abbiamo la possibilita' di rappresentare in un disegno prospettico la struttura semplice risultata dalle rotazioni, per confrontarla con la struttura centroide.

I tre semiassi ortogonali positivi si possono comodamente raffigurare come i tre spigoli che partono da un vertice di un cubo, ed i tre diagrammi bidimensionali come le tre facce che comprendono ciascuno due dei suddetti spigoli (fig. 86).

Quando si e' realizzato l'"insieme positivo", i punti-tests si trovano tutti nella porzione di spazio limitata dai tre piani suddetti e da una superficie sferica di raggio 1 poiche' i vettori-tests hanno una lunghezza inferiore a 1.

Lo spazio in cui si trovano i punti-tests ha dunque la forma di un "ottante" di sfera.

Data la semplicita' della struttura nessuno dei tests e' trifattoriale: 8 tests sono bifattoriali (cioe' hanno saturazione zero in un fattore) e due tests sono monofattoriali (cioe' hanno saturazione zero in due fattori).

E' facile rendersi conto che un punto che ha proiezione zero in uno degli assi deve trovarsi su un piano perpendicolare a tale asse e passante per l'origine, piano che necessariamente comprende gli altri due assi. In altre parole, un punto-test che ha proiezione zero in uno degli assi, e proiezioni positive negli altri due deve trovarsi nella porzione di piano limitata dai due semiassi su cui ha proiezioni positive e da un arco di cerchio di raggio 1.

Un punto-test che ha proiezione nulla su due dei tre assi deve trovarsi nell'intersezione (3) dei due piani passanti per l'origine e per-

(1) Una prima volta con comunanze stimate (Cap. IV, 7) e una seconda volta con comunanze esatte.

(2) Va notato che il fattore B'' corrisponde al fattore C e il fattore C'' al fattore B della matrice originaria.

(3) In quanto deve trovarsi su tutti e due i piani.

pendicolari ognuno ad uno degli assi su cui il suddetto punto ha proiezione nulla. Tale intersezione non e' altro che il terzo asse (1): quindi un punto-test che ha proiezione nulla su due assi si trova sul terzo asse.

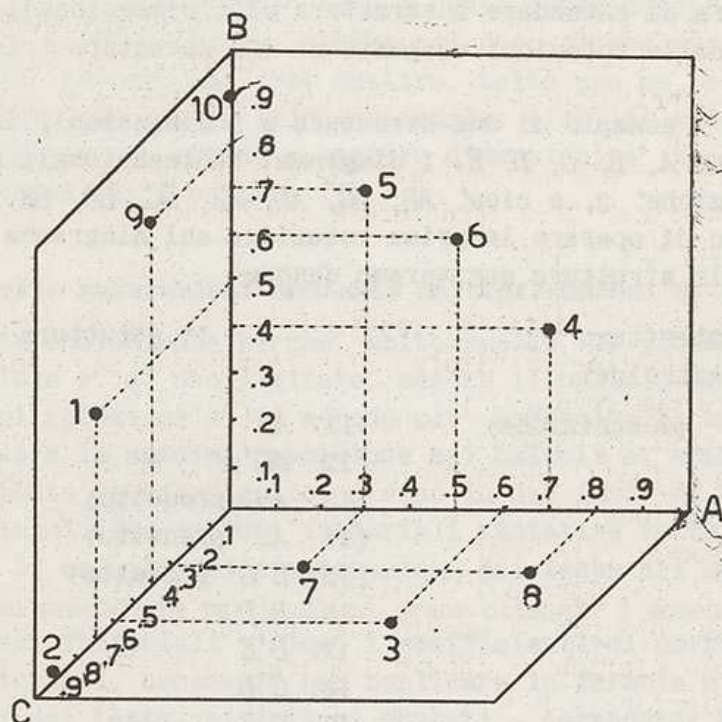


Fig. 86.

E' chiaro che, siccome la configurazione dei vettori-tests (o piu' esattamente, delle loro proiezioni) nello spazio dei fattori comuni, non varia con le rotazioni, il modello tridimensionale di fig. 86 deve corrispondere alla disposizione dei vettori-tests nel modello tridimensionale di fig. 58 presentato a proposito dell'analisi centroide.

Confrontando il modello con i diagrammi 13-15 si osserva che l'essere un punto localizzato su un asse in un determinato diagramma significa soltanto che la proiezione di quel punto e' nulla sull'altro asse del diagramma.

Se il punto ha proiezione nulla anche sul terzo asse, esso e' lo-

(1) Poiche' gli assi e quindi i piani sono perpendicolari. Le considerazioni suddette non sono piu' valide quando gli assi sono obliqui fra loro.

calizzato sull'unico asse sul quale ha proiezione non nulla; se invece ha proiezione non nulla sul 3° asse, allora e' localizzato sul piano individuato dai due assi sui quali ha proiezione non nulla (1).

D. Estensione del procedimento alle strutture pluridimensionali

Vediamo ora di estendere a strutture pluridimensionali quanto abbiamo appreso dalle rotazioni eseguite su una struttura tridimensionale.

Prendiamo l'esempio di una struttura a 5 dimensioni, in cui i fattori comuni sono A, B, C, D, E . I diagrammi bidimensionali sono in questo caso 10 anziche' 3, e cioe' $AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE$.

Ammettiamo di operare la prima rotazione sul diagramma BC . Nella Cronologia delle strutture scriveremo dunque

I Struttura (centroide)		II Struttura
1. AB	(descrizione)	11. AB'
2. AC	"	12. AC'
3. AD	"	(13. AD predetto)
4. AE	"	(14. AE predetto)
5. $BC \rightarrow B'C'$	"	(15. $B'C'$ predetto)
6. BD	"	16. $B'D$
7. BE	"	17. $B'E$
8. CD	"	18. $C'D$
9. CE	"	19. $C'E$
10. DE	"	(20. DE predetto)

Compiuta una seconda rotazione si passa alla III struttura, e cosi' di seguito, fino a raggiungere il risultato che ci si era proposti di raggiungere.

Resta da precisare il significato dell'intercettazione di un punto-test mediante un asse. Abbiamo veduto che nel caso particolare della struttura tridimensionale, la presenza di un punto-test su un asse A in un diagramma, significava che il test aveva proiezione zero sull'altro asse B segnato nello stesso diagramma, e si trovava nel piano normale a tale asse B , passante per l'origine e comprendente gli altri due assi A e C .

(1) Giova infine ricordare che anche nelle prime fasi del processo di rotazione la presenza di un punto-test su uno degli assi in un diagramma bidimensionale, significa che nello spazio tridimensionale il punto si trova su un piano perpendicolare all'asse sul quale ha proiezione nulla, piano che contiene gli altri due assi, solo che, se non e' stato raggiunto l'insieme positivo, il punto puo' non trovarsi nella porzione di piano delimitata dai due semiassi positivi.

Consideriamo ora il caso di una struttura quadridimensionale (fattori A, B, C, D) in cui un punto-test t compare sull'asse A nel diagramma AB . E' chiaro che anche in questo caso il punto-test t ha proiezione zero sull'asse B . Come nel caso precedente, il punto si trova nello spazio individuato dagli altri assi, escluso l'asse B ; solo che nel caso precedentemente considerato (struttura tridimensionale), essendovi tre assi, tolto uno ne restavano due, i quali individuavano uno spazio bidimensionale, cioè un piano, mentre nel caso di una struttura quadridimensionale, essendo gli assi quattro, tolto uno ne restano tre, i quali individuano uno spazio tridimensionale; cioè il sottospazio tridimensionale che in uno spazio a quattro dimensioni e' normale ad uno degli assi e passa per l'origine (1).

11. Calcolo delle saturazioni mediante moltiplicazioni di matrici

Per quanto conveniente perché molto rapido, il procedimento grafico di rotazione e' di uso limitato, mentre il calcolo delle saturazioni dopo ogni rotazione e' il metodo piu' generalmente usato. Allo scopo di ottenere la massima precisione nei calcoli e' stato sviluppato un procedimento standardizzato, diviso in due fasi: a) calcolo dei coseni degli angoli fra vettori fattoriali ruotati e vettori fattoriali originari, b) calcolo delle saturazioni dei tests nei nuovi fattori.

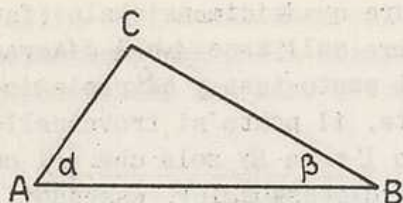
a) In un precedente paragrafo si erano ottenuti i coseni degli angoli fra i vettori fattoriali - cioè i coefficienti di correlazione fra i vettori fattoriali, necessari per applicare le formule di calcolo delle saturazioni dei tests nei fattori ruotati - servendosi dell'angolo di rotazione, cioè leggendo nelle tabelle delle funzioni goniometriche il coseno dell'angolo di rotazione, ρ e del suo complementare $(90 - \rho)$ (2). Siccome però la misura di un angolo per mezzo di un rapportatore da' una misura troppo grossolana (3) si ricorre ad un procedimento diverso per la determinazione del coseno.

In un triangolo rettangolo (fig. 87a) il coseno di uno degli angoli acuti e' dato dal rapporto fra il cateto adiacente e l'ipotenusa; pertanto, per ottenere il coseno di un angolo acuto, basta tracciare la perpendicolare da un punto P qualsiasi di uno dei lati sull'altro lato, ottenendo in tal modo il triangolo rettangolo, e quindi calcolare il rapporto sopraindicato. Se l'angolo, invece e' ottuso, si considera l'angolo acuto tra il prolungamento di uno dei lati e l'altro lato (cioe'

(1) Nel caso di una struttura a cinque dimensioni, un punto-test che in un diagramma bidimensionale AB e' localizzato sull'asse A , ha proiezione zero sull'asse B e si trova nel sottospazio a quattro dimensioni individuato dagli assi $ACDE$.

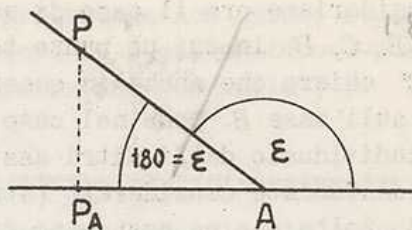
(2) V. § 6.

(3) A piccole differenze angolari possono corrispondere rilevanti differenze nelle funzioni goniometriche.



$$\cos \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$



$$\cos \varepsilon = -\cos (180 - \varepsilon) = -\frac{\overline{AP_A}}{\overline{AP}}$$

Fig. 87a.

Fig. 87b.

se l'angolo ottuso è ε , si prende in considerazione l'angolo $(180 - \varepsilon)$ e si procede analogamente, tenendo presente che in questo caso il coseno è negativo (v. fig. 87b).

Così, ad esempio, per calcolare i coseni degli angoli che il vettore A' forma con i vettori A e B (fig. 88) si può prendere un punto P qualsiasi sul vettore A' , e si considerano le proiezioni del segmento \overline{OP} sui vettori A e B , cioè rispettivamente i segmenti $\overline{OP_A}$ e $\overline{OP_B}$, le cui misure sono proporzionali ai due coseni (1).

Disponendo di queste misure si potrebbero calcolare i coseni dei due angoli AA' e $A'B$, misurando il segmento \overline{OP} , e quindi dividendo per la misura di \overline{OP} le misure delle due proiezioni di \overline{OP} su A e su B cioè calcolando $\cos AA' = \frac{\overline{OP_A}}{\overline{OP}}$ e $\cos A'B = \frac{\overline{OP_B}}{\overline{OP}}$.

Tuttavia, per maggiore precisione si evita di ricorrere a misurazioni, e si calcola la misura del segmento \overline{OP} dalle sue proiezioni, applicando il teorema di Pitagora, in quanto considerando uno dei due triangoli OPP_A oppure OPP_B si ha $\overline{OP} = \sqrt{\overline{OP_A}^2 + \overline{OP_B}^2}$. Si può quindi calcolare $\cos A'A = \frac{\overline{OP_A}}{\sqrt{\overline{OP_A}^2 + \overline{OP_B}^2}}$, e $\cos BA' = \frac{\overline{OP_B}}{\sqrt{\overline{OP_A}^2 + \overline{OP_B}^2}}$.

Il procedimento assume la forma seguente. Dovendosi calcolare i coseni delle due coppie di angoli complementari AA' e $A'B$ e rispettivamente BB' e $B'A$, si determinano anzitutto nel diagramma in cui è stata operata la rotazione (fig. 88), le proiezioni dei vettori ruotati A' e B' sui vettori originari A e B , cioè i segmenti proporzionali ai coseni dei quattro angoli. Per comodità si sceglie il punto P sul prolungamento del vettore A' , in modo che una delle due proiezioni ($\overline{OP_A}$ nel-

(1) Infatti, essendo $\frac{\overline{OP_A}}{\overline{OP}} = \cos A'A$ e $\frac{\overline{OP_B}}{\overline{OP}} = \cos BA'$, dividendo la prima equazione per la seconda si ha $\overline{OP_A} : \overline{OP_B} = \cos A'A : \cos BA'$, da cui $\overline{OP_A} : \cos A'A = \overline{OP_B} : \cos BA'$.

* per il punto P si sceglie sul prolungamento del vettore A' una distanza proporzionale all'ipotenusa del vettore A.

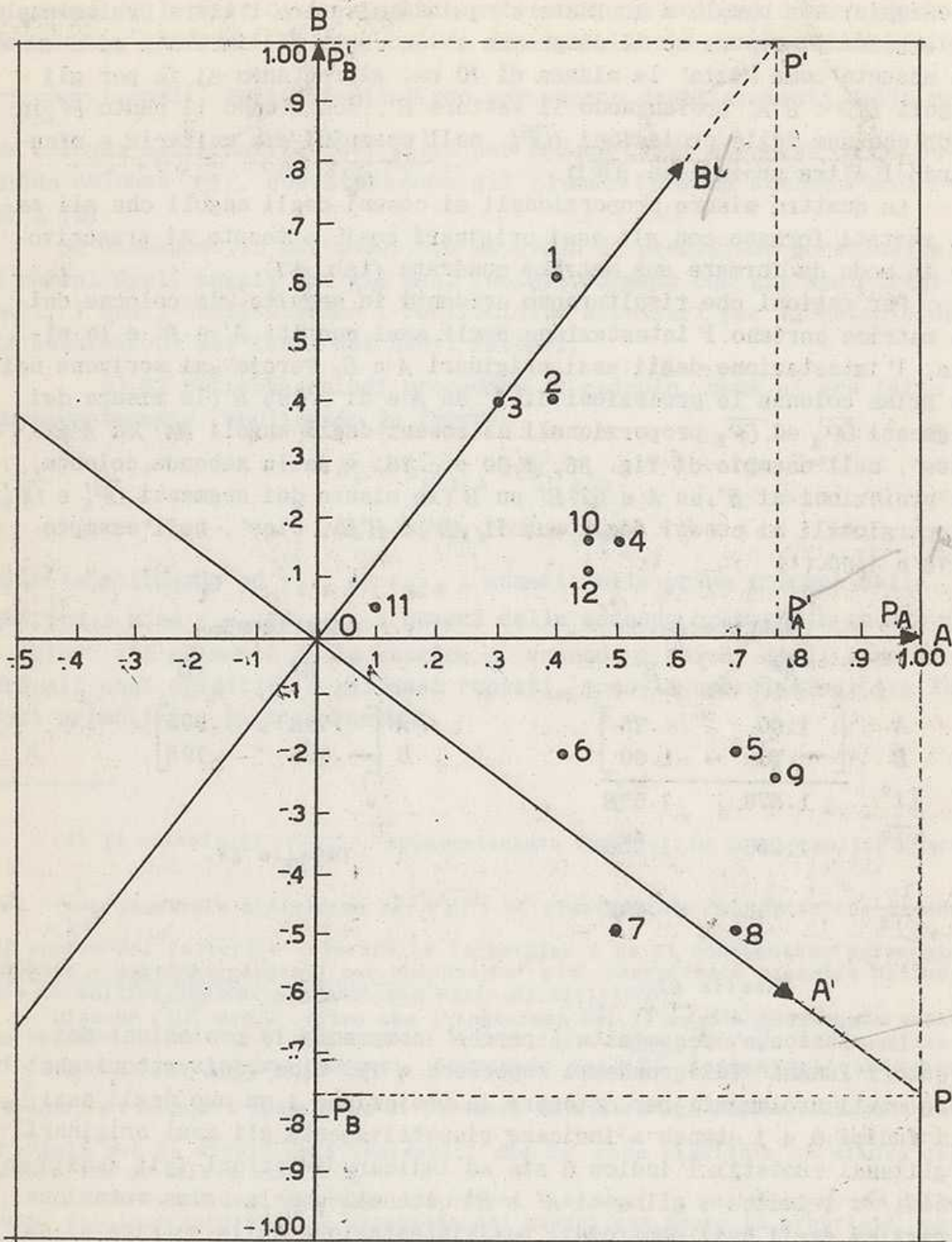


Fig. 88.

*facceva figura
più chiara e
farle più semplice*

l'esempio) sia uguale a 1. Bastera' quindi misurare l'altra proiezione o leggerne la misura se il diagramma e' su carta millimetrata ed e' stata assunta come unita' la misura di 10 cm. Altrettanto si fa per gli angoli $B'B$ e $B'A$, prolungando il vettore B' , scegliendo il punto P' in modo che una delle proiezioni (\overline{OP}'_B , nell'esempio) sia unitaria e misurando l'altra proiezione (\overline{OP}'_A).

Le quattro misure proporzionali ai coseni degli angoli che gli assi ruotati formano con gli assi originari cosi' ottenute si trascrivono in modo da formare una matrice quadrata (tab. 67).

Per ragioni che risulteranno evidenti in seguito, le colonne della matrice portano l'intestazione degli assi ruotati A' e B' e le righe, l'intestazione degli assi originari A e B . Percio' si scrivono nella prima colonna le proiezioni di A' su A e di A' su B (le misure dei segmenti \overline{OP}'_A ed \overline{OP}'_B proporzionali ai coseni degli angoli AA' ed $A'B$) cioe', nell'esempio di fig. 88, 1.00 e $-.76$; e nella seconda colonna, le proiezioni di B' su A e di B' su B (le misure dei segmenti \overline{OP}'_A e \overline{OP}'_B , proporzionali ai coseni degli angoli AB' e $B'B$), cioe', nell'esempio, $.76$ e 1.00 .⁽¹⁾

		Matrice L_{01}		Matrice Λ_{01}	
		A'	B'	A'	B'
x	A	1.00	.76	.796	.605
	B	-.76	1.00	-.605	.796
	$\sum l^2$	1.578	1.578		
	$\sqrt{\sum l^2}$	1.256	1.256		
	$\frac{1}{\sqrt{\sum l^2}}$.796	.796		

Tabella 68.

Tabella 67.

La matrice e' denominata L perche' comprende le proiezioni dei "vettori lunghi" (di grandezza superiore a 1), cioe' dei vettori che sono stati prolungati per ottenere la proiezione 1 su uno degli assi. Gli indici 0 e 1 stanno a indicare rispettivamente gli assi originari e gli assi ruotati; l'indice 0 sta ad indicare i vettori (gli assi) centroidi, e l'indice 1 gli assi A' e B' ottenuti con la prima rotazione, a partire dagli assi centroidi. Dall'intestazione della matrice si sa a quale rotazione si riferisce il calcolo.

Si passa quindi a compiere le operazioni necessarie per trasformare la matrice L nella matrice Λ che comprende, nello stesso ordine, le misure dei coseni degli angoli che i nuovi assi formano con gli assi originari (mentre la matrice L comprende i numeri proporzionali a quelle misure). A tale scopo si calcolano le somme $\sum l^2$ dei quadrati degli

(1) Si tenga presente che ~~dal~~ dal diagramma risulta quale delle proiezioni e' negativa. Non occorre quindi tener presente le formule di trasformazione: basta leggere le proiezioni col loro segno dal diagramma.

elementi della matrice L , separatamente per ogni colonna, se ne estrae la radice quadrata $\sqrt{\sum l^2}$ e infine si calcolano i due coefficienti $\frac{1}{\sqrt{\sum l^2}}$ i quali, moltiplicati l'uno per ognuno degli elementi della prima colonna della matrice e l'altro per ognuno degli elementi della seconda colonna (1), costituiscono gli elementi della seconda matrice Λ (2).

Si ottengono in tal modo, con un grado di precisione accettabile, i coseni degli angoli che gli assi ruotati formano con gli assi originali, i quali costituiscono i coefficienti necessari per il calcolo delle saturazioni dei tests nei nuovi fattori.

b) Si potrebbe quindi procedere al calcolo, come si era fatto precedentemente, applicando le formule

$$a'_t = a_t r_{A'A} + b_t r_{A'B}$$

$$b'_t = a_t r_{B'A} + b_t r_{B'B}$$

cioè sostituendo ad $r_{A'A}$ ed $r_{A'B}$ i numeri della prima colonna della matrice Λ e ad $r_{B'A}$ ed $r_{B'B}$ i numeri della seconda colonna in quanto λ , cioè gli elementi della matrice Λ , essendo i coseni degli angoli tra gli assi primitivi e gli assi ruotati, sono le correlazioni fra fattori primitivi e fattori ruotati.

(1) Il calcolo di $\frac{1}{\sqrt{\sum l^2}}$, apparentemente inutile (in quanto moltiplicare per $\frac{1}{\sqrt{\sum l^2}}$ equivale a dividere per $\sqrt{\sum l^2}$) e' giustificato dal fatto che quando il numero dei fattori e' elevato, e la matrice L ha di conseguenza parecchie colonne e parecchi elementi per colonna, e' piu' conveniente eseguire una serie di moltiplicazioni anziche' una serie di divisioni.

Siccome $\sqrt{\sum l^2}$ non e' altro che l'ipotenusa del triangolo rettangolo preso in considerazione per il calcolo dei coseni degli angoli che gli assi originali formano con gli assi ruotati, dividendo per $\sqrt{\sum l^2}$ (o moltiplicando per $\frac{1}{\sqrt{\sum l^2}}$), si compie l'operazione di dividere la misura del cateto adiacente all'angolo per la misura dell'ipotenusa, che da' come risultato la misura del coseno che si voleva misurare.

(2) Va notato che dividendo due numeri A e B per la radice quadrata della somma dei loro quadrati, si ottengono dei numeri che hanno la proprieta' che la somma dei loro quadrati e' uguale ad 1.

Infatti

$$\left[\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right]^2 + \left[\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right]^2 = \frac{A^2}{A^2 + B^2} + \frac{B^2}{A^2 + B^2} = \frac{A^2 + B^2}{A^2 + B^2} = 1.$$

Tale operazione e' denominata *normalizzazione* degli elementi di una matrice. Nel caso sopra descritto si tratta di *normalizzazione per colonne*, poiche' la somma dei quadrati degli elementi di ogni colonna della matrice Λ e' uguale ad 1.

Si e' passato alla normalizzazione per colonne, ma siccome in questo caso le colonne sono uguali alle righe (tranne che per i segni, che nell'innalzamento al quadrato non contano) la matrice e' normalizzata anche per righe.

Ma e' utile sotto vari aspetti impostare tale calcolo come una moltiplicazione tra matrici, in quanto moltiplicando la matrice fattoriale originaria per la matrice Λ si ottiene la matrice fattoriale ruotata, cioe' la matrice fattoriale che contiene le saturazioni dei tests nei nuovi fattori.

Il significato dell'operazione apparira' chiaro attraverso ad un esempio. Riprendiamo i dati di tab. 49, cioe' la matrice centroide bidimensionale che con una rotazione veniva trasformata in una struttura semplice (1). La matrice Λ dei coseni e' costituita in questo caso da $r_{A'A} = .955$, $r_{A'B} = -.295$, $r_{B'A} = .295$, $r_{B'B} = .955$.

$$\Lambda_{01} \begin{matrix} A' & B' \\ A \begin{bmatrix} .955 & .295 \\ -.295 & .955 \end{bmatrix} \\ B \end{matrix}$$

Procediamo ora alla moltiplicazione della matrice centroide per la matrice Λ , cioe'

$$F_0 \Lambda_{01} = O_1 \quad (2)$$

in cui O_1 e' la matrice ruotata.

$$F_0 \begin{matrix} A & B \\ 1 \begin{bmatrix} .919 & -.076 \\ .912 & .239 \\ .751 & .394 \\ .471 & .167 \\ .250 & .131 \\ .764 & -.238 \\ .668 & -.208 \\ .573 & -.178 \\ .477 & -.149 \\ .286 & -.090 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \Lambda_{01} \begin{matrix} A' & B' \\ A \begin{bmatrix} .955 & .295 \\ -.295 & .955 \end{bmatrix} \\ B \end{matrix} = O_1 \begin{matrix} A' & B' \\ 1 \begin{bmatrix} .900 & .198 \\ .800 & .497 \\ .601 & .598 \\ .401 & .298 \\ .200 & .199 \\ .800 & -.002 \\ .700 & -.002 \\ .600 & -.001 \\ .499 & -.001 \\ .300 & -.002 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Seguendo l'operazione della moltiplicazione, ci si rende conto di come si viene a costituire la matrice ruotata O_1 . Moltiplicando la prima riga della matrice F_0 per la prima colonna della matrice Λ_{01} non si

(1) Vedi il paragrafo precedente.

(2) Il simbolo F_0 sta ad indicare la matrice fattoriale di partenza, cioe' la matrice fattoriale ottenuta dalla matrice delle correlazioni, applicando il metodo centroide o un altro metodo di analisi; i simboli O_1 , O_2 , ... stanno ad indicare le matrici ad assi ortogonali, ottenute in seguito a rotazione. Le matrici ad assi obliqui (Cap. VI) saranno indicate con il simbolo V (V_1, V_2, \dots).

fa altro che applicare la formula per il calcolo del primo termine della matrice O_1 , cioè

$$a_1 \lambda_{A'A} + b_1 \lambda_{A'B} = a'_1$$

in cui, come si è detto, gli elementi λ della matrice Λ , sono i cose-ni degli angoli cioè i coefficienti r di correlazione tra i vettori fattoriali (1). In tal modo ogni successiva operazione parziale corrisponde al calcolo del coefficiente di saturazione di un test relativamente ad uno dei fattori ruotati.

Quando si procede alla ricerca della struttura semplice per approssimazioni successive, in strutture fattoriali tri- o pluridimensionali, ruotando due assi per volta, si procede alla costruzione delle matrici L e Λ tenendo conto del fatto che uno o più assi sono rimasti invariati.

Consideriamo ad esempio la rotazione rappresentata in fig. 72. In questo caso, essendo la rotazione esattamente di 45° , i vettori prolungati danno proiezione 1.00 su tutti e due gli assi, cioè $l_{A'A} = 1$, $l_{A'C} = -1$, $l_{C'A} = 1$, $l_{C'C} = 1$. Avremo quindi

	L_{O1}	Λ_{O1}
	A' C'	A' C'
A	1.00 1.00	.707 .707
C	- 1.00 1.00	- .707 .707
Σl^2	2.00 2.00	
$\sqrt{\Sigma l^2}$	1,4142 1,4142	
$\frac{1}{\sqrt{\Sigma l^2}}$.707 .707	

Tabella 70.

Tabella 71.

e moltiplicando una matrice costituita dalle colonne A e C della matrice centroide per la matrice Λ_{O1} otterremo le saturazioni dei tests nei nuovi fattori A' e C'. Cioè:

(1) E' ora evidente la ragione per cui gli elementi delle matrici L e Λ devono essere disposti in modo che in ogni colonna siano comprese le correlazioni di un vettore fattoriale ruotato con i vettori fattoriali originari. Solo così, applicando la regola delle moltiplicazioni tra matrici "riga per colonna" si ottiene che ogni moltiplicazione di una riga della matrice fattoriale originaria per una colonna della matrice Λ corrisponda ad un'applicazione di una delle due formule di trasformazione delle coordinate.

$$\begin{array}{c}
 A \quad C \\
 \begin{array}{l}
 1 \begin{bmatrix} .701 & .473 \\
 2 \begin{bmatrix} .482 & .406 \\
 3 \begin{bmatrix} .643 & -.230 \\
 4 \begin{bmatrix} .636 & -.458 \\
 5 \begin{bmatrix} .618 & -.030 \\
 6 \begin{bmatrix} .660 & -.228 \\
 7 \begin{bmatrix} .321 & -.115 \\
 8 \begin{bmatrix} .589 & -.533 \\
 9 \begin{bmatrix} .737 & -.433 \\
 10 \begin{bmatrix} .588 & .284
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 A' \quad C' \\
 \begin{array}{l}
 A \begin{bmatrix} .707 & .707 \\
 C \begin{bmatrix} -.707 & .707
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 A' \quad C' \\
 \begin{array}{l}
 1 \begin{bmatrix} .162 & .830 \\
 2 \begin{bmatrix} .054 & .628 \\
 3 \begin{bmatrix} .617 & .292 \\
 4 \begin{bmatrix} .773 & .126 \\
 5 \begin{bmatrix} .458 & .416 \\
 6 \begin{bmatrix} .628 & .306 \\
 7 \begin{bmatrix} .308 & .146 \\
 8 \begin{bmatrix} .793 & .039 \\
 9 \begin{bmatrix} .215 & .827 \\
 10 \begin{bmatrix} .215 & .617
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Ma nel costruire la matrice Λ_{01} possiamo tener presente anche l'asse non ruotato B ; e' chiaro che, essendo ortogonale al piano degli altri assi, B ha proiezione nulla sugli altri due assi, mentre ha proiezione 1 su se stesso. Operando come nel caso precedente, ma tenendo conto anche dell'asse B , si ottiene una matrice L in cui la riga e la colonna corrispondenti all'asse non ruotato hanno tutti gli elementi nulli, tranne l'elemento corrispondente alla proiezione di B su se stesso che e' 1.00 (1) e la riga e la colonna corrispondenti all'asse non ruotato si mantengono inalterate sulla matrice.

$$\begin{array}{c}
 L_{01} \\
 \begin{array}{c}
 A' \quad B \quad C' \\
 A \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 1.00 \\
 B \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 & 0.00 \\
 C \begin{bmatrix} -1.00 & 0.00 & 1.00 \\
 \hline
 \Sigma l^2 & 2.00 & 1.00 & 2.00 \\
 \sqrt{\Sigma l^2} & 1,4112 & 1,00 & 1,4112 \\
 \hline
 \frac{1}{\sqrt{\Sigma l^2}} & .707 & 1.00 & .707
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \Lambda_{01} \\
 \begin{array}{c}
 A' \quad B \quad C' \\
 A \begin{bmatrix} .707 & 0.000 & .707 \\
 B \begin{bmatrix} .000 & 1.000 & .000 \\
 C \begin{bmatrix} -.707 & .000 & .707
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Tabella 73.

Tabella 72.

Moltiplicando l'intera matrice fattoriale per la matrice Λ cosi' ottenuta, si ottiene la nuova matrice fattoriale, in cui la colonna corrispondente all'asse non ruotato e' rimasta inalterata. Procedendo cosi' si ottiene, dopo ogni rotazione, la nuova matrice fattoriale al completo (2), dalla quale si costruiscono i nuovi diagrammi.

(1) Infatti, non essendo stato ruotato l'asse B , esso coincide con B' , l'angolo di rotazione $B'B$ e' zero, e $\cos B'B$ e' 1.

(2) E non soltanto le due colonne relative agli assi ruotati.

Il procedimento grafico e' molto piu' rapido, ma quando e' necessario disporre di risultati numerici conviene ricorrere al calcolo delle saturazioni dopo ogni rotazione, poiche' l'approssimazione ottenuta col metodo grafico non e' in genere sufficiente.

Prima di passare all'esecuzione dei calcoli relativi alle rotazioni ortogonali eseguite graficamente nel § 8, e' utile aggiungere alcune ulteriori indicazioni.

Nell'eseguire dei calcoli di una certa complicazione e' importante disporre di qualche controllo. Un controllo della moltiplicazione tra matrici consiste nell'eseguire la somma algebrica delle colonne della matrice moltiplicanda, in modo da costituire una riga in piu' nella matrice, ed eseguire la moltiplicazione anche per i termini di questa ultima riga, ottenendo quindi un'ultima riga in piu' nella matrice-prodotto che viene indicata come *Contr.* Il controllo si esegue facendo la somma algebrica delle colonne della matrice-prodotto: i termini della riga *controllo* devono essere uguali a quelli della riga delle somme, entro i limiti degli errori di arrotondamento. Va tenuto presente che con tre decimali gli errori di arrotondamento possono raggiungere il secondo decimale, se gli arrotondamenti interessano parecchi addendi.

Come esempio consideriamo il calcolo dei coefficienti di saturazione ottenuti nel § 8 in seguito alla prima rotazione cioe' la moltiplicazione fra matrici $F_0 \Lambda_{01} = O_1$ (tab. 75). La somma algebrica delle tre colonne della matrice F_0 e' rispettivamente 5.975, -.005, .002 e tale somma costituisce l'ultima riga della matrice. Moltiplicando per la matrice Λ_{01} da' i seguenti risultati:

$$(5.975 \times .707) + (-.005 \times .000) + (.002 \times -.707) = 4.223$$

$$(5.975 \times .000) + (-.005 \times 1.000) + (.002 \times .000) = -.005$$

$$(5.975 \times .707) + (-.005 \times .000) + (.002 \times .707) = 4.266$$

I tre numeri ottenuti 4.223, -.005, 4.226 corrispondono, con minimi errori di arrotondamento, alle somme delle tre colonne della matrice-prodotto, O_1 (v. tab. 75).

Un altro controllo, che conviene eseguire alla fine, riguarda la ortogonalita' degli assi, e si compie premoltiplicando la matrice Λ per la sua trasposta, cioe' eseguendo la moltiplicazione $\Lambda' \Lambda = C$. Il prodotto di questa moltiplicazione, cioe' la matrice C , ha per elementi i coseni degli angoli che gli assi formano tra loro. Se nell'eseguire le rotazioni gli assi sono rimasti ortogonali, la matrice avra' come elementi soltanto 0.00 e 1.00; cioe' 0.00 per gli angoli di 90° , che gli assi formano tra loro, e 1.00 per gli angoli di 0° , che gli assi formano con se stessi, con lievissime deviazioni dovute agli errori di arrotondamento, come in tab. 86 (1).

(1) La spiegazione del procedimento e' fornita nel capitolo seguente, poiche' il calcolo della matrice C e' una fase essenziale dei calcoli relativi alle rotazioni oblique. (v. pp. 263-264)

Un altro controllo effettuabile dopo aver calcolato le saturazioni dei tests nei fattori ruotati, consiste nel ricalcolare le correlazioni, o almeno alcune delle correlazioni, applicando la formula $r_{xy} = a_x a_y + b_x b_y + c_x c_y + \dots$, o nel ricalcolare le comunanze, secondo la formula $h_x^2 = a_x^2 + b_x^2 + c_x^2 + \dots$, o addirittura nel ricostruire tutta la matrice delle correlazioni, provvista di comunanze applicando la formula $FF' = R$ (1).

Riportiamo, nelle tabelle 74-86, i calcoli relativi al precedente problema, cioè alle rotazioni che hanno portato a raggiungere la struttura semplice.

STRUTTURA SEMPLICE ORTOGONALE

	L_{O1}		
	A'	B	C'
A	1.00	0.00	1.00
B	0.00	1.00	0.00
C	-1.00	0.00	1.00
Σl^2	2.00	1.00	2.00
$\sqrt{\Sigma l^2}$	1.4142	1.00	1.4142
$\frac{1}{\sqrt{\Sigma l^2}}$.707	1.00	.707

Tabella 74.

	F_0				Λ_{O1}				O_1					
	A	B	C		A'	B	C'		A'	B	C'			
1	.701	-.156	.473	·	A	.707	.000	.707	=	1	.162	-.156	.830	
2	.482	-.643	.406		B	.000	1.000	.000		2	.054	-.643	.628	
3	.643	-.504	-.230		C	-.707	.000	.707		3	.618	-.504	.292	
4	.636	.187	-.458							4	.774	.187	.126	
5	.618	.444	-.030							5	.458	.444	.416	
6	.660	.350	-.228							6	.628	.350	.306	
7	.321	-.252	-.115							7	.308	-.252	.146	
8	.589	-.315	-.533							8	.793	-.315	.039	
9	.737	.265	.433							9	.215	.265	.827	
10	.588	.619	.284							10	.215	.619	.617	
Σ	5.975	-.005	.002							Σ	4.225	-.005	4.227	
											Contr.	4.223	-.005	4.226

Tabella 75..

(1) Va tenuto presente che questi ultimi controlli si possono eseguire soltanto se si è proceduto a rotazioni ortogonali; essi non sono applicabili alle rotazioni oblique.

$$L_{12} \begin{matrix} & A' & B' & C'' \\ \begin{matrix} A' \\ B \\ C' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & -1.02 \\ 0.00 & 1.02 & 1.00 \end{bmatrix} \\ \Sigma l^2 & 1.000 & 2.040 & 2.040 \\ \sqrt{\Sigma l^2} & 1.000 & 1.428 & 1.428 \\ \frac{1}{\sqrt{\Sigma l^2}} & 1.000 & .700 & .700 \end{matrix}$$

Tabella 76.

O_1			Λ_{12}			O_2					
A'	B	C'	A'	B'	C''	A'	B'	C''			
1	.162	-.156	.830	A'	1.000	.000	.000	1	.162	.484	.692
2	.054	-.643	.628	B	.000	.700	-.714	2	.054	-.002	.899
3	.618	-.504	.292	C'	.000	.714	.700	3	.618	-.145	.564
4	.774	.187	.126					4	.774	.221	-.046
5	.458	.444	.416					5	.458	.608	-.026
6	.628	.350	.306					6	.628	.463	-.031
7	.308	-.252	.146					7	.308	-.072	.282
8	.793	-.315	.039					8	.793	-.192	.252
9	.215	-.265	.827					9	.215	.776	.390
10	.215	.619	.617					10	.215	.874	-.010
Σ	4.225	-.005	4.227					Σ	4.225	3.015	2.966
				Contr.	4.225	3.014	2.962				

Tabella 77.

	L_{23}		
	A''	B''	C''
A'	1.00	.25	0.00
B'	-.25	1.00	0.00
C''	0.00	0.00	1.00
Σl^2	1.062	1.062	1.000
$\sqrt{\Sigma l^2}$	1.031	1.031	1.000
$\frac{1}{\sqrt{\Sigma l^2}}$.970	.970	1.000

Tabella 78.

O_2			Λ_{23}			O_3						
	A'	B'	C''		A''	B''	C''		A''	B''	C''	
1	-.162	.484	.692	·	.970	.242	.000	=	.040	.509	.692	
2	.054	-.002	.899		-.242	.970	.000		.053	.011	.899	
3	.618	-.145	.564		.000	.000	1.000		.635	.009	.564	
4	.774	.221	-.046						.698	.402	-.046	
5	.458	.608	-.026						.297	.701	-.026	
6	.628	.463	-.031						.497	.601	-.031	
7	.308	-.072	.282						.316	.004	.282	
8	.793	-.192	.252						.816	.006	.252	
9	.215	.776	.390						.021	.805	.390	
10	.215	.874	-.010						-.003	.900	-.010	
Σ	4.225	3.015	2.966						3.370	3.948	2.966	
									Contr.	3.368	3.947	2.966

Tabella 79.

	L_{34}		
	A''	B''	C''
A''	$\left[\begin{array}{ccc} 1.000 & .000 & .060 \\ .000 & 1.000 & .000 \\ -.060 & .000 & 1.000 \end{array} \right]$		
B''			
C''			
Σl^2	1.004	1.000	1.002
$\sqrt{\Sigma l^2}$	1.002	1.000	1.002
$\frac{1}{\sqrt{\Sigma l^2}}$.998	1.000	.998

Tabella 80.

O_3			Λ_{34}			O_4							
	A''	B''	C''		A''	B''	C''		A''	B''	C''		
1	$\left[\begin{array}{ccc} .040 & .509 & .692 \\ .053 & .011 & .899 \\ .635 & .009 & .564 \\ .698 & .402 & -.046 \\ .297 & .701 & -.026 \\ .497 & .601 & -.031 \\ .316 & .004 & .282 \\ .816 & .006 & .252 \\ .021 & .805 & .390 \\ -.003 & .900 & -.010 \end{array} \right]$			$\cdot \left[\begin{array}{ccc} .998 & .000 & .060 \\ .000 & 1.000 & .000 \\ -.060 & .000 & .998 \end{array} \right]$				$= \left[\begin{array}{ccc} 1 & -.002 & .509 & .693 \\ 2 & -.001 & .011 & .900 \\ 3 & .600 & .009 & .601 \\ 4 & .699 & .402 & -.004 \\ 5 & .298 & .701 & -.008 \\ 6 & .498 & .601 & -.001 \\ 7 & .298 & .004 & .300 \\ 8 & .799 & .006 & .300 \\ 9 & -.002 & .805 & .390 \\ 10 & -.002 & .900 & -.010 \end{array} \right]$					
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
Σ	3.370	3.948	2.966						3.185	3.948	3.161		
									Contr.	3.185	3.948	3.162	

Tabella 81.

Le operazioni di moltiplicazioni di matrici, finora compiute, e-
sprese in termini di equazioni matriciali, sono:

$$F_0 \Lambda_{01} = O_1$$

$$O_1 \Lambda_{12} = O_2$$

$$O_2 \Lambda_{23} = O_3$$

$$O_3 \Lambda_{34} = O_4$$

Ma, per la proprieta' distributiva, che e' valida nelle operazioni con
matrici, si ha

$$O_2 = F_0 \Lambda_{01} \Lambda_{12}$$

$$O_3 = F_0 \Lambda_{01} \Lambda_{12} \Lambda_{23}$$

$$O_4 = F_0 \Lambda_{01} \Lambda_{12} \Lambda_{23} \Lambda_{34}$$

e per la proprieta' associativa, pure valida nelle operazioni con ma-
trici, calcolando la matrice $U_{04} = \Lambda_{01} \Lambda_{12} \Lambda_{23} \Lambda_{34}$ si ottiene $O_4 = F_0 U_{04}$,
cioe' si puo' calcolare direttamente O_4 , la matrice relativa all'ultima
rotazione, direttamente dalla matrice centroide F_0 senza calcolare le
matrici fattoriali relative alle altre rotazioni.

Bastera' moltiplicare fra loro successivamente *nell'ordine* le ma-
trici Λ , cioe'

$$\Lambda_{01} \Lambda_{12} = U_{02}$$

$$U_{02} \Lambda_{23} = U_{03}$$

$$U_{03} \Lambda_{34} = U_{04}$$

ed infine moltiplicare la matrice centroide per U_{04} , cioe' $F_0 U_{04}$ per
ottenere la matrice fattoriale a struttura semplice O_4 .

$$\begin{array}{c}
 \Lambda_{01} \\
 A' \quad B \quad C' \\
 A \begin{bmatrix} .707 & .000 & .707 \\ .000 & 1.000 & .000 \\ -.707 & .000 & .707 \end{bmatrix} \\
 B \\
 C
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \Lambda_{12} \\
 A'' \quad B' \quad C'' \\
 A' \begin{bmatrix} 1.000 & .000 & .000 \\ .000 & .700 & -.714 \\ .000 & .714 & .700 \end{bmatrix} \\
 B \\
 C'
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 U_{02} \\
 A' \quad B' \quad C'' \\
 A \begin{bmatrix} .707 & .505 & .495 \\ .000 & .700 & -.714 \\ -.707 & .505 & .495 \end{bmatrix} \\
 B \\
 C
 \end{array}$$

Tabella 82.

$$\begin{array}{c}
 U_{02} \\
 A' \quad B' \quad C'' \\
 A \begin{bmatrix} .707 & .505 & .495 \\ .000 & .700 & -.714 \\ -.707 & .505 & .495 \end{bmatrix} \\
 B \\
 C
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \Lambda_{23} \\
 A'' \quad B'' \quad C'' \\
 A' \begin{bmatrix} .970 & .242 & .000 \\ -.242 & .970 & .000 \\ .000 & .000 & 1.000 \end{bmatrix} \\
 B' \\
 C''
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 U_{03} \\
 A'' \quad B'' \quad C'' \\
 A \begin{bmatrix} .564 & .661 & .495 \\ -.169 & .679 & -.714 \\ -.808 & .319 & .495 \end{bmatrix} \\
 B \\
 C
 \end{array}$$

Tabella 83.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & U_{03} & \\
 & A'' & B'' & C'' \\
 A & \begin{bmatrix} .564 & .661 & .495 \end{bmatrix} \\
 B & \begin{bmatrix} -.169 & .679 & -.714 \end{bmatrix} \\
 C & \begin{bmatrix} -.808 & .319 & .495 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \Delta_{34} \\
 \begin{array}{ccc}
 A'' & B'' & C'' \\
 \begin{bmatrix} .998 & .000 & .060 \\
 .000 & 1.000 & .000 \\
 -.060 & .000 & .998 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 U_{04} \\
 \begin{array}{ccc}
 A'' & B'' & C'' \\
 A & \begin{bmatrix} .533 & .661 & .528 \\
 -.126 & .679 & -.723 \\
 -.836 & .319 & .448 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Tabella 84.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & F_0 & \\
 & A & B & C \\
 1 & \begin{bmatrix} .701 & -.156 & .473 \end{bmatrix} \\
 2 & \begin{bmatrix} .482 & -.643 & .406 \end{bmatrix} \\
 3 & \begin{bmatrix} .643 & -.504 & -.230 \end{bmatrix} \\
 4 & \begin{bmatrix} .636 & .187 & -.458 \end{bmatrix} \\
 5 & \begin{bmatrix} .618 & .444 & -.030 \end{bmatrix} \\
 6 & \begin{bmatrix} .660 & .350 & -.228 \end{bmatrix} \\
 7 & \begin{bmatrix} .321 & -.252 & -.115 \end{bmatrix} \\
 8 & \begin{bmatrix} .589 & -.315 & -.533 \end{bmatrix} \\
 9 & \begin{bmatrix} .737 & .265 & .433 \end{bmatrix} \\
 10 & \begin{bmatrix} .588 & .619 & .284 \end{bmatrix} \\
 \Sigma & \begin{bmatrix} 5.975 & -.005 & .002 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 U_{04} \\
 \begin{array}{ccc}
 A'' & B'' & C'' \\
 A & \begin{bmatrix} .533 & .661 & .528 \\
 -.126 & .679 & -.723 \\
 -.836 & .319 & .448 \end{bmatrix} \\
 B & \\
 C &
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 O_4 \\
 \begin{array}{ccc}
 A'' & B'' & C'' \\
 1 & \begin{bmatrix} -.002 & .508 & .695 \\
 -.001 & .011 & .901 \\
 .599 & .009 & .601 \\
 .698 & .401 & -.004 \\
 .298 & .700 & -.008 \\
 .498 & .601 & -.007 \\
 .299 & .004 & .300 \\
 .799 & .006 & .300 \\
 -.002 & .805 & .391 \\
 -.002 & .900 & -.011 \\
 \Sigma & \begin{bmatrix} 3.184 & 3.945 & 3.158 \end{bmatrix} \\
 Contr. & \begin{bmatrix} 3.184 & 3.947 & 3.160 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Tabella 85.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & U'_{04} & \\
 & A & B & C \\
 A'' & \begin{bmatrix} .533 & -.126 & -.836 \end{bmatrix} \\
 B'' & \begin{bmatrix} .661 & .679 & .319 \end{bmatrix} \\
 C'' & \begin{bmatrix} .528 & -.723 & .448 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 U_{04} \\
 \begin{array}{ccc}
 A'' & B'' & C'' \\
 A & \begin{bmatrix} .533 & .661 & .528 \\
 -.126 & .679 & -.723 \\
 -.836 & .319 & .448 \end{bmatrix} \\
 B & \\
 C &
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 C_4 \\
 \begin{array}{ccc}
 A'' & B'' & C'' \\
 A'' & \begin{bmatrix} .999 & -.001 & -.002 \\
 -.001 & 1.000 & .001 \\
 -.002 & .001 & 1.003 \end{bmatrix} \\
 B'' & \\
 C'' &
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Tabella 86.

1. Il passaggio dalle strutture ortogonali alle strutture oblique

Non da tutte le strutture centroidi si puo' ottenere, per successive rotazioni, la struttura semplice; inoltre, nella maggior parte dei casi in cui si puo' raggiungere, e' ottenibile soltanto a prezzo della rinuncia all'ortogonalita' degli assi.

Consideriamo infatti, per semplicita', l'esempio fittizio di una struttura tridimensionale in fig. 89.

No [Ammettiamo di aver gia' trovato una posizione soddisfacente per l'asse C, per cui rimanga soltanto la possibilita' di ruotare nel piano qui rappresentato.]

Sono evidenti le "tracce" di due piani, perpendicolari al piano del diagramma, nei quali sono localizzati (approssimativamente) numerosi vettori-tests; ma poiche' essi formano tra loro un angolo acuto non e' possibile far coincidere, con una rotazione ortogonale, gli assi A e B alle due tracce. Ci si trova quindi di fronte al dilemma, se rinunciare alla semplicita' della struttura o all'ortogonalita' degli assi.

In questi casi, non tutti sono d'accordo sulla rotazione da adottare: rinunciare all'ortogonalita' significa infatti ottenere dei fattori che sono in correlazione fra loro, rinunciando in tal modo a quell'indipendenza delle dimensioni che era uno degli scopi dell'analisi fattoriale. Tuttavia, seguendo Thurstone, la maggior parte dei fattorialisti ritiene che, purché non si tratti di una forte obliquita' (corrispondente ad una elevata correlazione, che renderebbe troppo simili due fattori) convenga senz'altro ammettere i fattori obliqui pur di raggiungere la semplicita' della struttura (1).

(1) Secondo Thurstone l'esigenza dell'ortogonalita' dei fattori e' qualche cosa di artificioso, dato che anche dimensioni naturali, come per es. peso e statura sono correlate tra loro. A voler applicare rigidamente l'esigenza

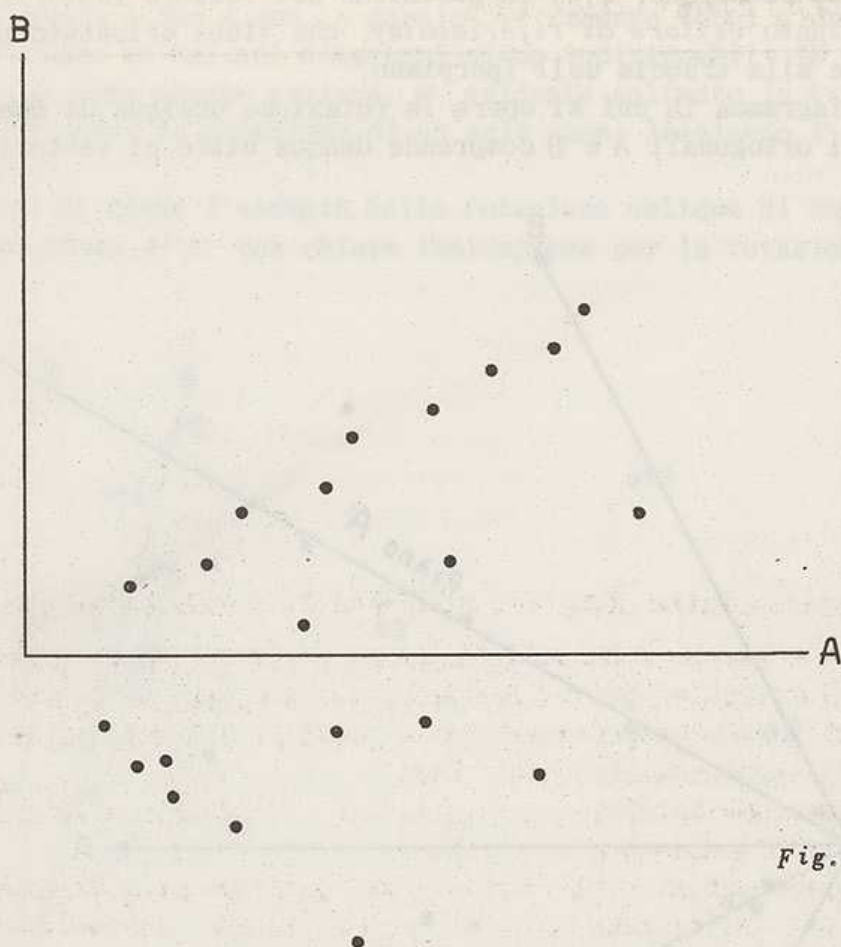


Fig. 89.

Vediamo ora come si profila la soluzione di Thurstone. Come si dovranno situare gli assi per ottenere, sia pure a spese dell'indipendenza fra i fattori, la struttura semplice?

Nelle rotazioni ortogonali ci si può accontentare di far coincidere gli assi con le tracce dei piani (o degli iperpiani); ma non avrebbe senso fare altrettanto nelle rotazioni oblique. Infatti il vantaggio di far coincidere un asse con la traccia di un piano o di un iperpiano derivava dal fatto che, in seguito all'ortogonalità degli assi, i punti-tests intercettati da un asse avevano proiezione nulla nell'altro asse. Ciò che si otteneva in tal modo era di far coincidere il maggior numero possibile di punti-tests con la perpendicolare ad un asse, passante per l'origine. Altrettanto si deve fare quando gli assi non sono ortogonali; solo che in questo caso la perpendicolare ad un asse non coincide con l'altro asse, e quindi nel procedere alla rotazione obliqua bisogna considerare per ogni asse che si intende ruotare, a) la traccia dell'iperpiano (chiamata comunemente *piano*) che è l'elemento

dell'indipendenza delle dimensioni, si dovrebbero, infatti, anche in questo caso sostituire due dimensioni indipendenti alle dimensioni naturali correlate.

guida della rotazione, e *b*) la posizione del vettore fattoriale ruotato (denominato *vettore di riferimento*), che viene orientato perpendicolarmente alla traccia dell'iperpiano.

Un diagramma in cui si opera la rotazione obliqua di due vettori fattoriali ortogonali *A* e *B* comprende dunque oltre ai vettori fatto-

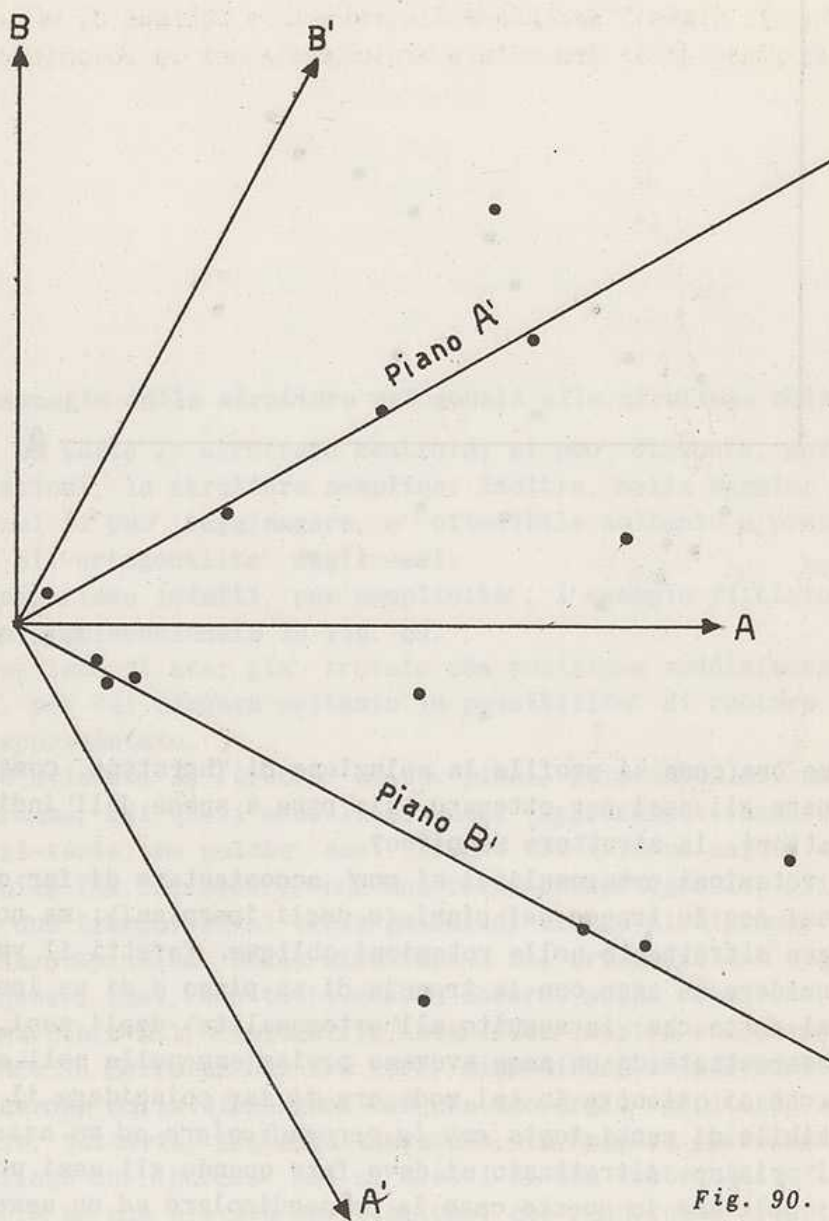


Fig. 90.

riali originari e ai vettori fattoriali ruotati (vettori di riferimento *A'* e *B'*) anche le tracce dei due iperpiani (piani *A'* e *B'*) che sono servite ad orientare i due vettori di riferimento (fig. 90). Ma trattandosi di rotazione obliqua, non è necessario che gli assi fattoria-

li siano ruotati a due a due, e perciò si ruotano tutti e due gli assi solo nel caso in cui nel diagramma siano individuabili le tracce di due piani. Se come spesso avviene, e' evidente soltanto la traccia di un piano, si opera la rotazione di un solo asse, lasciando l'altro al suo posto.

In fig. 91 diamo l'esempio della rotazione obliqua di un asse. La traccia del piano A' e' una chiara indicazione per la rotazione di un

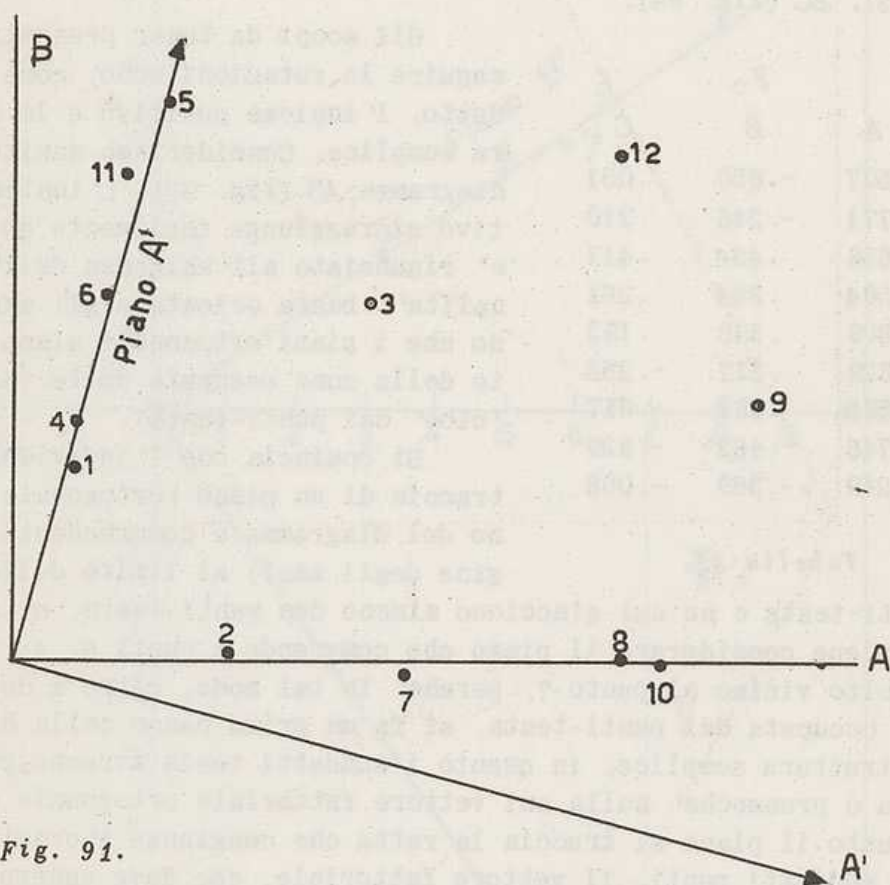


Fig. 91.

vettore fattoriale in posizione perpendicolare al piano, in modo da avere sei proiezioni nulle o approssimativamente nulle (1, 4, 6, 11, 5). Il vettore B , che ha quattro proiezioni nulle (2, 6, 8, 10), deve mantenere la sua attuale posizione nel piano AB (1).

(1) Va sottolineato il fatto che il vettore fattoriale A , che in questo caso viene ruotato, e' quello che nella sua posizione originaria intercettava un certo numero di punti-tests. Agli effetti della semplicita' della struttura non ha infatti nessuna importanza che dei punti-tests siano allineati su un vettore fattoriale; importa invece che ci siano delle proiezioni nulle. Percio' e' l'altro vettore fattoriale, B , su cui le proiezioni dei predetti punti-tests sono nulle, che deve essere mantenuto nella sua posizione.

2. Il metodo radiale

Vediamo nel seguente esempio (1) come, con metodo analogo a quello usato per le rotazioni ortogonali, si possa raggiungere una struttura semplice rinunciando fin da principio all'esigenza dell'ortogonalità degli assi.

Con i dati della matrice fattoriale ottenuta con l'analisi centroide (tab. 87) si costruiscono anzitutto i diagrammi *AB* (fig. 92), *AC* (fig. 93), *BC* (fig. 94).

	F_0		
	A	B	C
1	.507	-.850	.031
2	.771	-.246	.310
3	.638	.434	.417
4	.504	.344	.261
5	.809	.548	.192
6	.329	.217	-.252
7	.595	.381	-.617
8	.746	-.462	-.329
9	.249	-.369	-.008

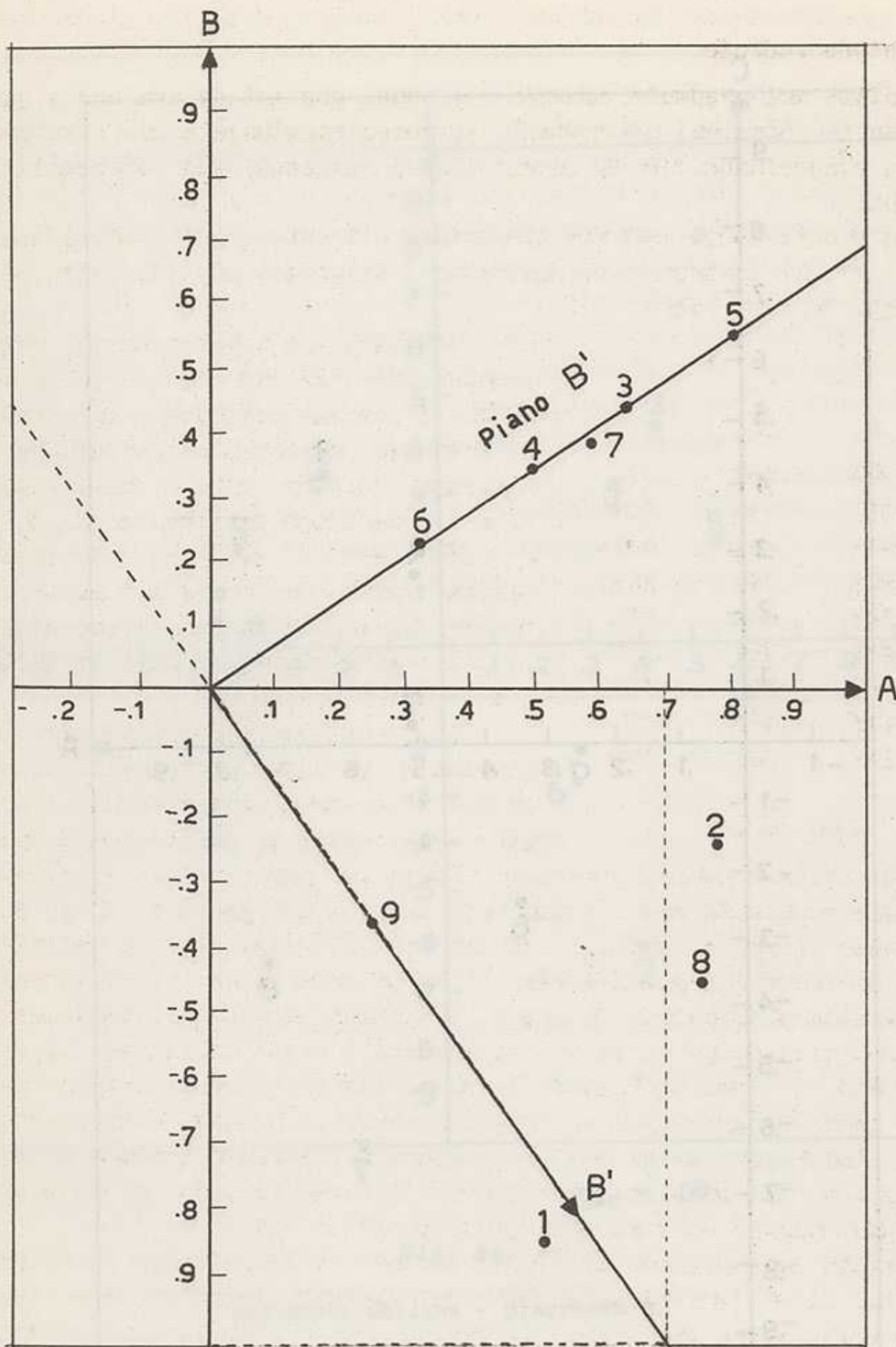
Tabella 87.

dei punti-tests e su cui giacciono almeno due punti-tests; è evidente che conviene considerare il piano che comprende i punti 6, 4, 3, 5 e passa molto vicino al punto 7, perché in tal modo, oltre a delimitare la zona occupata dai punti-tests, si fa un primo passo nella direzione della struttura semplice, in quanto i suddetti tests avranno proiezione nulla o pressoché nulla sul vettore fattoriale ortogonale al piano. Individuato il piano si traccia la retta che congiunge l'origine degli assi ai suddetti punti. Il vettore fattoriale, che deve essere ortogonale al piano, può avere due versi opposti (segmento pieno e segmento tratteggiato); si sceglie naturalmente il verso in modo che le variabili (i punti-tests) abbiano proiezioni positive (2).

Fissata la posizione del nuovo vettore di riferimento resta da denominarlo, cioè da stabilire quale dei fattori centroidi debba essere ruotato nella nuova posizione. La scelta non è indifferente, poiché ruotando il vettore *B* si ottiene ad un tempo la proiezione zero dei punti-tests 3, 4, 5, 6 e l'insieme positivo, mentre ruotando il vettore *A* i punti-tests 1, 2, 8, 9 continuerebbero ad avere proiezioni ne-

(1) Si tratta anche questa volta di dati fittizi, costruiti in modo da dare una struttura semplice obliqua.

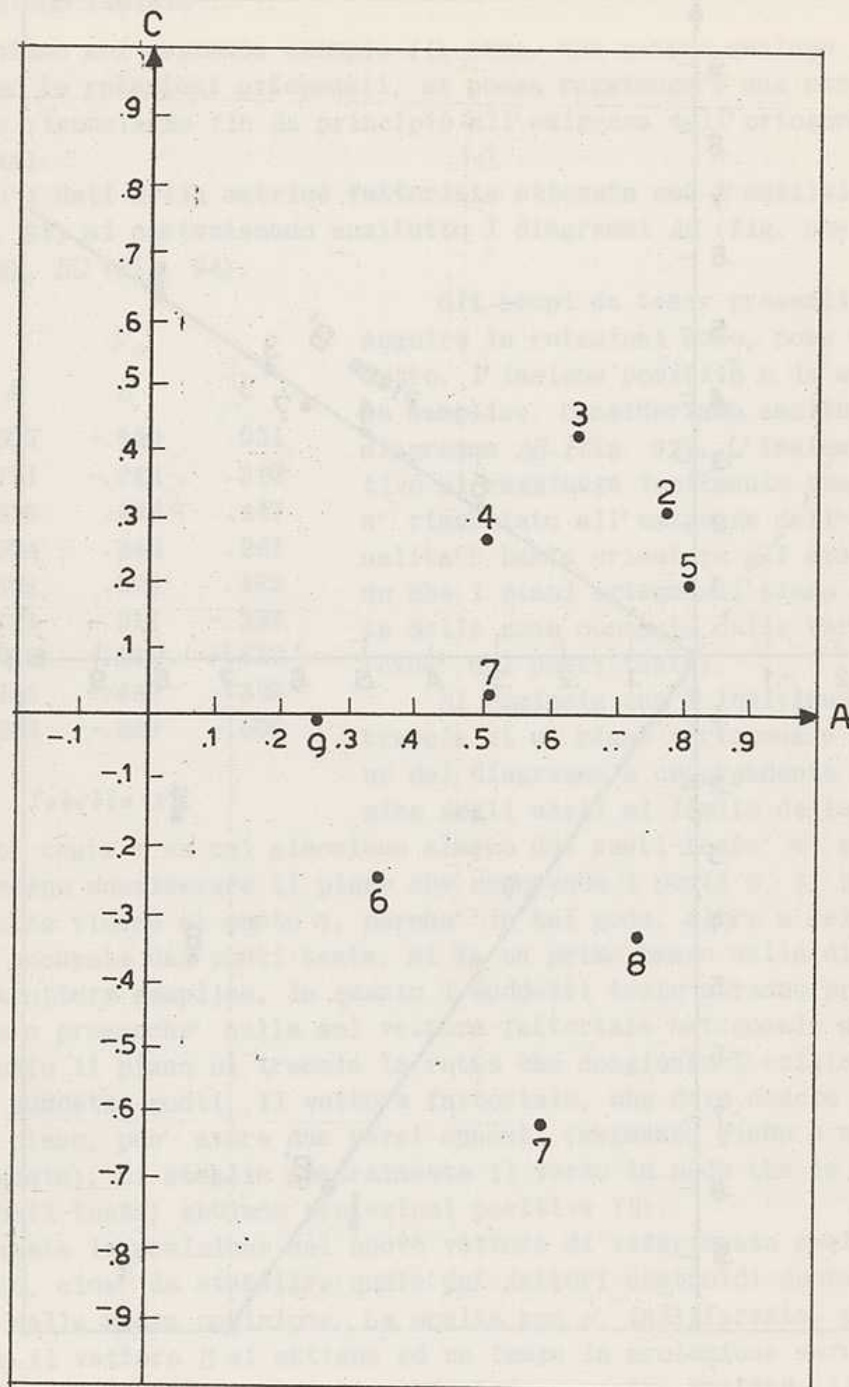
(2) Corrispondentemente all'esigenza dell'"insieme positivo".



$r_{AB} = .00$

Fig. 92.

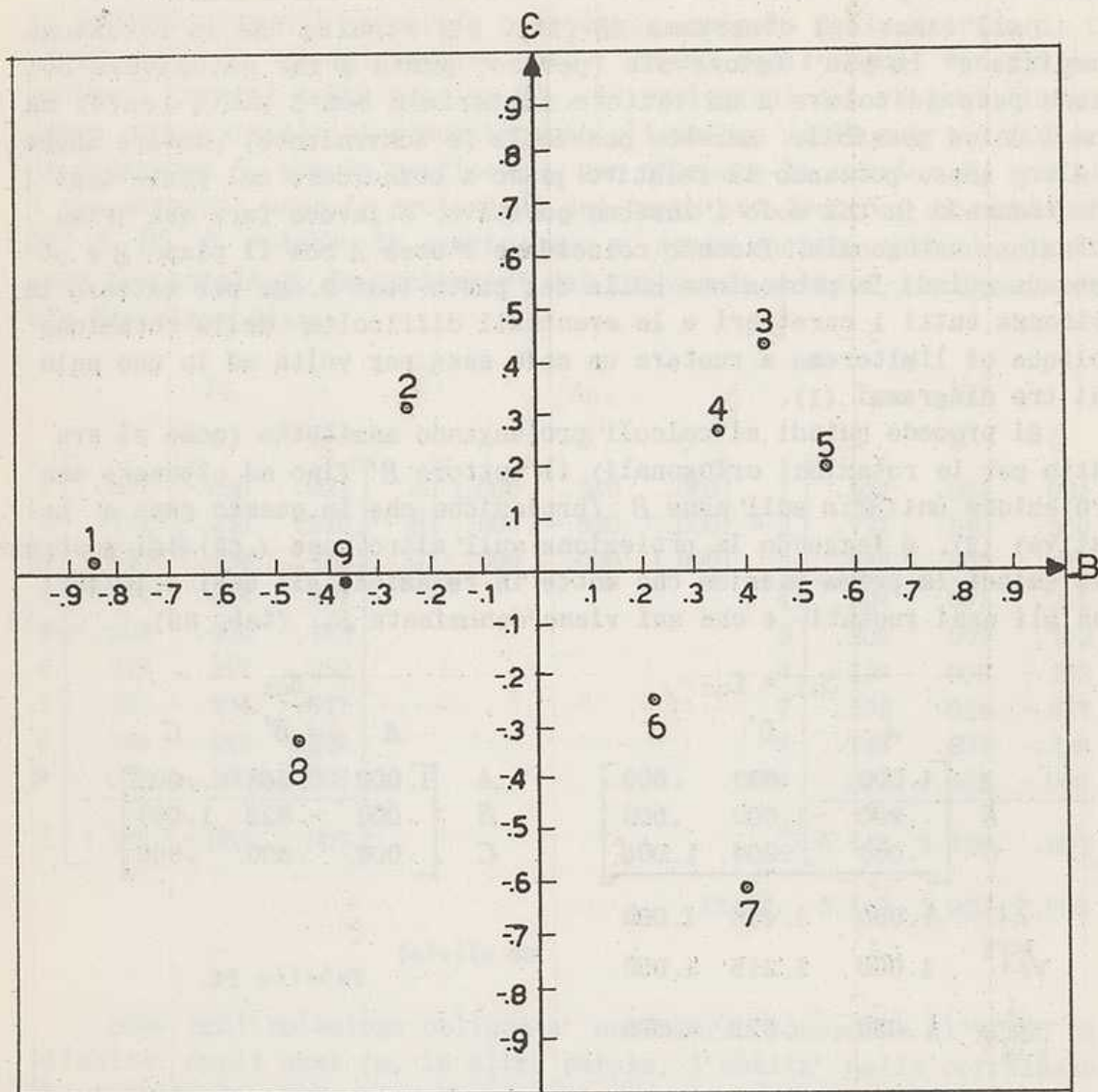
Rotazione obliqua - Diagramma 1.



$$r_{AC} = .00$$

Fig. 93.

Rotazione obliqua - Diagramma 2.



$r_{BC} = .00$

Fig. 94.

Rotazione obliqua - diagramma 3.

gative sul fattore B. Si decide perciò di ruotare il vettore B. Il vettore di riferimento viene denominato B' e il piano perpendicolare, piano B'.

Dall'esame del diagramma AB (fig. 92) risulta che la rotazione compiuta è la più favorevole (perché porta a far coincidere col piano perpendicolare a un vettore fattoriale ben 5 punti-tests) ma non l'unica possibile. Sarebbe possibile (e conveniente) ruotare anche l'altro asse, portando il relativo piano a coincidere col punto-test 1 ed ottenendo in tal modo l'insieme positivo; o invece fare una prima rotazione ortogonale, facendo coincidere l'asse A con il piano B e ottenendo quindi la proiezione nulla del punto-test 9. Ma per mettere in evidenza tutti i caratteri e le eventuali difficoltà della rotazione obliqua ci limiteremo a ruotare un solo asse per volta ed in uno solo dei tre diagrammi (1).

Si procede quindi ai calcoli prolungando anzitutto (come si era fatto per le rotazioni ortogonali) il vettore B' fino ad ottenere una proiezione unitaria sull'asse B (proiezione che in questo caso è negativa) (2), e leggendo la proiezione sull'altro asse (.69). ~~Si costruisce~~ quindi la prima matrice che mette in relazione gli assi originari con gli assi ruotati, e che qui viene denominata S₀₁ (tab. 88). *La matrice*

$S_{01} = L_{01}$			Δ_{01}				
	A	B'	C		A	B'	C
A	1.000	.690	.000	A	1.000	.568	.000
B	.000	-1.000	.000	B	.000	-.823	1.000
C	.000	.000	1.000	C	.000	.000	.000
Σl^2	1.000	1.476	1.000				
$\sqrt{\Sigma l^2}$	1.000	1.215	1.000	<i>Tabella 89.</i>			
$\frac{1}{\sqrt{\Sigma l^2}}$	1.000	.823	1.000				

Tabella 88.

Si segnano, in una matrice, che nel caso della rotazione obliqua è denominata S₀₁, le proiezioni che risultano dal relativo diagramma, cioè B' su A e B' su B, e si completa la matrice considerando nulle (.000) le proiezioni fra assi non ruotati (3), e unitarie le proiezioni

(1) Anche nel diagramma AC ci sono indicazioni per eventuali rotazioni, benché non particolarmente favorevoli.

(2) È opportuno sottolineare che le misure delle proiezioni del vettore prolungato sui due assi originari hanno un segno diverso a seconda che si trovano sul semiasse positivo o negativo. Se si commette l'errore di trascurare il segno, si realizza una struttura che anziché avvicinarsi all'obiettivo (insieme positivo o struttura semplice) se ne allontana ulteriormente.

(3) In quanto, in questa prima rotazione, gli assi non ruotati sono tra loro ortogonali.

Si calcola quindi la matrice L, delle proiezioni degli assi ruotati
 in nuovi assi ortogonali, calcolo che sarà ripetuto necessariamente,
 poiché nella prima rotazione obliqua $S_{01} = L_{01}$

Cap. VI. 2]

ni degli assi su se stessi. Si passa quindi alla matrice L_{01} , che in questo caso, trattandosi della prima rotazione obliqua, e' identica alla matrice S_{01} e puo' venir trascritta direttamente da quest'ultima, e si procede come nel paragrafo precedente: calcolo della matrice di trasformazione Δ_{01} (i cui termini sono i coseni degli angoli tra gli assi, mentre i termini della matrice L_{01} , le proiezioni dei vettori "lungi", erano proporzionali ai coseni); moltiplicazione della matrice fattoriale centroide F_0 per la matrice Δ_{01} per ottenere la matrice V_1 (tab. 90), i cui elementi sono le proiezioni dei tests sui "vettori di riferimento" A, B', C. Poiche' in questo caso e' stato ruotato soltanto il vettore fattoriale B, le proiezioni dei tests sui vettori A e C sono rimaste invariate (1).

F_0			Δ_{01}			V_1					
A	B	C	A	B'	C	A	B'	C			
1	.507	-.850	.031	A	1.000	.568	.000	1	.507	.988	.031
2	.771	-.246	.310	B	.000	-.823	.000	2	.771	.640	.310
3	.638	.434	.417	C	.000	.000	1.000	3	.638	.005	.417
4	.504	.344	.261					4	.504	.003	.261
5	.809	.548	.192					5	.809	.009	.192
6	.329	.217	-.252					6	.329	.008	-.252
7	.595	.381	-.617					7	.595	.024	-.617
8	.746	-.462	-.329					8	.746	.804	-.329
9	.249	-.369	-.008					9	.249	.445	-.008
Σ	5.148	-.003	.005					Σ	5.148	2.926	.005
			Contr.			5.148 2.926 .005					

Tabella 90.

Dopo ogni rotazione obliqua e' necessario conoscere il grado di obliquita' degli assi (o, in altre parole, l'entita' della correlazione fra i fattori); tale correlazione si calcola premoltiplicando la matrice dei coseni per la sua trasposta Δ' , cioe' effettuando la moltiplicazione fra matrici $\Delta'\Delta$ (vedi tab. 91):

Δ_{01}'			Δ_{01}			$C_1 = \Delta_{01}'\Delta_{01}$					
A	B	C	A	B'	C	A	B'	C			
A	1.000	.000	.000	A	1.000	.568	.000	A	1.000	.568	.000
B'	.568	-.823	.000	B	.000	-.823	.000	B'	.568	1.000	.000
C	.000	.000	1.000	C	.000	.000	1.000	C	.000	.000	1.000

Tabella 91.

(1) A e C non sono vettori di riferimento, ma vettori fattoriali centroidi.

(1) Le matrici L sono, nelle rotazioni oblique, le matrici delle proiezioni degli assi ruotati sugli assi della matrice di partenza (cioe' la matrice centroide) che sono ortogonali

mente ortogonale e quindi $S_{01} = L_{01}$

per chiarire il significato della suddetta moltiplicazione e' utile ricorrere all'artificio, gia' usato in precedenza, di considerare al posto dei vettori di riferimento A' , B' , C' , tre tests $T_{A'}$, $T_{B'}$, $T_{C'}$ che ne forniscono l'esatta misura. Le proiezioni di A' su A ($= r_{A'A}$) di A' su B ($= r_{A'B}$) ecc., essendo allora proiezioni di vettori-tests su vettori fattoriali ortogonali si interpretano non solo come correlazioni ma anche come saturazioni; cioe'

$$r_{T_{A'}A} = a_{T_{A'}}', \quad r_{T_{B'}A} = a_{T_{B'}}', \quad r_{T_{A'}B} = b_{T_{A'}}', \quad \text{ecc.}$$

* Gli elementi della matrice Λ_{O_1} sono in tal modo interpretabili come le saturazioni dei tests fattoriali T_A , T_B , T_C , nei tre fattori A B C . Premoltiplicando la matrice Λ_{O_1} per la sua trasposta Λ_{O_1}' si ottiene l'effetto di moltiplicare fra loro le colonne della matrice Λ_{O_1} , cioe', in termini di saturazioni:

$$\begin{aligned} \text{1a colonna} \times \text{1a colonna} &= (a_{T_{A'}} \times a_{T_{A'}}) + (b_{T_{A'}} \times b_{T_{A'}}) + (c_{T_{A'}} \times c_{T_{A'}}) = \\ &= a_{T_{A'}}^2 + b_{T_{A'}}^2 + c_{T_{A'}}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{1a colonna} \times \text{2a colonna} &= (a_{T_{A'}} \times a_{T_{B'}}) + (b_{T_{A'}} \times b_{T_{B'}}) + (c_{T_{A'}} \times c_{T_{B'}}) = \\ &= a_{T_{A'}} a_{T_{B'}} + b_{T_{A'}} b_{T_{B'}} + c_{T_{A'}} c_{T_{B'}} \end{aligned}$$

ecc.

quindi, per la formula delle correlazioni in termini di saturazioni fattoriali, $r_{12} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$. Il prodotto della 1a colonna per se stessa e' $r_{T_{A'}, T_{A'}}$, il prodotto della 1a colonna per la 2a colonna e' $r_{T_{A'}, T_{B'}}$, ecc.; e di conseguenza i termini della matrice C_A che sono i prodotti delle colonne della matrice Λ_{O_1} sono le correlazioni fra i tests che misurano i vettori di riferimento, cioe' tra i vettori di riferimento. (4)

La conoscenza delle correlazioni tra i vettori di riferimento e' importante poiche' il fatto di aver rinunciato all'ortogonalita' dei fattori non significa che si possa accettare qualsiasi correlazione fra due fattori: quando la correlazione diventa elevata (sia essa positiva o negativa) i due fattori non si distinguono sufficientemente tra loro, in quanto saturano gli stessi tests (1). Percio', quando dalla matrice C risulta che due fattori presentano una correlazione elevata, per non correre il rischio di "perdere un fattore", conviene operare la successiva rotazione in modo da correggere l'eccessiva obliquita' reciproca dei due vettori di riferimento (2).

(1) E' bene evitare che le correlazioni fra i vettori di riferimento superino .70 in valore assoluto.

(2) Dalla matrice C_1 risulta che l'intercorrelazione fra i vettori di riferimento A e B e' alquanto elevata e si dovra' quindi tenerne conto agli effetti della successiva rotazione. Del resto, dal diagramma di fig. 92 era evidente l'elevata obliquita' di B rispetto ad A , in seguito alla rotazione di B .

(3) Va notato che il test fattoriale $T_{A'}$ ha proiezioni non nulle sui fattori A, B, C , e altrettanto vale per $T_{B'}$ e $T_{C'}$.

(4) Si noti che le conclusioni suddette valgono anche per le ulteriori rotazioni, in quanto le matrici Λ mettono sempre

3. La rappresentazione delle strutture oblique per mezzo di diagrammi ortogonali

Ottenuta la matrice ruotata si passa a costruire i nuovi diagrammi; senonche' essendo i vettori di riferimento non-ortogonali, i relativi diagrammi, comprendenti ciascuno il piano individuato da due vettori di riferimento, presentano una certa difficolta' di costruzione.

Occorre anzitutto conoscere gli angoli formati dai vettori di riferimento; poiche' gli elementi della matrice C sono i coseni di tali angoli, servendosi di una tabella delle funzioni goniometriche si puo' scrivere la matrice Γ_1 degli angoli fra i vettori di riferimento (tabella 92).

$$\Gamma_1 \begin{matrix} & A & B' & C \\ A & \begin{bmatrix} 0^\circ & 55\frac{1}{2}^\circ & 90^\circ \\ 55\frac{1}{2}^\circ & 0^\circ & 90^\circ \\ 90^\circ & 90^\circ & 0^\circ \end{bmatrix} \\ B' & \\ C & \end{matrix}$$

Tabella 92.

*nel caso
quasi coincide
l'angolo, poiche'
si parte da
una struttura*

ortogonale in talche l'angolo

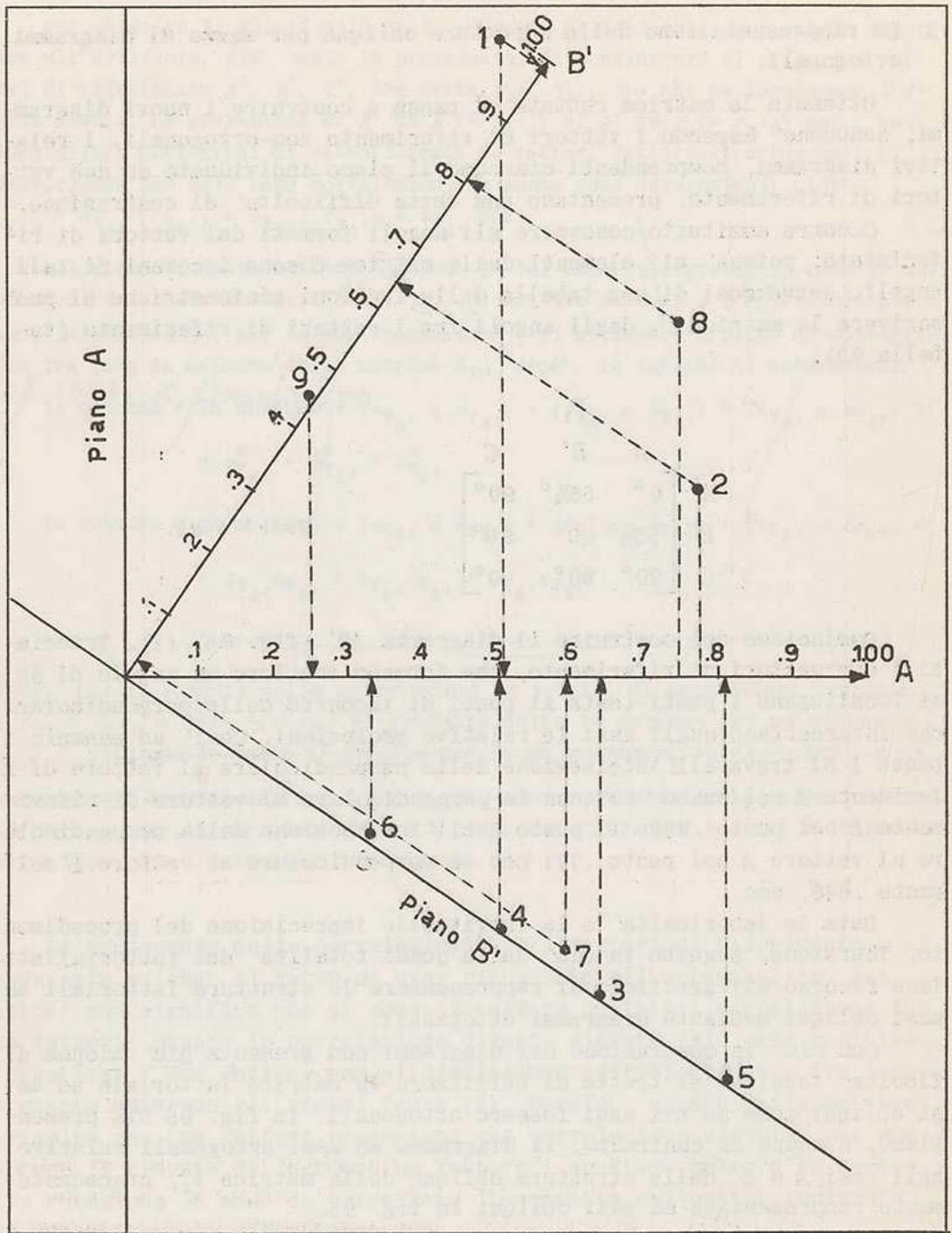
Cominciamo col costruire il diagramma AB' (fig. 95) (1). Tracciat i due vettori di riferimento, che formano fra loro un angolo di $55,5^\circ$ si localizzano i punti-tests ai punti di incontro delle perpendicolari che intercettano sugli assi le relative proiezioni. Così ad esempio il punto 1 si trova all'intersezione della perpendicolare al vettore di riferimento A nel punto .507 con la perpendicolare al vettore di riferimento B' nel punto .988; il punto 2 all'intersezione della perpendicolare al vettore A nel punto .771 con la perpendicolare al vettore B' nel punto .640, ecc.

Data la laboriosita' e la inevitabile imprecisione del procedimento, Thurstone, seguito in cio' dalla quasi totalita' dei fattorialisti, fece ricorso all'artificio di rappresentare le strutture fattoriali ad assi obliqui mediante diagrammi ortogonali.

Con cio' la costruzione dei diagrammi non presenta piu' alcuna difficolta' tecnica: si tratta di utilizzare la matrice fattoriale ad assi obliqui come se gli assi fossero ortogonali. In fig. 95 bis presentiamo, a scopo di confronto, il diagramma ad assi ortogonali relativo agli assi A e B' della struttura obliqua della matrice V_1 , precedentemente rappresentato ad assi obliqui in fig. 95.

(1) In generale, la ricostruzione del diagramma su cui e' stata operata la rotazione e' inutile e non viene compiuta. In questo caso pero' la rotazione di B ha portato a scambiare fra loro i vettori fattoriali, per cui, procedendo in senso antiorario si ha un angolo acuto $B'A$ anziche' AB' . Conviene quindi ricostruire il diagramma, rovesciando la struttura (e naturalmente anche la configurazione dei tests). La ricostruzione del diagramma serve ad esemplificare la procedura di costruzione dei diagrammi obliqui.

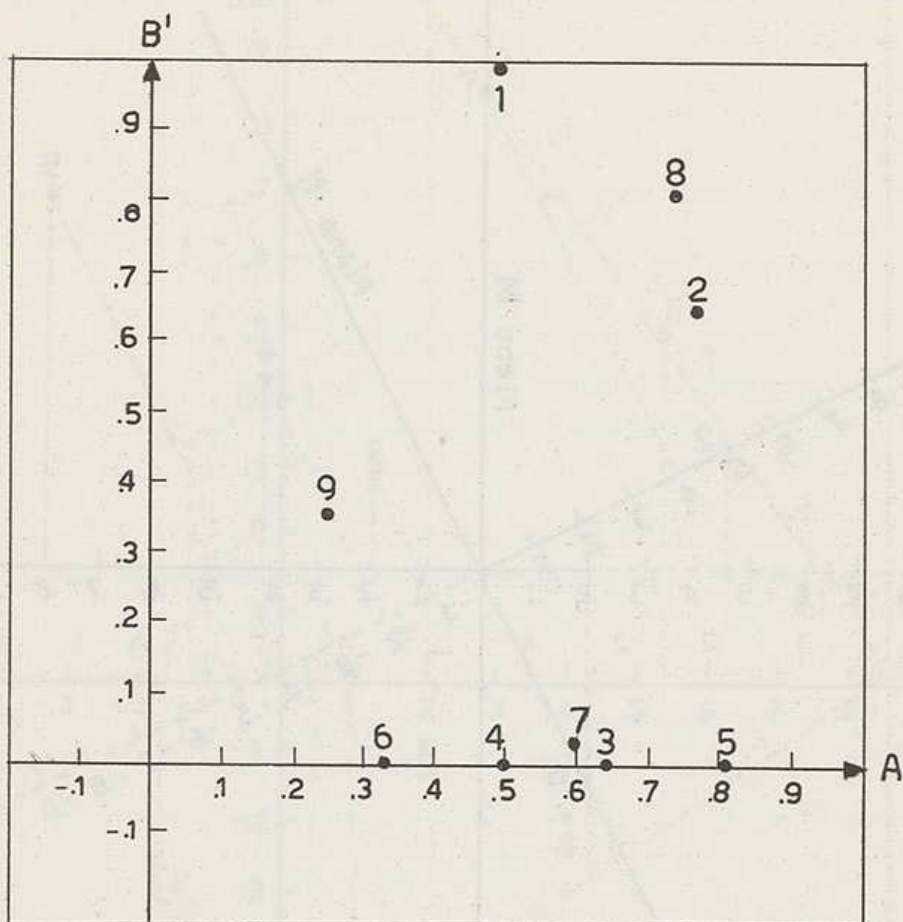
in relazione i fattori obliqui con i fattori ortogonali di partenza



$$r_{AB'} = .568$$

Fig. 95.

Rotazione obliqua - Diagramma 1 bis.



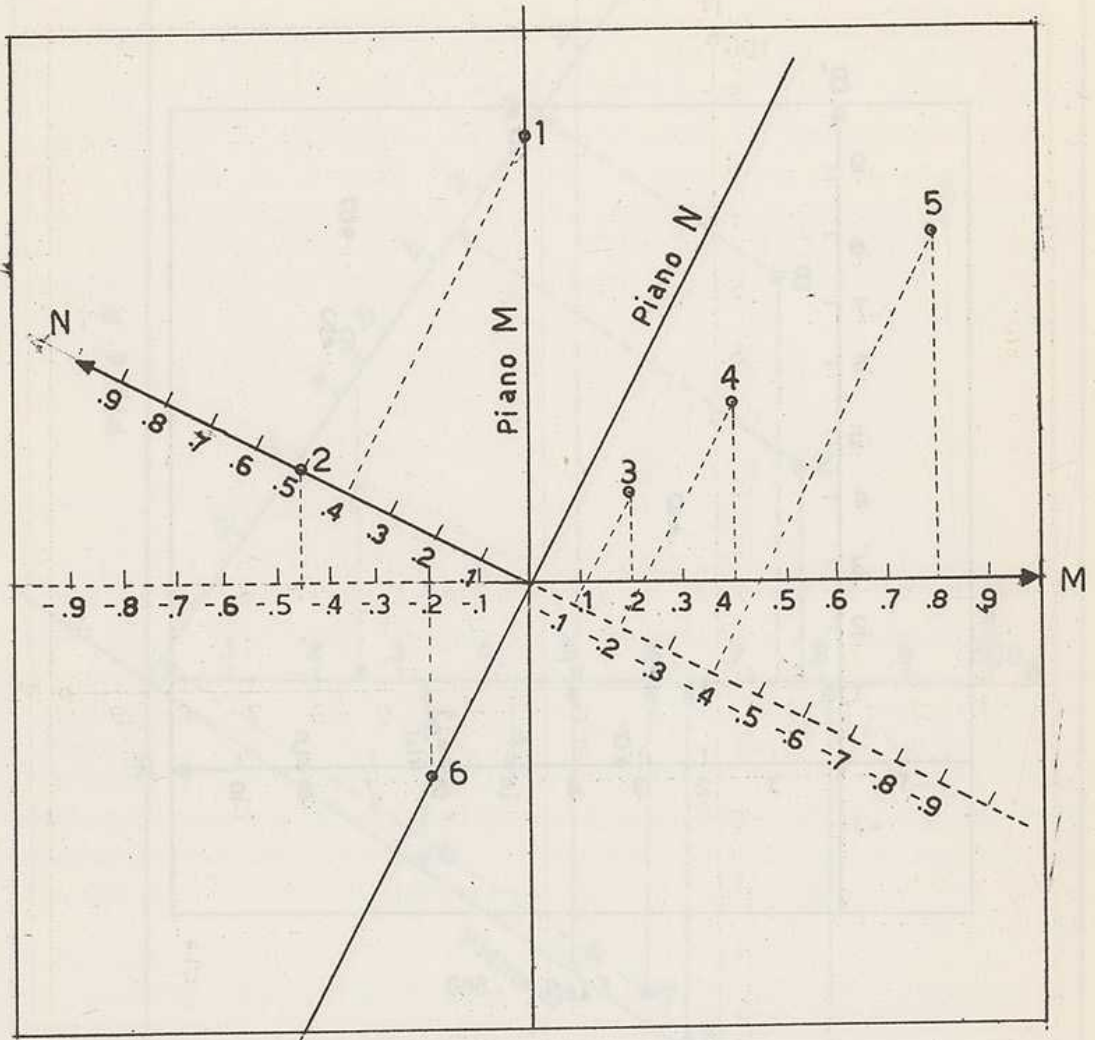
$$r_{AB'} = .568$$

Fig. 95 bis.

Rotazione obliqua - Diagramma 1 ter.

E' evidente che l'adozione di quest'artificio determina una deformazione della struttura, deformazione tanto piu' cospicua quanto maggiore e' l'obliquita' degli assi. E' opportuno quindi lasciare momentaneamente da parte il problema che stiamo trattando e fermarci ad esaminare un esempio di estrema obliquita' per vedere quali caratteristiche della struttura ad assi obliqui si conservano nel diagramma ortogonale.

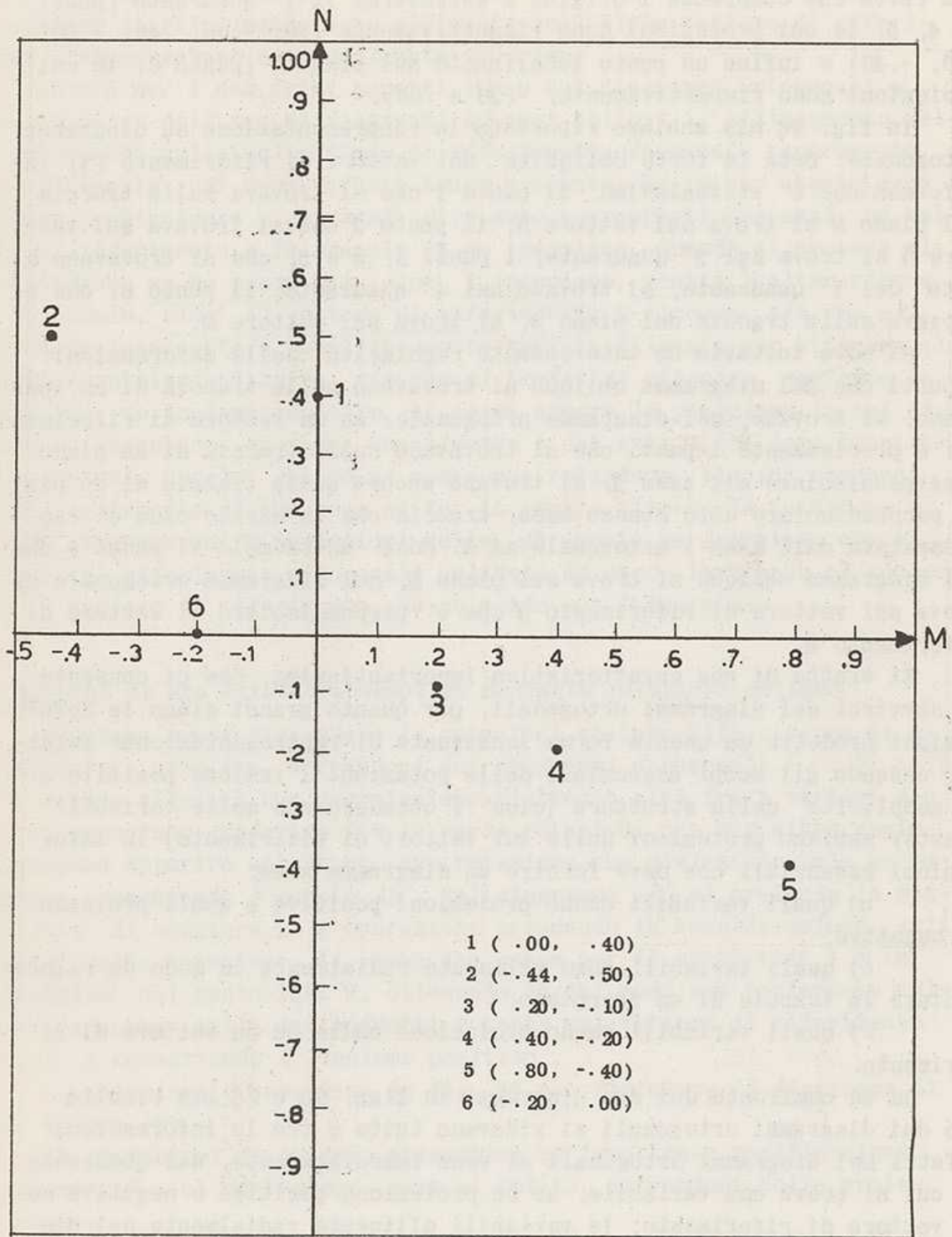
In fig. 96 i due vettori di riferimento M e N formano un angolo di 152° , che corrisponde ad una correlazione di $-.88$; sono stati presi in considerazione sei punti, uno sul piano M (punto 1, le cui proiezioni



$\hat{MN} = 152^\circ$
 $r_{MN} = -.88$

- 1 (.00, .40)
- 2 (-.44, .50)
- 3 (.20, -.10)
- 4 (.40, -.20)
- 5 (.80, -.40)
- 6 (-.20, .00)

Fig. 96.



$r_{MN} = -.88$

Fig. 96 bis.

sui vettori di riferimento M e N sono rispettivamente .00 e .40), uno sul vettore N (punto 2, proiezioni -.44, .50), tre punti allineati su una retta che comprende l'origine e attraversa il 1° quadrante (punti 3, 4, 5, le cui proiezioni sono rispettivamente .20, -.10; .40, -.20; .80, -.40) e infine un punto localizzato sul piano N (punto 6, le cui proiezioni sono rispettivamente, -.20 e .00).

In fig. 96 bis abbiamo riportato la rappresentazione su diagramma ortogonale. Data la forte obliquità dei vettori di riferimento (1) la deformazione è vistosissima: il punto 1 che si trovava sulla traccia del piano M si trova sul vettore N ; il punto 2 che si trovava sul vettore N si trova nel 2° quadrante; i punti 3, 4 e 5, che si trovavano a metà del 1° quadrante, si trovano nel 4° quadrante; il punto 6, che si trovava sulla traccia del piano N , si trova sul vettore M .

Si nota tuttavia un'interessante regolarità nelle deformazioni: i punti che nel diagramma obliquo si trovavano sulla traccia di un iperpiano, si trovano, nel diagramma ortogonale, su un vettore di riferimento; e precisamente i punti che si trovavano sulla traccia di un piano X perpendicolare all'asse X , si trovano ancora sulla traccia di un piano perpendicolare allo stesso asse, traccia che in questo caso è rappresentata dall'asse Y ortogonale ad X . Così ad esempio il punto 1 che nel diagramma obliquo si trova sul piano M , nel diagramma ortogonale si trova sul vettore di riferimento N che è perpendicolare al vettore di riferimento M .

Si tratta di una caratteristica importantissima, che ci consente di servirci dei diagrammi ortogonali, per quanto grandi siano le deformazioni prodotte da questa forma inadeguata di rappresentazione. Infatti, essendo gli scopi essenziali delle rotazioni l'insieme positivo e la semplicità della struttura [cioè l'ottenere che molte variabili (tests) abbiano proiezioni nulle sui vettori di riferimento] le informazioni essenziali che deve fornire un diagramma sono:

- a) quali variabili danno proiezioni positive e quali proiezioni negative;
- b) quali variabili sono allineate radialmente in modo da rappresentare la traccia di un iperpiano;
- c) quali variabili hanno proiezione nulla su un vettore di riferimento.

Da un confronto dei due diagrammi in figg. 96 e 96 bis risulta che dai diagrammi ortogonali si ricavano tutte e tre le informazioni; infatti nei diagrammi ortogonali si vede immediatamente, dal quadrante in cui si trova una variabile, se ha proiezione positiva o negativa su un vettore di riferimento; le variabili allineate radialmente nel diagramma ad assi obliqui conservano il loro allineamento radiale nel dia-

(1) L'esempio è stato costruito in modo da dare il massimo rilievo alle deformazioni.

*(con molto maggiore evidenza
che nei due diagrammi obliqui)*

gramma ad assi ortogonali (v. le variabili 3, 4, 5 nei due diagrammi); e infine, come si e' detto, le variabili che hanno proiezione nulla su un vettore di riferimento sono allineate sull'altro vettore di riferimento, rappresentato ortogonalmente al primo.

Mentre per i due primi aspetti l'uso dei diagrammi ortogonali e' piu' semplice dell'uso di diagrammi ad assi obliqui, l'allineamento delle proiezioni nulle sul vettore di riferimento ortogonale rappresenta una difficolta'. Si deve infatti tener presente che in uno stesso asse vengono a coincidere e per cosi' dire sono sovrapposti due assi, un vettore di riferimento e la traccia di un iperpiano. Quando si procede alla rotazione se ne muove uno, cioe' l'iperpiano, mentre l'altro rimane al suo posto, cioe' il vettore di riferimento. E siccome, sia che si tratti di intercettare un allineamento radiale di punti per ottenere altrettante proiezioni nulle, sia che si tratti di ottenere, mediante la rotazione, un insieme positivo, si cerca sempre la posizione in cui situare un iperpiano, conviene considerare i due assi nella loro funzione di iperpiani. Percio' quando si opera una rotazione, bisogna rendersi conto esattamente di che cosa si fa: in genere siccome la rotazione si fa per ottenere delle proiezioni nulle, si sposta un iperpiano con il vettore di riferimento ortogonale solidale ad esso, lasciando al suo posto il vettore di riferimento che coincide con l'iperpiano.

4. Ricerca di una struttura semplice mediante rotazioni oblique

Possiamo ormai riprendere le rotazioni oblique alla ricerca di una struttura semplice, servendoci dei diagrammi ortogonali. (Fig. 97 e 98)

Avendo rilevato una correlazione piuttosto alta fra i vettori A e B' , e' opportuno preferire fra le varie rotazioni che per altre ragioni possono apparire opportune, una rotazione che diminuisca tale correlazione, aumentando l'angolo AB' . Nel diagramma AB' si presenta la possibilita' di compiere tale operazione prendendo in considerazione, agli effetti della rotazione, il piano che passa per il punto-test 1 e in prossimita' del punto-test 9, ottenendo in tal modo una proiezione nulla o pressoché nulla dei suddetti 2 tests sul vettore di riferimento A' (1), e conservando l'"insieme positivo".

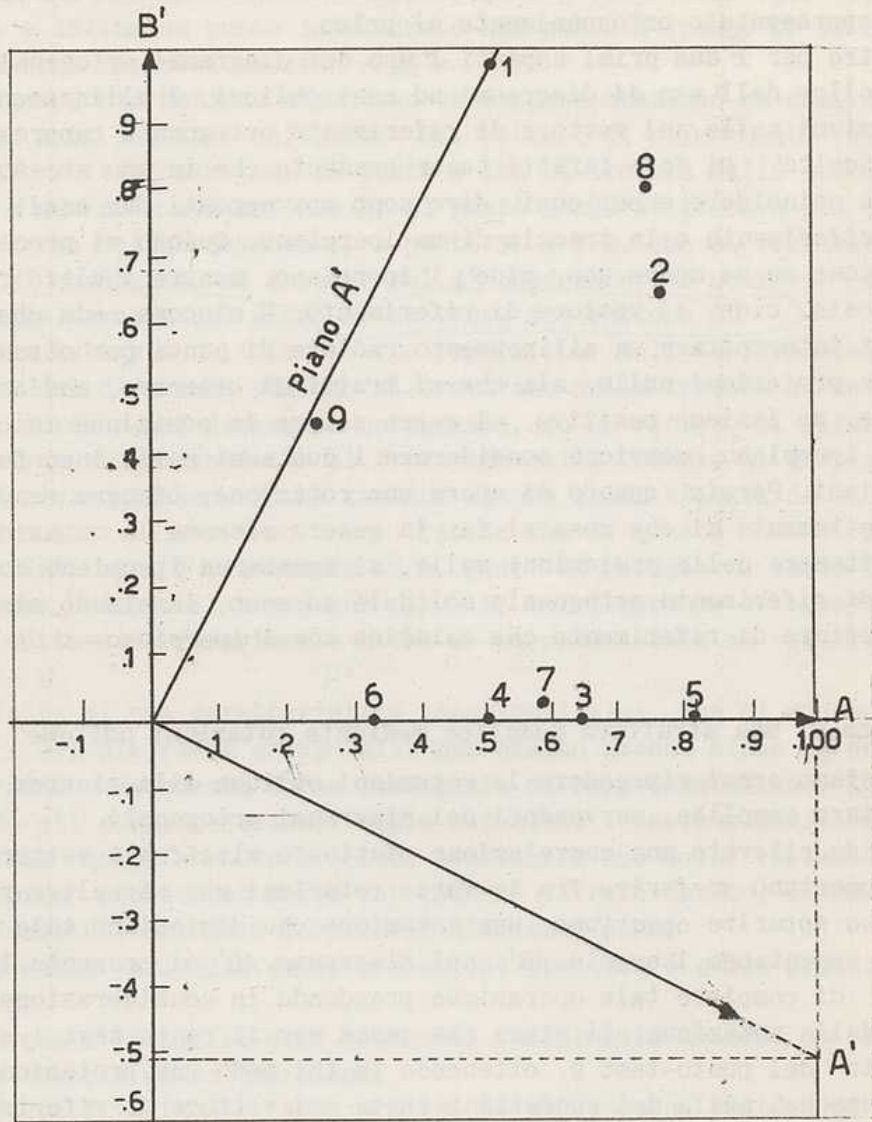
La rotazione e' eseguita in fig. 97 che riproduce il diagramma di fig. 95 bis (2).

Le operazioni di calcolo presentano un'importante modificazione. La matrice S_{12} si costruisce, come al solito, servendosi delle proie-

(1) Come e' stato detto precedentemente, tale rotazione appariva indicata fin dall'inizio e si sarebbe dovuta eseguire insieme alla rotazione del vettore B . Il procedimento adottato qui, di fare due rotazioni successive sullo stesso diagramma e' dovuto soltanto allo scopo di rendere evidenti in un procedimento semplificato gli effetti delle rotazioni.

(2) In fig. 98 e' rappresentato il diagramma $B'C$, mentre il diagramma AC non e' stato riprodotto perche' non essendo stati ruotati ne' A ne' C , e' identico a quello di fig. 93. Ricordiamo che gli angoli AC e $B'C$ sono retti.

fare sempre i diagrammi doppi: Sinistra e poi con rotazione

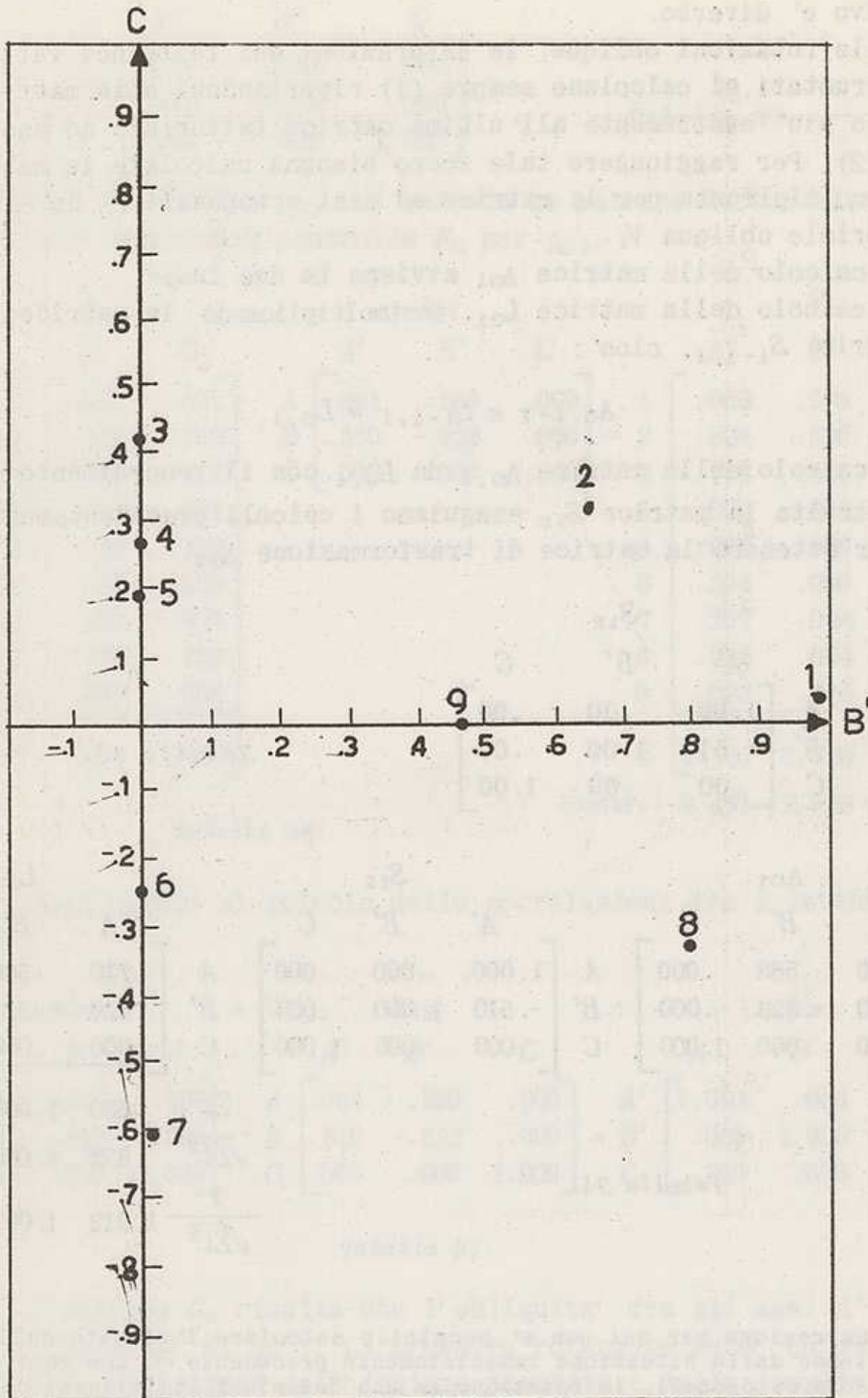


risultato e posto come piano B'

$$r_{AB'} = .568$$

Fig. 97.

Rotazione obliqua - Diagramma 4.



$$r_{B'C} = .00$$

Fig. 98.

rotazione obliqua - Diagramma 5.

zioni dei vettori fattoriali prolungati: le proiezioni del vettore ruotato A' sono 1.00 sul vettore A e -.51 sul vettore B' . Ma il passaggio successivo e' diverso.

Conviene Nelle rotazioni oblique, le saturazioni dei tests nei vettori fattoriali ruotati si calcolano sempre (1) riportandosi alla matrice centroide, o piu' esattamente all'ultima matrice fattoriale ad assi ortogonali (2). Per raggiungere tale scopo bisogna calcolare la matrice Λ_{01} che premoltiplicata per la matrice ad assi ortogonali F_0 da' la matrice fattoriale obliqua V_1 .

Il calcolo della matrice Λ_{01} avviene in due fasi:

a) calcolo della matrice L_{01} , postmultiplicando la matrice $\Lambda_{0,1-1}$ per la matrice $S_{1-1,1}$, cioe' :

$$\Lambda_{0,1-1} \times S_{1-1,1} = L_{0,1}$$

b) calcolo della matrice $\Lambda_{0,1}$ da $L_{0,1}$ con il procedimento consueto.

Costruita la matrice S_{12} eseguiamo i calcoli precedentemente indicati, per ottenere la matrice di trasformazione Λ_{02} .

		S_{12}		
		A'	B'	C
A	[1.00	.00	.00
B'	[-.51	1.00	.00
C	[.00	.00	1.00

Tabella 93.

Λ_{01}			S_{12}			L_{02}				
A	B'	C	A'	B'	C	A'	B'	C		
A	[1.000	.568	.000	.000	A	[.710	.568	.000
B	[.000	-.823	.000	.000	B'	[.420	-.823	.000
C	[.000	.000	1.000	.000	C	[.000	.000	1.000
						Σl^2	.680	1.000	1.000	
						$\sqrt{\Sigma l^2}$.825	1.000	1.000	
						$\frac{1}{\sqrt{\Sigma l^2}}$	1.212	1.000	1.000	

Tabella 94.

(1) La ragione per cui non e' possibile calcolare l'effetto della rotazione partendo dalla situazione immediatamente precedente e' che mentre quando gli assi sono ortogonali, la rotazione in uno dei piani individuati da due assi non modifica l'angolo che essi formano con l'altro asse (gli angoli che essi formano con gli altri assi, se la struttura e' pluridimensionale), cio' non vale per gli assi obliqui. Infatti ruotando un asse obliquo si modifica non solo l'angolo che esso forma con l'asse che e' nel piano in cui avviene la rotazione, ma anche gli angoli che esso forma con l'altro o con gli altri assi.

(2) Infatti talvolta si inizia con una serie di rotazioni ortogonali e si abbandona l'ortogonalita' solo quando tale condizione risulta ostacolare il raggiungimento della struttura semplice.

$$\begin{matrix} & & \Delta_{02} \\ & & \begin{matrix} A' & B' & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} .861 & .568 & .000 \\ .510 & -.823 & .000 \\ .000 & .000 & 1.000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Tabella 95.

Ottenuta la matrice Δ_{02} , si calcola la matrice fattoriale V_2 , post-moltiplicando la matrice centroide F_0 per Δ_{02} .

F_0			Δ_{02}			V_2					
A	B	C	A'	B'	C	A'	B'	C			
1	.507	-.850	.031	A	.861	.568	.000	1	.003	.988	.031
2	.771	-.246	.310	B	.510	-.823	.000	2	.539	.640	.310
3	.638	.434	.417	C	.000	.000	1.000	3	.771	.005	.417
4	.504	.344	.261					4	.609	.003	.261
5	.809	.548	.192					5	.976	.009	.192
6	.329	.217	-.252					6	.394	.008	-.252
7	.595	.381	-.617					7	.707	.024	-.617
8	.746	-.462	-.329					8	.406	.804	-.329
9	.249	-.369	-.008					9	.026	.445	-.008
Σ	5.148	-.003	.005					Σ	4.431	2.926	.005
								Contr.	4.431	2.926	.005

Tabella 96.

Si passa quindi al calcolo delle correlazioni fra i vettori di riferimento.

$$\begin{matrix} & \Delta'_{02} & & \Delta_{02} & & C_2 \\ & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} & & \begin{matrix} A' & B' & C \end{matrix} & & \begin{matrix} A' & B' & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A' \\ B' \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} .861 & .510 & .000 \\ .568 & -.823 & .000 \\ .000 & .000 & 1.000 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} .861 & .568 & .000 \\ .510 & -.823 & .000 \\ .000 & .000 & 1.000 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1.001 & .069 & .000 \\ .069 & 1.000 & .000 \\ .000 & .000 & 1.000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Tabella 97.

Dalla matrice C_2 risulta che l'obliquita' fra gli assi A' e B' e' minima (l'angolo e' di 86°). La prossima rotazione sara' quindi guidata soltanto dagli obiettivi dell'insieme positivo e dalla semplicita' della struttura risultante.

Ogni fase del procedimento di rotazione nella ricerca di una struttura semplice consta dunque delle seguenti operazioni: a) rotazione, b) calcolo delle nuove saturazioni e delle correlazioni fra i vettori di riferimento, c) costruzione dei nuovi diagrammi.

A questo punto e' utile tracciare la strada percorsa attraverso al susseguirsi delle strutture.

Cronologia delle strutture

I struttura (ortogonale) ABC

1. $\overline{AB} \rightarrow \overline{AB'}$
2. AC
3. BC

II struttura (obliqua) $AB'C$

- 2 bis. $AC \perp$ (1)
4. $AB' \angle 55^\circ, 5$ ($r_{AB'} = .568$)
Punti 3, 4, 5, 6, 7 sul piano B'
 $\overline{AB'} \rightarrow \overline{A'B'}$
5. $B'C \perp$
Punti 3, 4, 5, 6, 7 sul piano B'
Punti 9, [1] sul piano C

III struttura (obliqua) $A'B'C$

6. $A'B'$ ($r_{A'B'} = .069$)
Punti 3, 4, 5, 6, 7 sul piano B'
Punti 1, [9] sul piano A'
7. $A'C \perp$
Punto 1 sul piano A' vicino all'origine
Punto 9 sul piano C vicino all'origine
3 proiezioni negative su C
 $A'C \rightarrow A'C'$

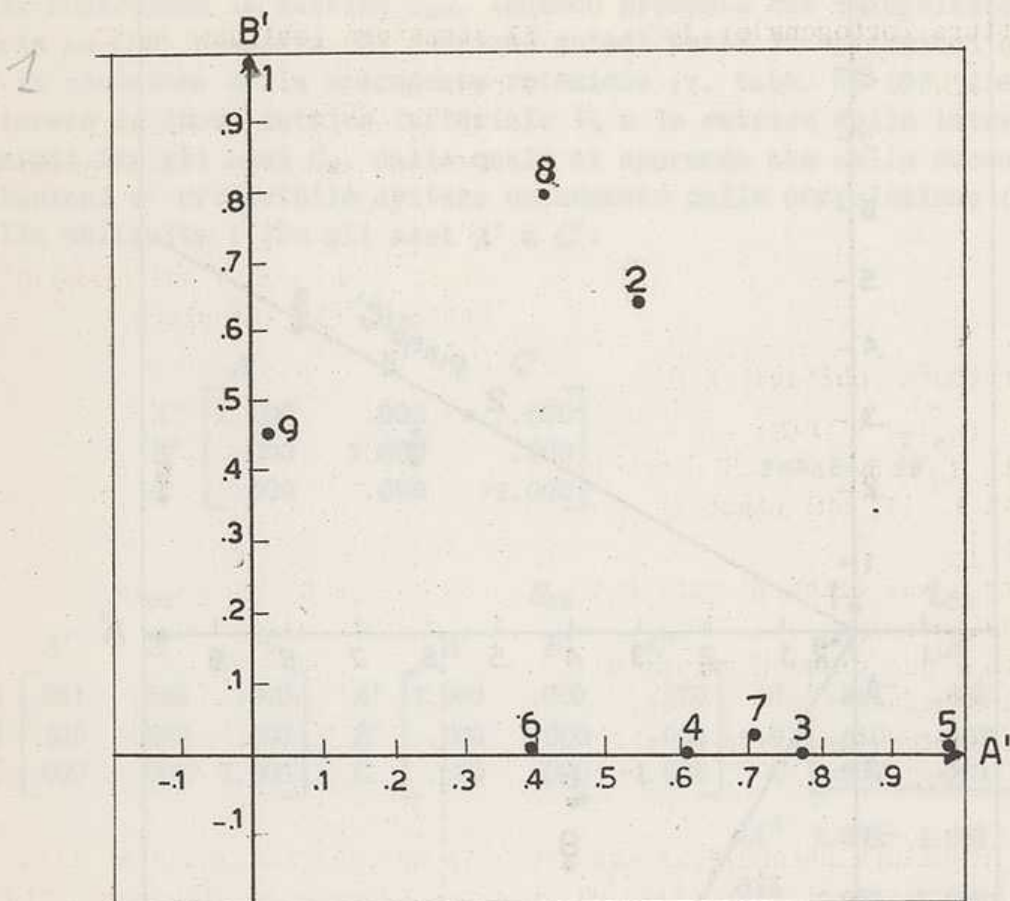
La struttura ottenuta in seguito alla seconda rotazione e' illustrata dai diagrammi $A'B'$ (fig. 99, che rappresenta in diagramma ortogonale il risultato della rotazione del vettore di riferimento A nel piano AB' , gia' rilevabile in fig. 97) (2), $A'C$ (fig. 100) e $B'C$ (fig. 98) (3). Nel piano $A'B'$ con le due precedenti rotazioni si e' gia' realizzato quanto era possibile per avvicinarsi alla struttura semplice. Il diagramma $A'C$ offre la possibilita' di ottenere tre proiezioni pres-

(1) Essendo la struttura tridimensionale, ruotando un asse per volta, la rotazione produce il suo effetto sui due diagrammi che contengono l'asse ruotato. Il terzo diagramma rimane invariato e percio' d'ora innanzi non sara' piu' preso in considerazione.

Sono segnati in parentesi quadra [] quei vettori-tests che si trovano in prossimita' di un (iper)piano, ed hanno quindi una proiezione trascurabile sul vettore di riferimento perpendicolare al piano.

(2) E' consigliabile compiere un controllo, per quanto grossolano, confrontando il diagramma ortogonale costruito in base alle nuove saturazioni, con il diagramma in cui e' stata eseguita la rotazione. Così' ad esempio vediamo che i punti-tests 3, 4, 5, 6, 7 che in fig. 97 si trovavano sul piano B' (rappresentato dal vettore A') si trovano sul piano B' anche nel diagramma di fig. 99; e il punto 1 che in seguito alla rotazione era venuto a trovarsi sul piano A' , e il punto 9 che era venuto a trovarsi in prossimita' del piano A' , si ritrovano, il primo sul piano A' e il secondo in prossimita' di quel piano, nel diagramma di fig. 99, in cui il piano A' e' rappresentato dal vettore B' .

(3) Il diagramma $B'C$ non ha subito alcuna modificazione poiche' e' stato ruotato soltanto il vettore A .

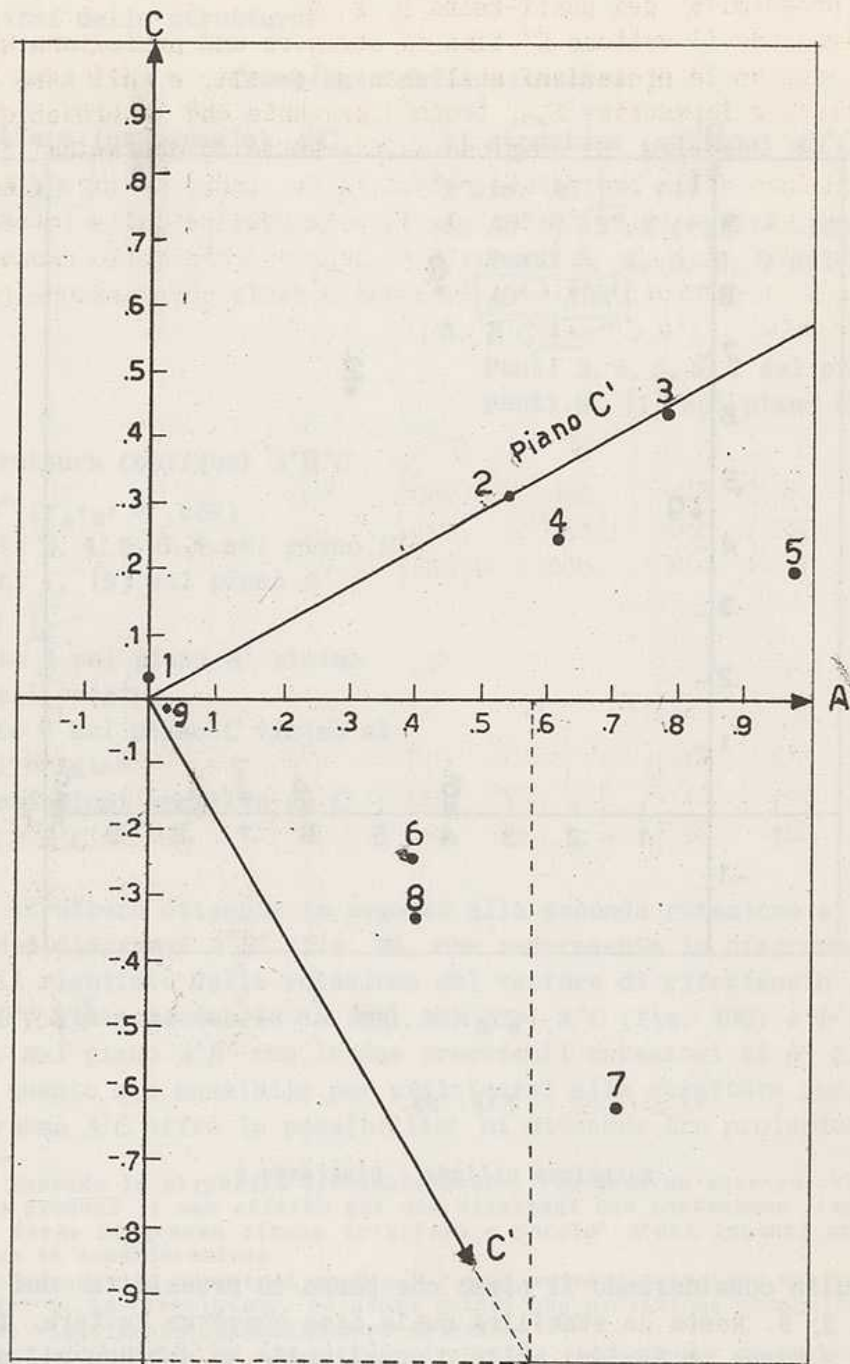


$r_{A'B'} = .069$ (assi quasi ortogonali)

Fig. 99.

Rotazione obliqua - Diagramma 6.

soche' nulle considerando il piano che passa in prossimita' dei punti-tests 3, 2, 9. Resta da stabilire quale asse convenga ruotare. I punti-tests 1, 9 hanno proiezioni nulle o quasi nulle su ambedue gli assi, ed essendo tali proiezioni in immediata vicinanza dell'origine degli assi, non vengono modificate in maniera apprezzabile dalla rotazione. Quindi, da questo punto di vista, la scelta e' indifferente. Ma siccome ruotando il vettore C si ottiene anche il vantaggio di eliminare le proiezioni negative dei punti-tests 6, 7, 8 (mentre cio' non avverrebbe ruotando l'asse A) si decide di ruotare l'asse C, denominando C' il piano che



$r_{A'C} = .00$

Fig. 100.

Rotazione obliqua - Diagramma 7.

passa in prossimita' dei punti-tests 2, 3, 9.

Prolungando il vettore C' fino ad ottenere una proiezione unitaria su C , si leggono le proiezioni sull'asse A' (+.57), e sull'asse C (-1.00) e si costruisce la matrice S_{23} , tenendo presente che la proiezione unitaria su C e' negativa. Si compiono quindi tutte le operazioni compiute in occasione della precedente rotazione (v. tabb. 98-103, fino ad ottenere la nuova matrice fattoriale V_3 e la matrice delle intercorrelazioni fra gli assi C_3 , dalla quale si apprende che nelle successive rotazioni e' preferibile evitare un aumento della correlazione (cioe' della obliquita') fra gli assi A' e C' .

$$S_{23} \begin{matrix} & A' & B' & C' \\ \begin{matrix} A' \\ B' \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.000 & .000 & .570 \\ .000 & 1.000 & .000 \\ .000 & .000 & -1.000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Tabella 98.

$$\begin{matrix} \Lambda_{02} & & S_{23} & & L_{03} \\ \begin{matrix} A' & B' & C \\ A & B & C \end{matrix} & \begin{bmatrix} .861 & .568 & .000 \\ .510 & -.823 & .000 \\ .000 & .000 & 1.000 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A' & B' & C' \\ A & B & C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.000 & .000 & .570 \\ .000 & 1.000 & .000 \\ .000 & .000 & -1.000 \end{bmatrix} & = & \begin{matrix} A & B' & C' \\ A & B & C \end{matrix} & \begin{bmatrix} .861 & .568 & .491 \\ .510 & -.823 & .291 \\ .000 & .000 & -1.000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \Sigma l^2 & 1.001 & 1.000 & 1.326 \\ \sqrt{\Sigma l^2} & 1.001 & 1.000 & 1.152 \\ \frac{1}{\sqrt{\Sigma l^2}} & .999 & 1.000 & .868 \end{matrix}$$

Tabella 99.

$$\Lambda_{03} \begin{matrix} & A' & B' & C' \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} .860 & .568 & .426 \\ .510 & -.823 & .253 \\ .000 & .000 & -.868 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Tabella 100.

F_0			Δ_{03}			V_3					
A	B	C	A'	B'	C'	A'	B'	C'			
1	.507	-.850	.031	A	.850	.568	.426	1	.002	.988	-.026
2	.771	-.246	.310	B	.510	-.823	.253	= 2	.538	.640	-.003
3	.638	.434	.417	C	.000	.000	-.868	3	.770	.005	.020
4	.504	.344	.261					4	.609	.003	.075
5	.809	.548	.192					5	.975	.009	.316
6	.329	.217	-.252					6	.394	.008	.414
7	.595	.381	-.617					7	.706	.024	.885
8	.746	-.462	-.329					8	.406	.804	.486
9	.249	-.369	-.008					9	.026	.445	.020
Σ	5.148	-.003	.005					Σ	4.426	2.926	2.187
						Contr.			4.426	2.926	2.188

Tabella 101

Δ'_{03}			Δ_{03}			C_3					
A	B	C	A'	B'	C'	A'	B'	C'			
A'	.860	.510	.000	A	.860	.568	.426	A'	1.000	.068	.495
B'	.568	-.823	.000	B	.510	-.823	.253	= B'	.068	1.000	.034
C'	.426	.253	-.868	C	.000	.000	-.868	C'	.495	.034	.999

Tabella 102

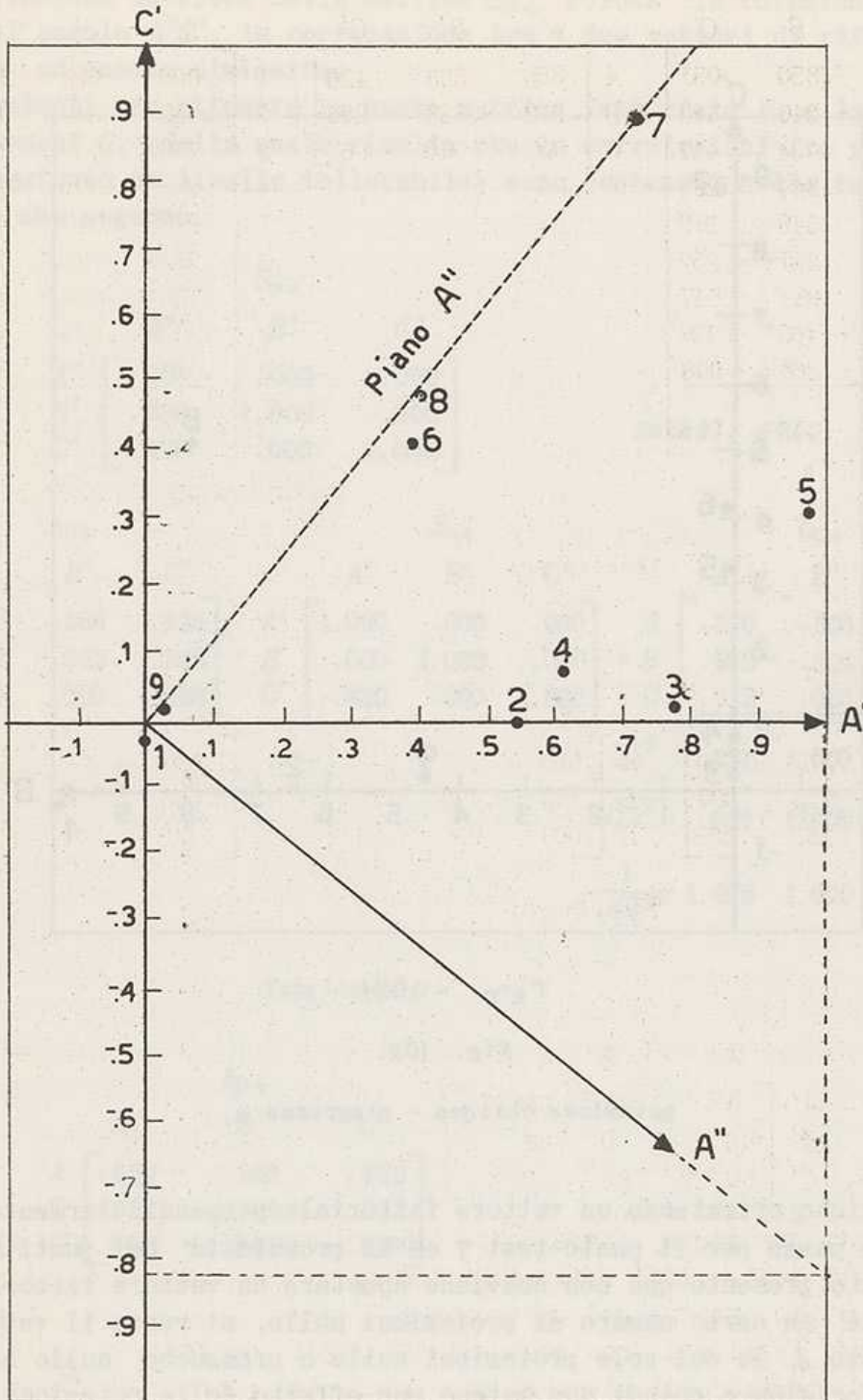
Γ		
A'	B'	C'
A'	0°	86° 60'20"
B'	86°	0° 88°
C'	60°20'	88° 0°

Tabella 103.

La nuova struttura, conseguente alla rotazione, appare nei diagrammi $A'C'$ (fig. 101) e $B'C'$ (fig. 102) mentre il diagramma $A'B'$ (fig. 99) rimane invariato. Mentre nel diagramma $B'C'$ (fig. 102) la struttura semplice e' gia' raggiunta (resterebbe tutt' al piu' da fare un minimo aggiustamento, portando il piano B' piu' vicino al punto 7 e quindi facendo eseguire una rotazione minima in senso orario al vettore B') nel diagramma $A'C'$ (fig. 101) (1) si presenta l'opportunita' (2) di eseguire

(1) Si notera' che il diagramma e' capovolto rispetto al diagramma $A'C$ (fig. 100). Cio' dipende dal fatto che nel diagramma $A'C$ il vettore di riferimento C e' stato ruotato di poco meno di 180°.

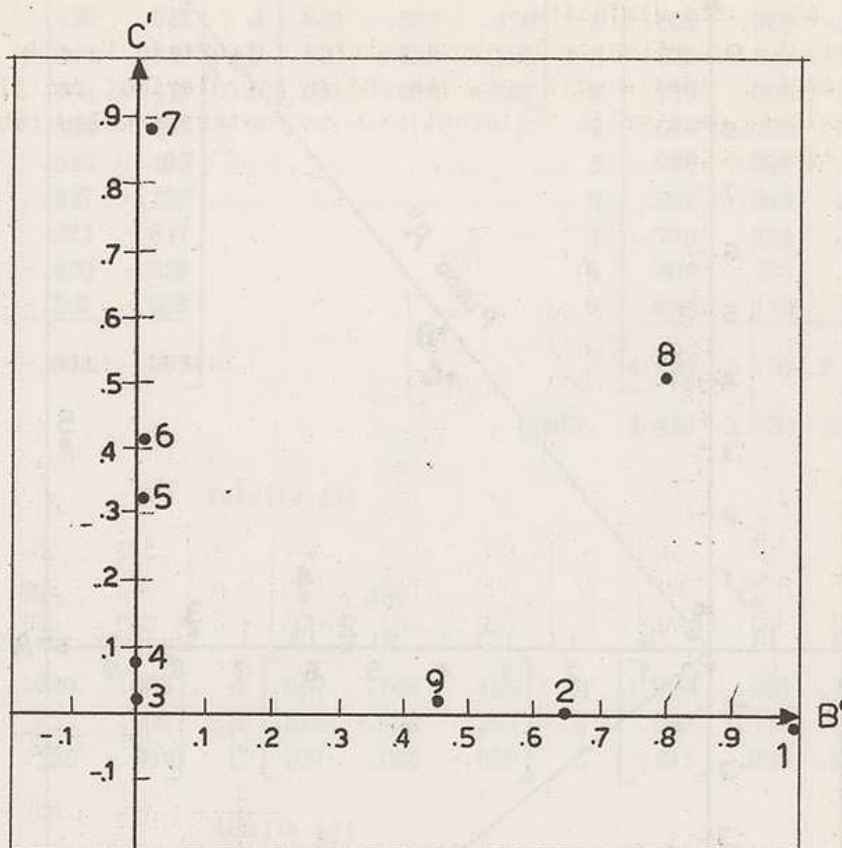
(2) Opportunita' che del resto era gia' evidente nel precedente diagramma $A'C$, e non era stata sfruttata per evitare di complicare il quadro, eseguendo due rotazioni ad un tempo.



$r_{A'C'} = .495$

Fig. 101.

Rotazione obliqua - diagramma 8.
 IV Rotazione → IV Struttura obliqua



$$r_{B'C'} = .034$$

Fig. 102.

Rotazione obliqua - Diagramma 9.

una rotazione orientando un vettore fattoriale perpendicolarmente al piano che passa per il punto-test 7 ed in prossimità dei punti 8, 9, 1.

Tenuto presente che non conviene spostare un vettore fattoriale che ha già un certo numero di proiezioni nulle, si ruota il vettore di riferimento A , le cui sole proiezioni nulle o pressoché nulle sono vicine all'origine e quindi non mutano per effetto della rotazione (1).

(1) È utile rilevare che le rotazioni si possono compiere correttamente solo quando si è riusciti a liberarsi dalle impressioni erronee suggerite dai diagrammi ortogonali. Così ad esempio in fig. 101 i punti 2 e 3, pur comparso sul vettore A' o in immediata prossimità di esso, non sono sul vettore A' . Il diagramma ci dice soltanto che i suddetti punti sono sul piano perpendicolare al vettore C' e quindi hanno proiezione nulla su C' . Possiamo quin-

Le proiezioni del vettore A'' , prolungato, su A' (1.000) e su C' (-.820) vengono iscritte nella matrice S_{34} . Poiche' la rotazione ha aumentato l'angolo $A'C'$, la correlazione tra i due vettori di riferimento verra' ad essere diminuita.

I calcoli per ottenere la nuova matrice fattoriale V_4 e la matrice dei coseni C_4 (dalla quale risulta che le correlazioni fra gli assi hanno raggiunto un livello tollerabile) sono contenuti nelle tabelle 104-108 che seguono.

$$\begin{array}{c}
 S_{34} \\
 \begin{array}{ccc}
 & A'' & B' & C' \\
 A' & \left[\begin{array}{ccc} 1.000 & .000 & .000 \end{array} \right. \\
 B' & \left[\begin{array}{ccc} .000 & 1.000 & .000 \end{array} \right. \\
 C' & \left[\begin{array}{ccc} -.820 & .000 & 1.000 \end{array} \right.
 \end{array}
 \end{array}$$

Tabella 104.

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta_{03} & S_{34} & L_{04} \\
 \begin{array}{ccc}
 A' & B' & C' \\
 A \left[\begin{array}{ccc} .860 & .568 & .426 \end{array} \right. \\
 B \left[\begin{array}{ccc} .510 & -.823 & .253 \end{array} \right. \\
 C \left[\begin{array}{ccc} .000 & .000 & -.868 \end{array} \right.
 \end{array} & \cdot \begin{array}{ccc}
 A'' & B' & C' \\
 A' \left[\begin{array}{ccc} 1.000 & .000 & .000 \end{array} \right. \\
 B' \left[\begin{array}{ccc} .000 & 1.000 & .000 \end{array} \right. \\
 C' \left[\begin{array}{ccc} -.820 & .000 & 1.000 \end{array} \right.
 \end{array} & = \begin{array}{ccc}
 A'' & B' & C' \\
 A \left[\begin{array}{ccc} .510 & .568 & .426 \end{array} \right. \\
 B \left[\begin{array}{ccc} .303 & -.823 & .253 \end{array} \right. \\
 C \left[\begin{array}{ccc} .712 & .000 & -.868 \end{array} \right.
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma l^2 & .859 & 1.000 & .999 \\
 \sqrt{\Sigma l^2} & .927 & 1.000 & .999 \\
 \frac{1}{\sqrt{\Sigma l^2}} & 1.079 & 1.000 & 1.001
 \end{array}$$

Tabella 105.

$$\begin{array}{c}
 \Delta_{04} \\
 \begin{array}{ccc}
 A'' & B' & C' \\
 A \left[\begin{array}{ccc} .550 & .568 & .426 \end{array} \right. \\
 B \left[\begin{array}{ccc} .327 & -.823 & .253 \end{array} \right. \\
 C \left[\begin{array}{ccc} .768 & .000 & -.869 \end{array} \right.
 \end{array}
 \end{array}$$

Tabella 106.

di ruotare A' senza danno, mentre se ruotiamo C' facciamo un passo indietro rispetto alla struttura semplice. Nei diagrammi ortogonali che rappresentano strutture oblique ogni vettore di riferimento risulta artificialmente sovrapposto all'iperpiano dell'altro vettore, e solo sotto quest'ultimo aspetto, in quanto iperpiano, fornisce informazioni attendibili.

F_0			Δ_{04}			V_4					
	A	B	C		A''	B'	C'		A''	B'	C'
1	.507	-.850	.031	A	.550	.568	.426	1	.025	.988	-.026
2	.771	-.246	.310	B	.327	-.823	.253	2	.582	.640	-.004
3	.638	.434	.417	C	.768	.000	-.869	3	.813	.005	.020
4	.504	.344	.261					4	.590	.003	.075
5	.809	.548	.192					5	.772	.009	.316
6	.329	.217	-.252					6	.058	.008	.414
7	.595	.381	-.617					7	-.022	.024	.886
8	.746	-.462	-.329					8	.006	.804	.487
9	.249	-.369	-.008					9	.010	.445	.020
Σ	5.148	-.003	.005					Σ	2.834	2.926	2.188
								Contr.	2.834	2.926	2.188

Tabella 107.

Δ'_{04}			Δ_{04}			Φ_4					
	A	B	C		A''	B'	C'		A''	B'	C'
A''	.550	.327	.768	A	.550	.568	.426	A''	.999	.043	-.350
B'	.568	-.823	.000	B	.327	-.823	.253	B'	.043	1.000	.034
C'	.426	.253	-.869	C	.768	.000	-.869	C'	-.350	.034	1.001

Tabella 108.

La nuova struttura raggiunta in seguito alla rotazione e' rappresentata dai diagrammi $A''B'$ (fig. 103), $A''C'$ (fig. 104) e $B'C'$ (fig. 105, rimasta invariata) ed e' una struttura semplice. Considerando infatti nulle le proiezioni inferiori a $\pm 0,3$, la struttura fattoriale viene a corrispondere allo schema di tab.109, cioe' nessun test e' saturato da tutti e tre i fattori, nessun fattore satura tutti i tests e per ogni coppia di fattori ci sono alcuni tests con saturazione zero in un fattore e saturazione significativa nell' altro.

	A''	B'	C'
1	0	X	0
2	X	X	0
3	X	0	0
4	X	0	X
5	X	0	X
6	X	0	X
7	0	0	X
8	0	X	X
9	0	X	0

Tabella 109.

La prosecuzione della Cronologia delle strutture indica il cammino percorso a partire dalla III struttura.

IV struttura (obliqua) $A'B'C'$

V struttura (obliqua) $A''B'C'$

8. $A'C' \sphericalangle 60^{\circ}20'$ ($r_{A'C'} = .495$)
Punti 1, [9] sul piano A'
Punti 2, [3], [9] sul piano C'
($A'C' \rightarrow A''C'$)
9. $B'C' \sphericalangle 88^{\circ}$ ($r_{B'C'} = .034$)
Punti 2, [3], [9] sul piano C'
Punti 3, 4, 5, 6, [7] sul piano B'
10. $A''B' \sphericalangle 88^{\circ}$ ($r_{A''B'} = .043$)
Punti [7], 8, [9], [1] sul piano A''
Punti 3, 4, 5, 6, [7] sul piano B'
($A''B' \rightarrow A'''B'$)
11. $A''C' \sphericalangle 110^{\circ}$ ($r_{A''C'} = -.350$)
Punti [7], 8, [9], [1] sul piano A''
Punti [1], 2, [3], [9] sul piano C'
($A''C' \rightarrow A'''C'$)
12. $B'C'$ (v. 9)
($B'C' \rightarrow B''C''$)
Struttura semplice raggiunta con buona approssimazione. Possibilita' di ulteriori aggiustamenti.

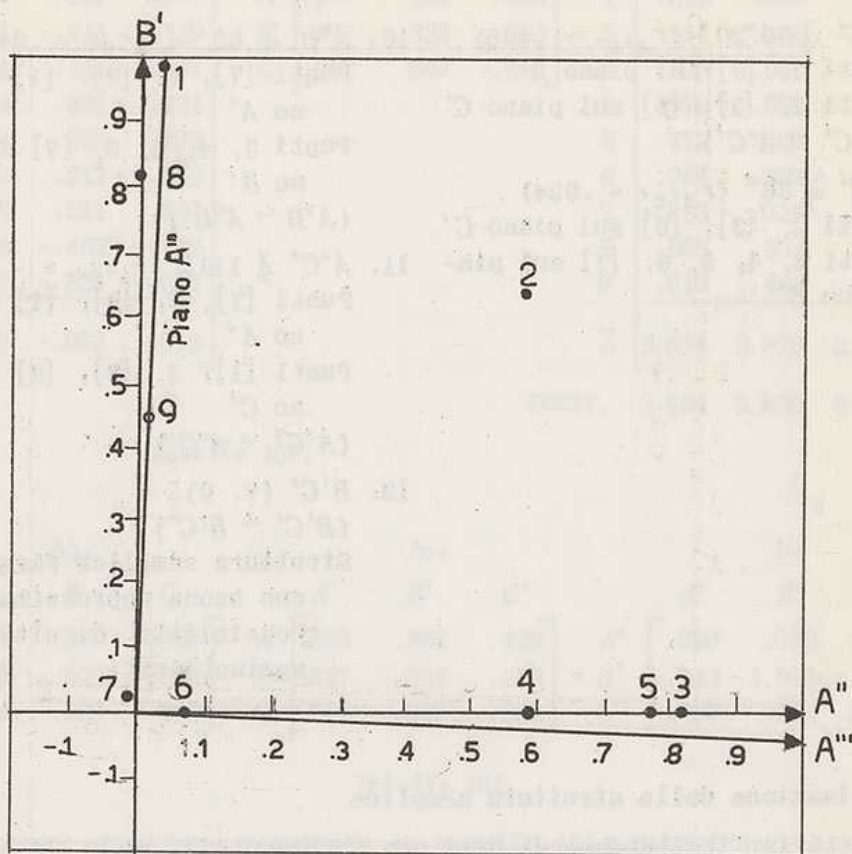
5. Precisazione della struttura semplice

Tuttavia, trattandosi di dati non sperimentali, vi e' la possibilita' di raggiungere la struttura semplice con una precisione ancora maggiore, mediante lievi aggiustamenti della posizione degli assi. A questo punto, trattandosi di spostamenti minimi possiamo ruotare contemporaneamente piu' di un asse.

Nel diagramma $A''B'$ (fig. 103) vediamo che vi e' la possibilita' di avvicinare maggiormente a zero le proiezioni dei punti 1 e 9 sul vettore A (1), senza per questo allontanare sensibilmente da zero la proiezione del punto 8. Consideriamo quindi il piano che passa per i punti 1 e 9 e ruotiamo il vettore di riferimento A'' normalmente a tale piano. Le proiezioni del vettore ruotato A''' , 1.000 su A'' e $-.026$ su B' , vengono registrate nella matrice S_{45} .

Nel diagramma $A''C'$ (fig. 104) si offre l'opportunita' di migliorare approssimandola ulteriormente a zero, la proiezione leggermente negativa del punto-test 7 sul vettore fattoriale A , senza per questo al-

(1) Il punto 1 si trovava sul piano A' (fig. 101) e se ne e' allontanato per effetto della rotazione; tale svantaggio e' pero' abbondantemente compensato in quanto il piano A'' comprende ora anche i punti 7 e 8.

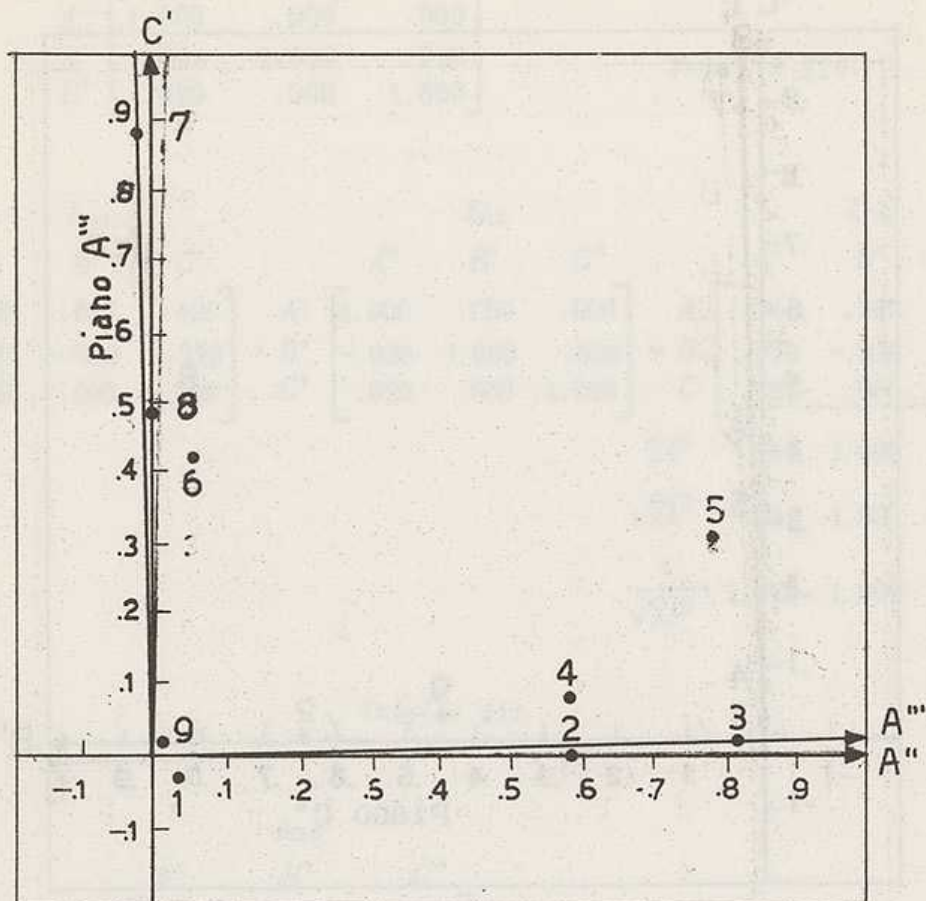


$$r_{A''B'} = .043$$

Fig. 103

Rotazione obliqua - Diagramma 10.

lontanare sensibilmente da 0 la proiezione del punto-test 8, che essendo più vicino all'origine sente meno l'influenza di una rotazione. Si hanno dunque due diverse indicazioni per una rotazione di A, su due diversi piani (la prima si riferiva al piano $A''B'$ e quest'ultima al piano $A''C'$). In generale non è consigliabile operare contemporaneamente la rotazione di uno stesso asse su due diversi piani, a meno che non si tratti di spostamenti minimi. Trattandosi, in effetti, di spostamenti minimi, operiamo la rotazione anche sul piano $A''C'$, ruotando A'' in senso antiorario, normalmente al piano che passa tra i punti-test 8 e 7, in immediata vicinanza di quest'ultimo. Le proiezioni del vettore ruo-



$$r_{A''C'} = -.350$$

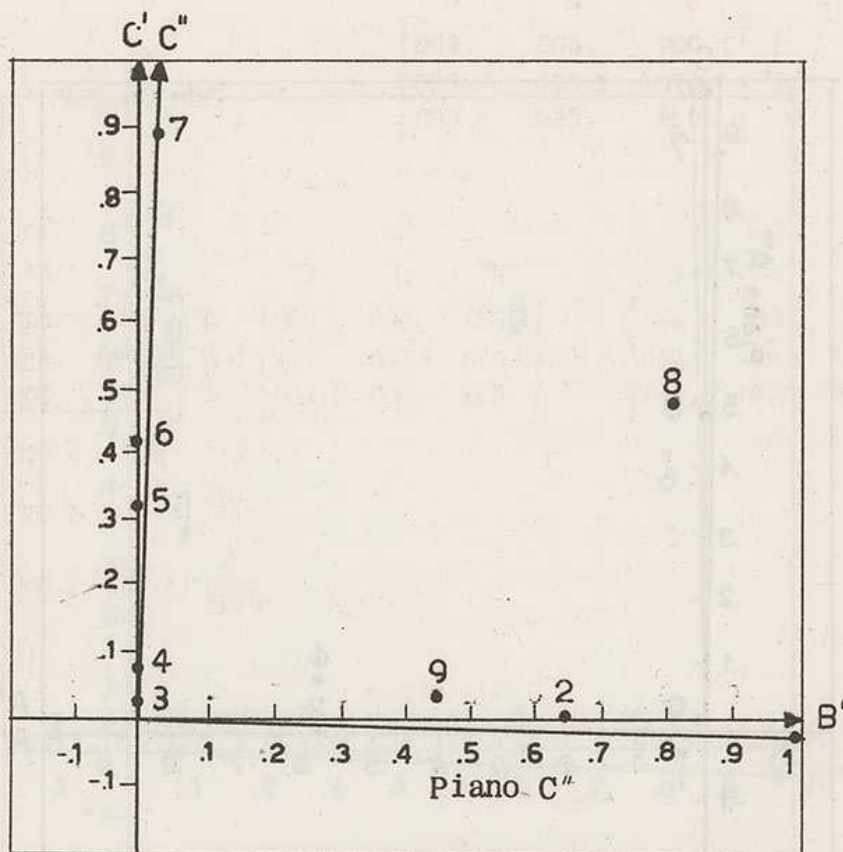
Fig. 104.

Rotazione obliqua - Diagramma 11.

tato, che è sempre A''' , sono 1.000 su A'' e .020 su C' , e vengono registrate nella matrice S_{45} (1).

Nel diagramma $B'C'$ (fig. 105) appaiono opportuni due aggiustamenti: la proiezione del punto-test 1 su C' e la proiezione del punto-test 7 su B' . Ci limitiamo a ruotare il vettore di riferimento C' perpendicolarmente al piano che passa fra i punti-test 1 e 2, in prossimità del

(1) La proiezione 1.000 su A'' è identica a quella della precedente rotazione ed è già stata segnata.



$$r_{B'C'} = .034$$

Fig. 105.

Rotazione obliqua - Diagramma 12.

primo. Si registrano nella matrice S_{45} anche le proiezioni di C'' su C' (1.000) e su B' (.026).

I calcoli relativi a queste rotazioni simultanee sono compresi nelle tabb. 110-114. Dalla matrice C_5 risulta che la obliquità degli assi è contenuta entro limiti tollerabili.

$$\begin{array}{c}
 S_{45} \\
 \begin{array}{c} A'' \\ B' \\ C' \end{array} \begin{bmatrix} A'' & B' & C'' \\ 1.000 & .000 & .000 \\ -.026 & 1.000 & .026 \\ .020 & .000 & 1.000 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Tabella 110.

$$\begin{array}{c}
 \Lambda_{04} \quad S_{45} \quad L_{05} \\
 \begin{array}{c} A'' \\ B' \\ C' \end{array} \begin{bmatrix} A'' & B' & C'' \\ .550 & .568 & .426 \\ .327 & -.823 & .253 \\ .768 & .000 & -.869 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} A'' \\ B' \\ C' \end{array} \begin{bmatrix} A'' & B' & C'' \\ 1.000 & .000 & .000 \\ -.026 & 1.000 & .026 \\ .020 & .000 & 1.000 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{bmatrix} A'' & B' & C'' \\ .544 & .568 & .441 \\ .353 & -.823 & .232 \\ .751 & .000 & -.869 \end{bmatrix} \\
 \Sigma l^2 \quad .985 \quad 1.000 \quad 1.003 \\
 \sqrt{\Sigma l^2} \quad .992 \quad 1.000 \quad 1.002 \\
 \frac{1}{\sqrt{\Sigma l^2}} \quad 1.008 \quad 1.000 \quad .998
 \end{array}$$

Tabella 111.

$$\begin{array}{c}
 \Lambda_{05} \\
 \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{bmatrix} A'' & B' & C'' \\ .548 & .568 & .440 \\ .356 & -.823 & .232 \\ .757 & .000 & -.867 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Tabella 112.

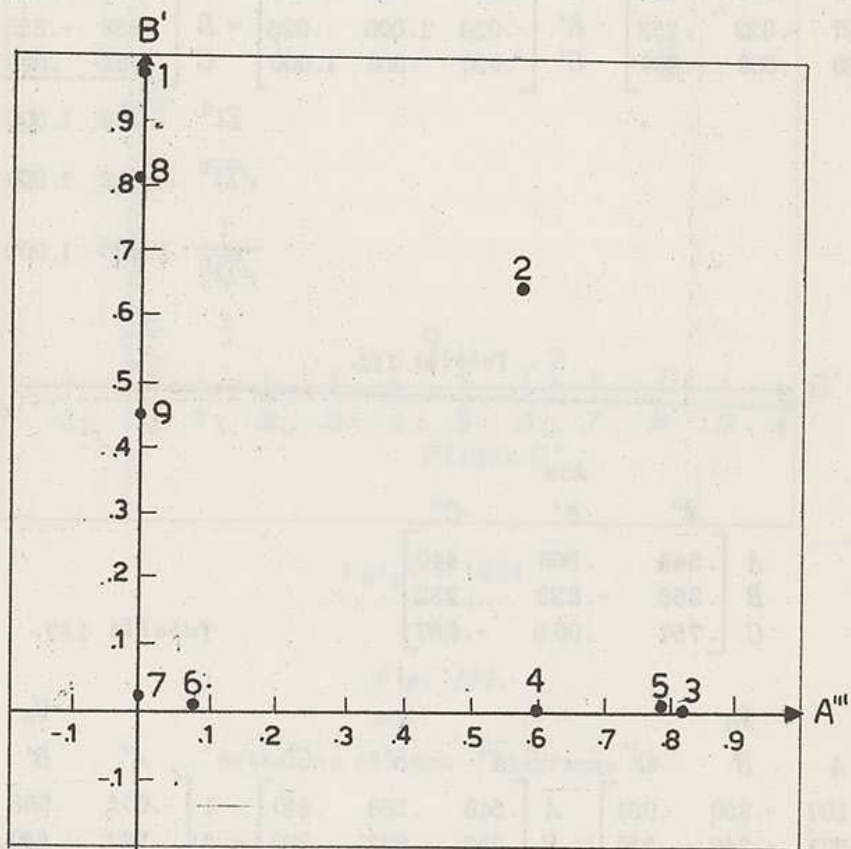
$$\begin{array}{c}
 F_0 \quad \Lambda_{05} \quad V_5 \\
 \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{bmatrix} A'' & B' & C'' \\ .507 & -.850 & .031 \\ .771 & -.246 & .310 \\ .638 & .434 & .417 \\ .504 & .344 & .261 \\ .809 & .548 & .192 \\ .329 & .217 & -.252 \\ .595 & .381 & -.617 \\ .746 & -.462 & -.329 \\ .249 & -.369 & -.008 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} A'' \\ B' \\ C'' \end{array} \begin{bmatrix} A'' & B' & C'' \\ .548 & .568 & .440 \\ .356 & -.823 & .232 \\ .757 & .000 & -.867 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{bmatrix} A'' & B' & C'' \\ -.002 & .988 & -.001 \\ .569 & .640 & .013 \\ .820 & .005 & .019 \\ .596 & .003 & .076 \\ .784 & .009 & .317 \\ .067 & .008 & .414 \\ -.005 & .024 & .885 \\ -.005 & .804 & .506 \\ -.001 & .445 & .030 \end{bmatrix} \\
 \Sigma \quad 5.148 \quad -.003 \quad .005 \quad \Sigma \quad 2.825 \quad 2.926 \quad 2.259
 \end{array}$$

Contr. 2.824 2.926 2.260

Tabella 113.

$$\begin{array}{c}
 \Lambda_{05} \\
 A \quad B \quad C \\
 \begin{bmatrix} A''' \\ B' \\ C'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .548 & .356 & .757 \\ .568 & -.823 & .000 \\ .440 & .232 & -.867 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \Lambda_{05} \\
 A''' \quad B' \quad C'' \\
 \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .548 & .568 & .440 \\ .356 & -.823 & .232 \\ .757 & .000 & -.867 \end{bmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 C_5 \\
 A''' \quad B' \quad C'' \\
 \begin{bmatrix} A''' \\ B' \\ C'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 & .018 & -.332 \\ .018 & 1.000 & .059 \\ -.332 & .059 & .999 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

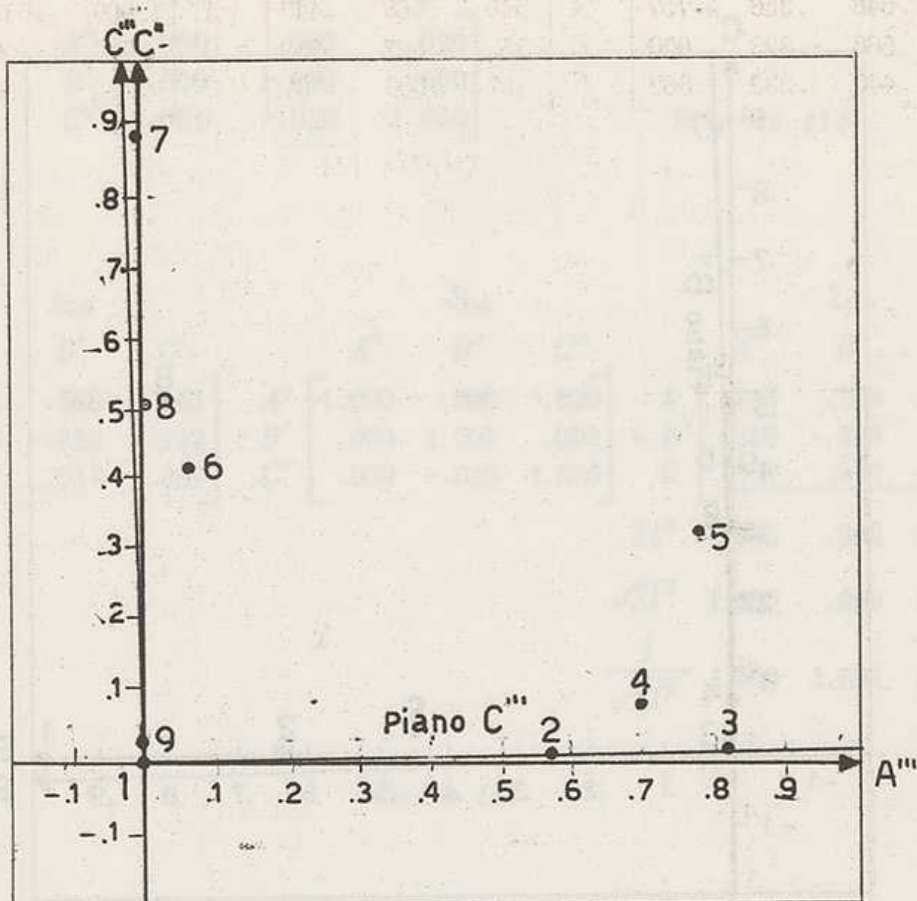
Tabella 114.



$$r_{A'''B'} = .018$$

Fig. 106.

Rotazione obliqua - diagramma 13.

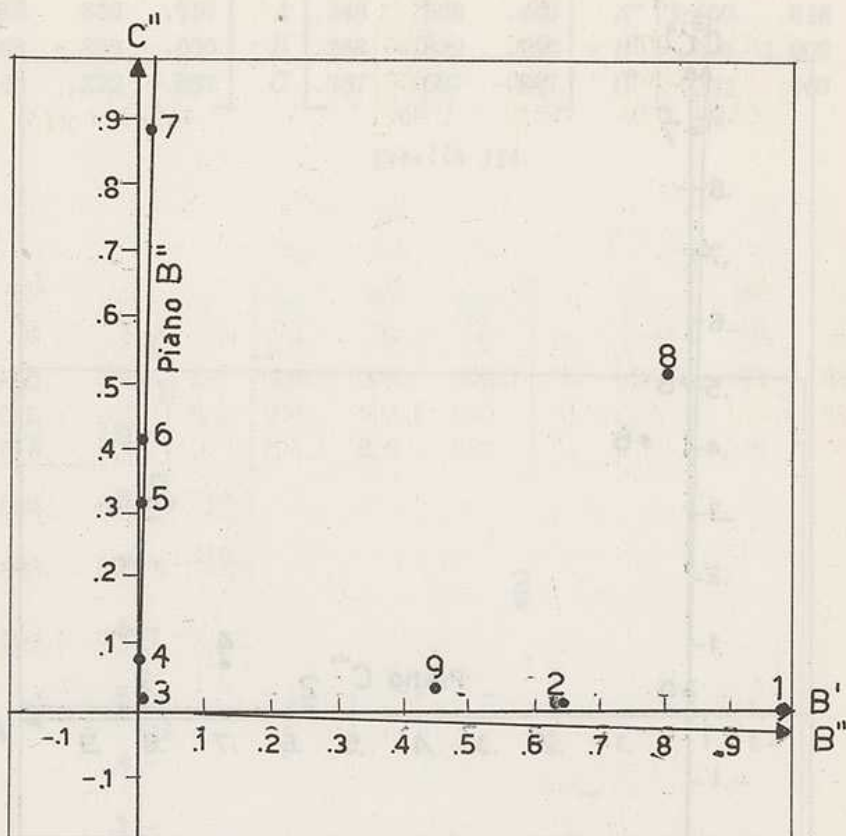


$$r_{A'''C''} = -.332$$

Fig. 107.

Rotazione obliqua - Diagramma 14.

Dai diagrammi delle figg. 106, 107, 108 relativi alla matrice V_5 si vede (come del resto era possibile leggere in V_5) che le rotazioni eseguite hanno precisato ulteriormente la struttura semplice. Il piano A'' contiene i vettori-tests 1, 7, 8, 9. Il vettore B' , che non era stato ruotato, offre tuttora la possibilità di operare un leggero aggiustamento, e perciò si procede ad una rotazione nel piano $B'C''$ (fig. 108) in modo che il vettore ruotato B'' sia perpendicolare al piano che comprende i punti-tests 6 e 7. Nella matrice S_{56} vengono registrate le proiezioni 1.000 e $-.020$ del vettore ruotato B'' rispettivamente su B' e su C'' .



$$r_{B'C''} = .059$$

Fig. 108.

Rotazione obliqua - Diagramma 15.

Il vettore C'' offre la possibilità di un leggero aggiustamento nel piano $A''C''$ (fig. 107). Perciò si procede a ruotarlo in modo che venga ad essere perpendicolare al piano su cui giacciono i punti-test 2 e 3. Le proiezioni di C'' su C'' (1.000) e di C'' su A'' (-0.020) vengono registrate nella matrice S_{56} .

I calcoli relativi alla rotazione sono compresi nelle tabb. 115-119.

$$\begin{array}{c}
 S_{56} \\
 \begin{array}{c} A'' \\ B' \\ C'' \end{array} \begin{bmatrix} A'' & B'' & C'' \\ 1.000 & .000 & -.020 \\ .000 & 1.000 & .000 \\ .000 & -.020 & 1.000 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Tabella 115

$$\begin{array}{c} \Delta_{05} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{bmatrix} A'' & B' & C' \\ .548 & .568 & .440 \\ .356 & -.823 & .232 \\ .757 & .000 & -.867 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} S_{56} \\ A'' \\ B' \\ C'' \end{array} \begin{bmatrix} A'' & B'' & C'' \\ 1.000 & .000 & -.020 \\ .000 & 1.000 & .000 \\ .000 & -.020 & 1.000 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} L_{06} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{bmatrix} A'' & B'' & C'' \\ .548 & .559 & .429 \\ .356 & -.828 & .225 \\ .757 & .017 & -.882 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \Sigma l^2 \\ \sqrt{\Sigma l^2} \\ \frac{1}{\sqrt{\Sigma l^2}} \end{array} \begin{array}{ccc} 1.000 & .998 & 1.013 \\ 1.000 & .999 & 1.006 \\ 1.000 & 1.001 & 1.003 \end{array}$$

Tabella 116.

$$\begin{array}{c} \Delta_{06} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{bmatrix} A'' & B'' & C'' \\ .548 & -.560 & .430 \\ .356 & -.829 & .226 \\ .757 & -.017 & -.885 \end{bmatrix}$$

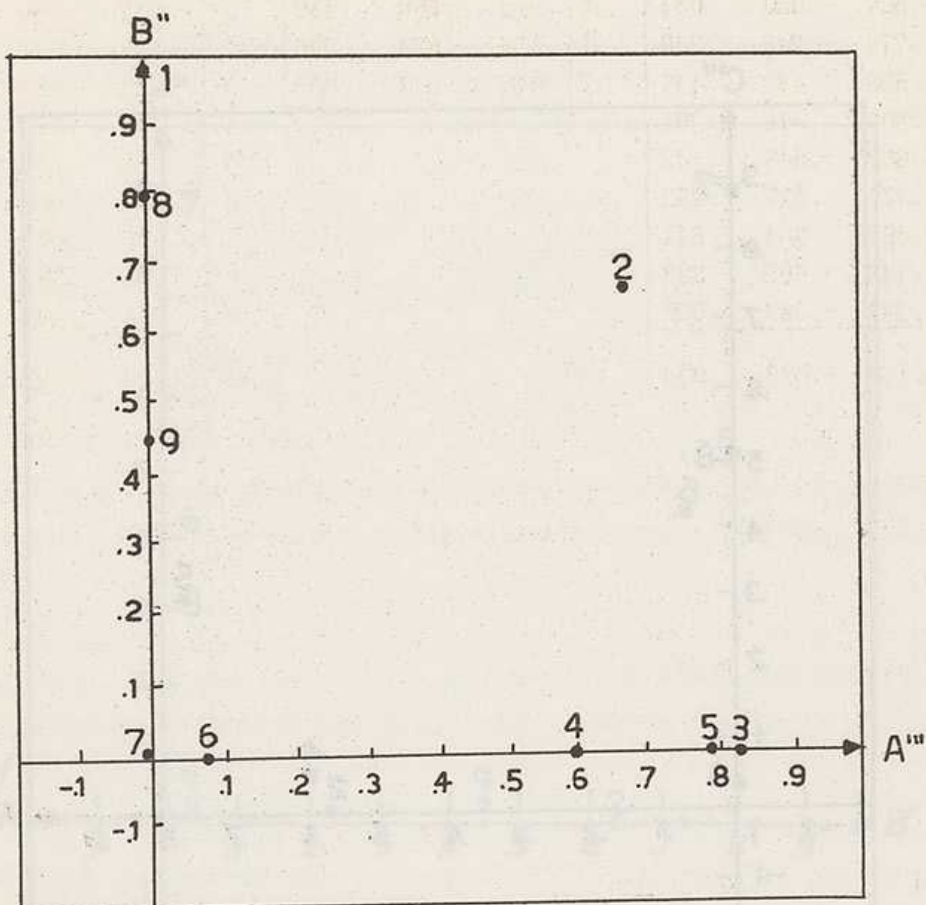
Tabella 117.

F_0			Λ_{0e}			V_e						
	A	B	C		A'''	B''	C'''		A'''	B''	C'''	
1	.507	-.850	.031	A	.548	.560	.430	=	1	-.002	.989	-.002
2	.771	-.246	.310	B	.356	-.829	.226	=	2	.569	.641	.002
3	.638	.434	.417	C	.757	.017	-.885	=	3	.820	.004	.003
4	.504	.344	.261						4	.596	.002	.063
5	.809	.548	.192						5	.784	.002	.302
6	.329	.217	-.252						6	.067	.000	.414
7	.595	.381	-.617						7	-.005	.007	.888
8	.746	-.462	-.329						8	-.005	.795	.508
9	.249	-.369	-.008						9	-.001	.445	.031
Σ	5.148	-.003	.005						Σ	2.825	2.885	2.209
									Contr.	2.824	2.885	2.209

Tabella 118.

Λ'_{0e}			Λ_{0e}			C_e						
	A	B	C		A'''	B''	C'''		A'''	B''	C'''	
A'''	.548	.356	.757	A	.548	.560	.430	=	A'''	1.000	.025	-.354
B''	.560	-.829	.017	B	.356	-.829	.226	=	B''	.025	1.001	.039
C'''	.430	.226	-.885	C	.757	.017	-.885	=	C'''	-.354	.039	1.019

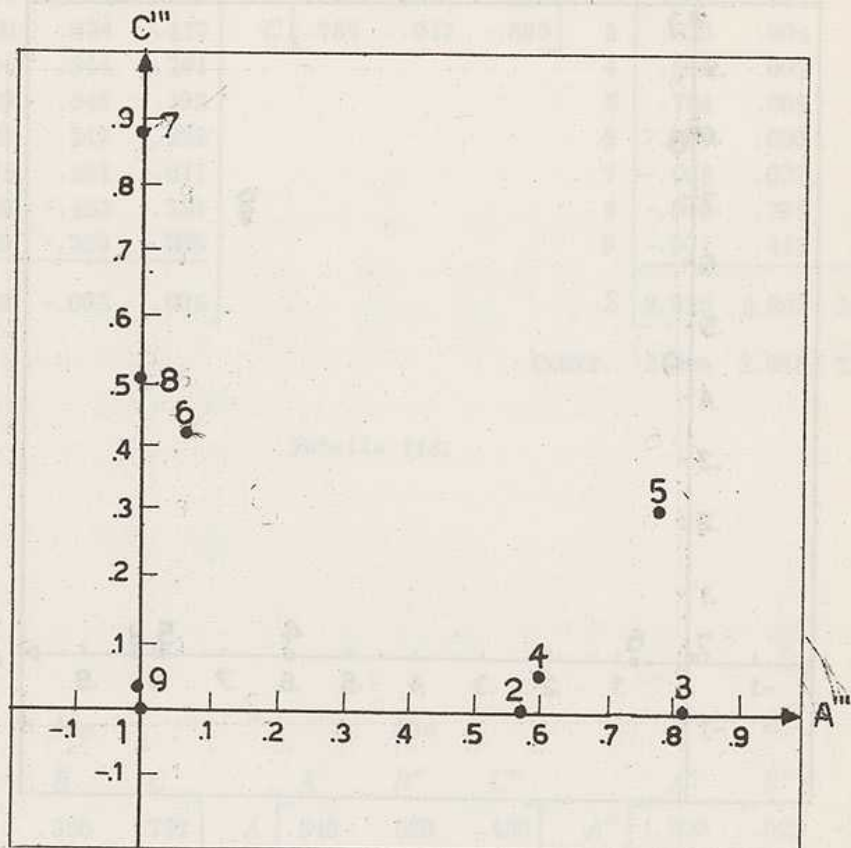
Tabella 119.



$$r_{A'''B''} = .025$$

Fig. 109.

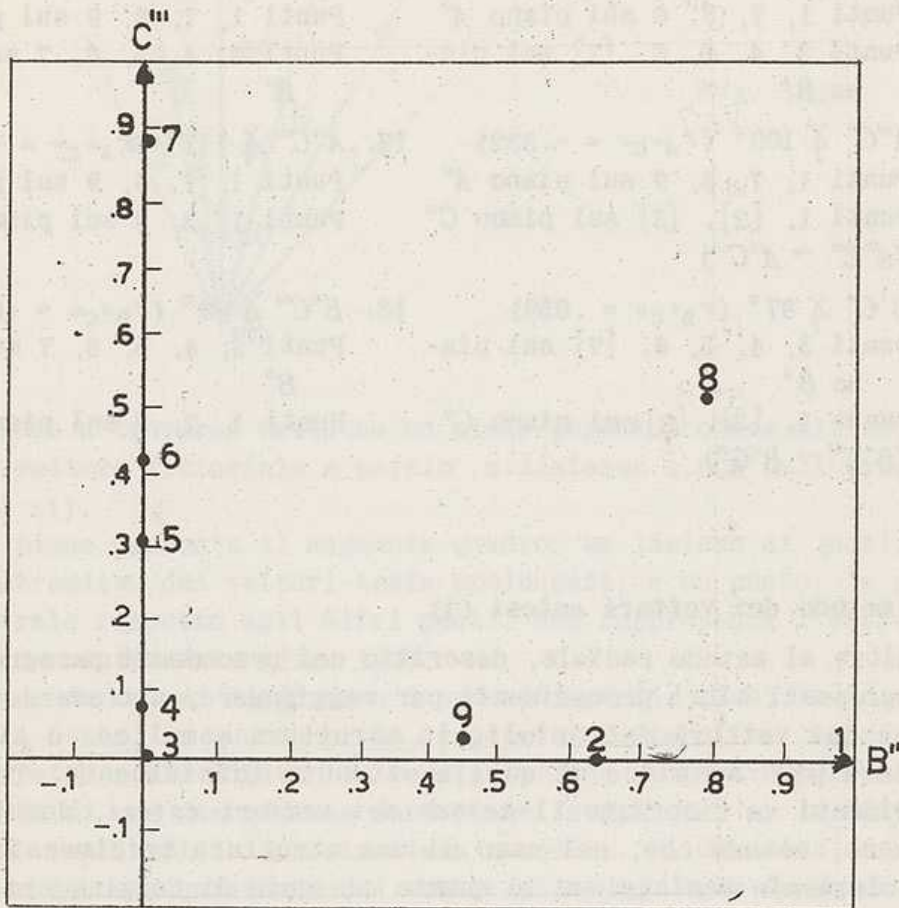
rotazione obliqua - Diagramma 16.



$$r_{A''' C'''} = -.354$$

Fig. 110.

Rotazione obliqua - Diagramma 17.



$$r_{B''C'''} = .039$$

Fig. 111.

Rotazione obliqua - Diagramma 18.

L'ulteriore precisazione della struttura semplice raggiunta attraverso ai successivi aggiustamenti e' riassunta nella Cronologia delle strutture.

VI struttura (obliqua) $A''B'C''$	VII struttura (obliqua) $A'''B'''C'''$
13. $A''B'' \angle 89^\circ$ ($r_{A''B''} = .018$) Punti 1, 7, 8, 9 sul piano A'' Punti 3, 4, 5, 6, [7] sul piano B''	16. $A'''B''' \angle 89^\circ$ ($r_{A'''B'''} = .025$) Punti 1, 7, 8, 9 sul piano A''' Punti 3, 4, 5, 6, 7 sul piano B'''
14. $A''C'' \angle 109^\circ$ ($r_{A''C''} = -.332$) Punti 1, 7, 8, 9 sul piano A'' Punti 1, [2], [3] sul piano C'' ($A''C'' \rightarrow A'''C'''$)	17. $A'''C''' \angle 111^\circ$ ($r_{A'''C'''} = -.354$) Punti 1, 7, 8, 9 sul piano A''' Punti 1, 2, 3 sul piano C'''
15. $B''C'' \angle 87^\circ$ ($r_{B''C''} = .059$) Punti 3, 4, 5, 6, [7] sul piano B'' Punti 1, [2], [3] sul piano C'' ($B''C'' \rightarrow B'''C'''$)	18. $B'''C''' \angle 88^\circ$ ($r_{B'''C'''} = .039$) Punti 3, 4, 5, 6, 7 sul piano B''' Punti 1, 2, 3 sul piano C'''

6. Il metodo dei vettori estesi (1)

Oltre al metodo radiale, descritto nei precedenti paragrafi, sono stati proposti altri procedimenti per raggiungere, attraverso alla rotazione dei vettori fattoriali, la struttura semplice, o almeno una struttura piu' semplice di quella ottenuta inizialmente. Tra questi procedimenti va ricordato il *metodo dei vettori estesi*, dovuto pure a Thurstone, metodo che, nel caso di una struttura tridimensionale, e' particolarmente vantaggioso in quanto consente di raggiungere la soluzione attraverso una sola rotazione. Considereremo quindi l'applicazione di tale metodo ad una struttura fattoriale tridimensionale.

Il punto di partenza del procedimento e' una struttura in cui uno degli assi fattoriali ha soltanto proiezioni positive. Tale struttura e' molto comune, perche' rappresenta il punto di arrivo dell'analisi centroide, quando la matrice delle correlazioni comprende soltanto correlazioni positive (2). Come e' stato detto nel Cap. IV, nella struttura tridimensionale ottenuta con l'analisi centroide i vettori-tests si dispongono obliquamente intorno al semiasse positivo del I fattore. Prolungando i vettori-tests fino a che ciascuno di essi ha una proiezione 1.000 sul semiasse positivo del I fattore (fig. 112), le loro estremi-

(1) Vettori "estesi" significa vettori prolungati.

(2) Tale punto di partenza si puo' comunque raggiungere riflettendo i tests che danno proiezioni negative sul primo fattore.

*Le proiezioni
dei vettori-
tests sulle
quattro
fattoriali*

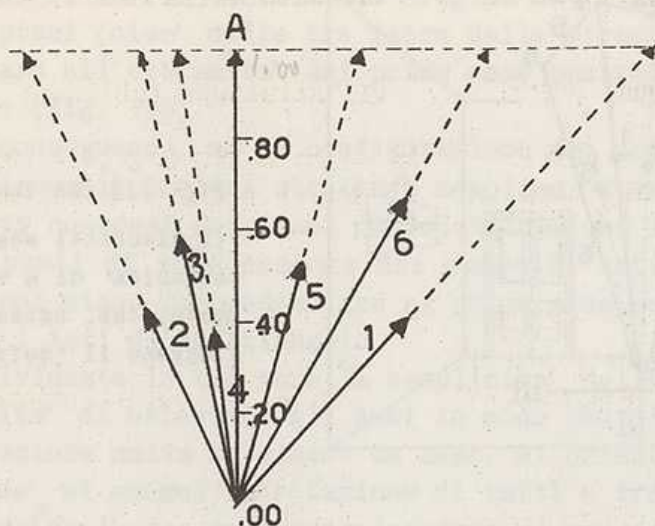


Fig. 112.

mita' vengono a trovarsi tutte su un piano perpendicolare all' estremita' del I vettore fattoriale e percio' a distanza 1.000 dall' origine degli assi (1).

Tale piano presenta il seguente quadro: un insieme di punti, che sono le estremita' dei vettori-tests prolungati, e un punto, in posizione centrale rispetto agli altri punti, che rappresenta l' estremita' del I vettore fattoriale (fig. 113).

Il modo in cui si dispongono i suddetti punti, cioe' le estremita' dei vettori-tests, su questo piano, consente di stabilire immediatamente se, ed entro quali limiti, la configurazione dei vettori-tests e' suscettibile di una descrizione fattoriale "semplice", o, in altre parole, se e' realizzabile una struttura semplice. Si dimostra infatti che, quando la configurazione dei vettori-tests e' tale da poter costituire una struttura semplice, l' insieme dei punti determinati dall' intersezione dei vettori-tests con il piano perpendicolare al primo asse centroide, assume la forma di un triangolo.

Ricordiamo che, quando si realizza una *struttura semplice tridimensionale*, ogni test ha almeno una saturazione nulla; cioe' ogni test, avendo proiezione zero su un asse fattoriale deve giacere su un piano che e' perpendicolare a quell' asse e passa per l' origine degli assi (2).

(1) Thomson rende intuitiva la precedente descrizione considerando gli assi fattoriali centroidi II e III tracciati sul pavimento di una stanza, e il I asse fattoriale centroide posto verticalmente al pavimento e lungo fino al soffitto. L' altezza della stanza viene assunta come unita di misura e quindi pari alla lunghezza del vettore fattoriale unitario, ed il soffitto corrisponde al piano perpendicolare che e' raggiunto dalle estremita' dei vettori-tests (segmenti obliqui che partono dal punto di incontro dei tre assi) quando sono prolungati in modo da avere una proiezione 1 sul I asse (fig. 113).

(2) Un test puo' avere saturazione nulla in due fattori, ed allora dovra' giacere contemporaneamente sui due piani perpendicolari ai due vettori fattoriali, e si trovera' quindi a coincidere con l' intersezione dei due piani.

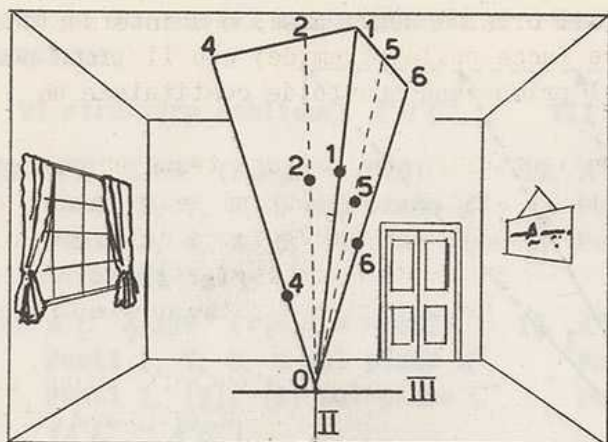


Fig. 113 (da Thomson).

(I dischetti segnano le estremita' di 6 vettori-tests, che, estesi, raggiungono il "soffitto").

Vi sono tre di questi piani (uno per fattore) ed ogni vettore-test deve essere compreso in uno di questi piani.

Dunque, una configurazione tridimensionale di vettori-tests e' suscettibile di costituire una struttura semplice (quando i tre assi fattoriali siano convenientemente orientati) solo se tutti i vettori-tests sono compresi in tre piani.

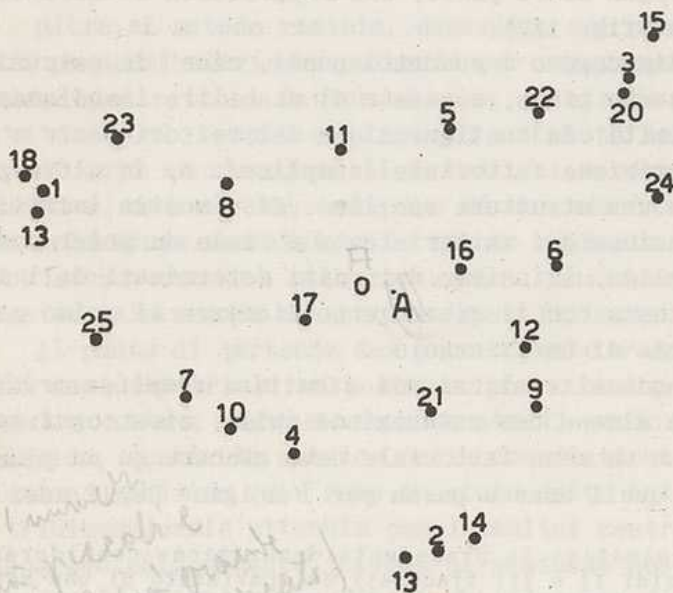


Fig. 114.

Intersezioni di 25 vettori-tests "estesi" con il piano perpendicolare all'estremita' del I vettore fattoriale. (A)

× Poiche' gli assi fattoriali non sono ne' collineari ne' paralleli, i suddetti tre piani non possono essere ne' coincidenti ne' paralleli e quindi si intersecano. E poiche' passano tutti e tre per uno stesso punto, cioe' per l'origine degli assi (e dei vettori-tests): tre

× si possono trovare tutti e tre in un piano (perche' in tal caso uno dei tre sarebbe superfluo, potendo essere definito dagli altri due).

piani intersecandosi vengono a costituire una piramide triangolare con il vertice in corrispondenza all'origine degli assi; e l'intersezione dei tre piani (cioè delle tre facce della piramide) con il piano perpendicolare all'estremità del primo asse centroide costituisce un triangolo (fig. 113).

Di conseguenza, se la configurazione dei vettori-tests è suscettibile di costituire una struttura semplice, i vettori-tests devono essere tutti compresi nei piani che costituiscono le facce della piramide, e i punti di intersezione dei suddetti vettori-tests prolungati (1), col piano perpendicolare al primo asse centroide devono disporsi lungo i lati di un triangolo.

Individuata in tal modo la semplicità della struttura, cioè la possibilità di orientare gli assi in modo che ciascun vettore-test abbia proiezione nulla su almeno un asse, si orientano adeguatamente gli assi, cioè si esegue la rotazione di tutti e tre gli assi fattoriali, orientando ogni asse perpendicolarmente ad uno dei piani contenenti i vettori-tests, o, in altre parole, perpendicolarmente ad una delle facce della piramide (2); e si determinano quindi le proiezioni dei vettori-tests sui vettori di riferimento.

Passiamo a descrivere il procedimento con riferimento ad un esempio. Potremmo usare a tale scopo sia i dati relativi alla struttura semplice ortogonale che ci sono serviti per dare una dimostrazione delle rotazioni grafiche, sia i dati relativi alla struttura semplice obliqua utilizzati nel presente paragrafo, trattandosi, nell'uno e nell'altro caso, di strutture tridimensionali. Ma è preferibile applicare il procedimento ai dati relativi alla struttura semplice obliqua, che rappresenta il caso generale.

Si parte, come nel paragrafo precedente, dalla matrice fattoriale centroide che viene trascritta in tab. 120. Si tratta ora di prolungare ogni singolo vettore-test fino al punto in cui la sua proiezione sul vettore fattoriale A è uguale a 1. In altre parole, la matrice dovrà venir trasformata in modo che i numeri della I colonna, che sono le proiezioni dei tests sul vettore fattoriale A , siano tutti uguali a 1. Ma tale scopo deve venir raggiunto modificando soltanto la lunghezza dei vettori-tests, non la loro direzione, cioè mantenendo costanti gli angoli che essi formano fra loro e con i vettori fattoriali.

(1) Va tenuto presente che i vettori-tests che prolungati si allineano lungo i lati del triangolo, giacevano anche in origine (prima di venire prolungati) sulle facce della piramide di cui il triangolo costituisce la base, e che il prolungarli non modifica il loro orientamento e quindi il fatto di giacere sui piani che costituiscono i lati della piramide non può dipendere dall'operazione di prolungamento dei vettori. Il prolungamento dei vettori è cioè un utile artificio che, portando su uno stesso piano le estremità di tutti i vettori-tests, permette di stabilire per semplice ispezione se essi giacciono su tre piani passanti per l'origine.

(2) Se la struttura semplice è ortogonale, i vettori fattoriali coincideranno con le intersezioni dei piani, cioè con i tre spigoli della piramide; non così se la struttura semplice è obliqua.

				Vettori estesi		
	A	B	C	A _E	B _E	C _E
1	.507	-.850	.031	1.000	-1.6745	.0611
2	.771	-.246	.310	1.000	-.3198	.4030
3	.638	.434	.417	1.000	.6814	.6547
4	.504	.344	.261	1.000	.6811	.5168
5	.809	.548	.192	1.000	.6795	.2381
6	.329	.217	-.252	1.000	.6597	-.7661
7	.595	.381	-.617	1.000	.6401	-1.0366
8	.746	-.462	-.329	1.000	-.6191	-.4409
9	.249	-.369	-.008	1.000	-1.4834	-.0322

Tabella 120.

Poiche' modificando la lunghezza di un vettore applicato all'origine (mantenendo costante il suo orientamento nello spazio) si modificano proporzionalmente le sue proiezioni ortogonali sugli assi (fig.

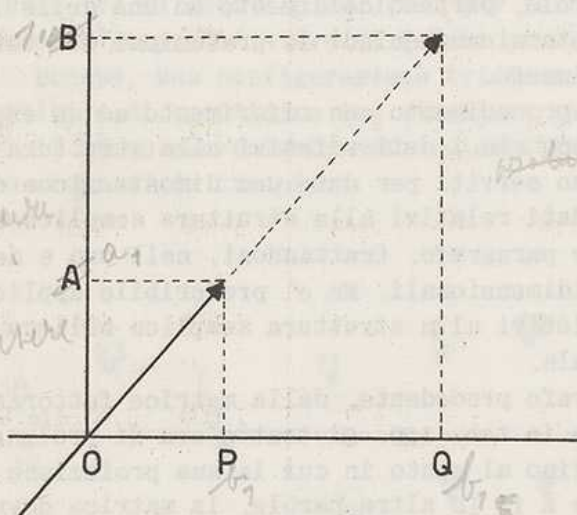


Fig. 115.

115), e' evidente che i vettori estesi avranno proiezioni fattoriali proporzionali a quelle dei vettori originari. Se dunque un vettore viene prolungato fino ad avere una proiezione unitaria sul primo fattore, avra' sugli altri fattori proiezioni proporzionalmente modificate.

Dunque, per calcolare le proiezioni (e quindi le saturazioni) sugli altri due assi fattoriali di un vettore-test prolungato tanto da avere proiezione 1 sul 1° asse centroidale, bisogna calcolare il coefficiente che, moltiplicato per la saturazione nel primo fattore, da' 1, e quindi moltiplicare anche le saturazioni negli altri due fattori per lo stesso coefficiente.

In altre parole, siccome per ottenere che la proiezione a_1 di un vettore-test i sul primo fattore, A , diventi uguale a 1, si deve dividere a_1 per a_1 $\left[\frac{a_1}{a_1} = 1 \right]$ cioe' moltiplicare a_1 per $\frac{1}{a_1}$, per calcolare le proiezioni del vettore prolungato sugli altri due assi fattoriali B e C , bastera' moltiplicare le proiezioni originarie b_1 e c_1 per $\frac{1}{a_1}$.

S. tratta dunque di risolvere una proporzione
 $a_1 = 1 \Rightarrow b_1 : b_{1E} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_1}$
 in cui a_1 e' la proiezione (cioe' la saturazione) sul 1° fattore, b_1 la proiezione

il test i

Matrice centroide F_0			Coefficienti di trasformazione		Matrice dei vettori estesi E_0			
A	B	C	a_1	$\frac{1}{a_1}$	A_E	B_E	C_E	
1	.507	-.850	.031	$a_1 = .507$	$\frac{1}{a_1} = 1.97$	1.000	-1.6745	.0611
2	.771	-.246	.310	$a_2 = .771$	$\frac{1}{a_2} = 1.30$	1.000	-.3198	.4030
3	.638	.434	.417	$a_3 = .638$	$\frac{1}{a_3} = 1.57$	1.000	.6814	.6547
4	.504	.344	.261	$a_4 = .504$	$\frac{1}{a_4} = 1.98$	1.000	.6811	.5168
5	.809	.548	.192	$a_5 = .809$	$\frac{1}{a_5} = 1.24$	1.000	.6795	.2381
6	.329	.217	-.252	$a_6 = .329$	$\frac{1}{a_6} = 3.04$	1.000	.6597	-.7661
7	.595	.381	-.617	$a_7 = .595$	$\frac{1}{a_7} = 1.68$	1.000	.6401	-1.0366
8	.746	-.462	-.329	$a_8 = .746$	$\frac{1}{a_8} = 1.34$	1.000	-.6191	-.4409
9	.249	-.369	-.008	$a_9 = .249$	$\frac{1}{a_9} = 4.02$	1.000	-1.4834	-.0322

Tabella 121.

dividere b. in altri fattori, e moltiplicare
 Si tratta quindi semplicemente di moltiplicare la prima riga della matrice centroide per $\frac{1}{a_1}$, e cioè' $(.507)(1.97) = 1.000$;

$(-.850)(1.97) = -1.6745$; $(.031)(1.97) = .0611$; la seconda riga per $\frac{1}{a_2}$; e cioè' $(.771)(1.30) = 1.000$; $(-.246)(1.30) = -.3198$; $(.310)(1.30) = .4030$; ecc. (tab. 121).

Ottenuta in tal modo la matrice delle proiezioni dei vettori estesi, si può costruire il diagramma dei punti di incontro dei vettori estesi con il piano perpendicolare all'estremità del vettore fattoriale A.

*nell'altro fattore, b, è la proiezione del vettore-test i prolungato, cioè il coefficiente valore che si voleva ottenere.
 Si tratta quindi semplicemente di dividere la saturazione nell'altro fattore per la saturazione nel 1° fattore per ottenere la proiezione.*

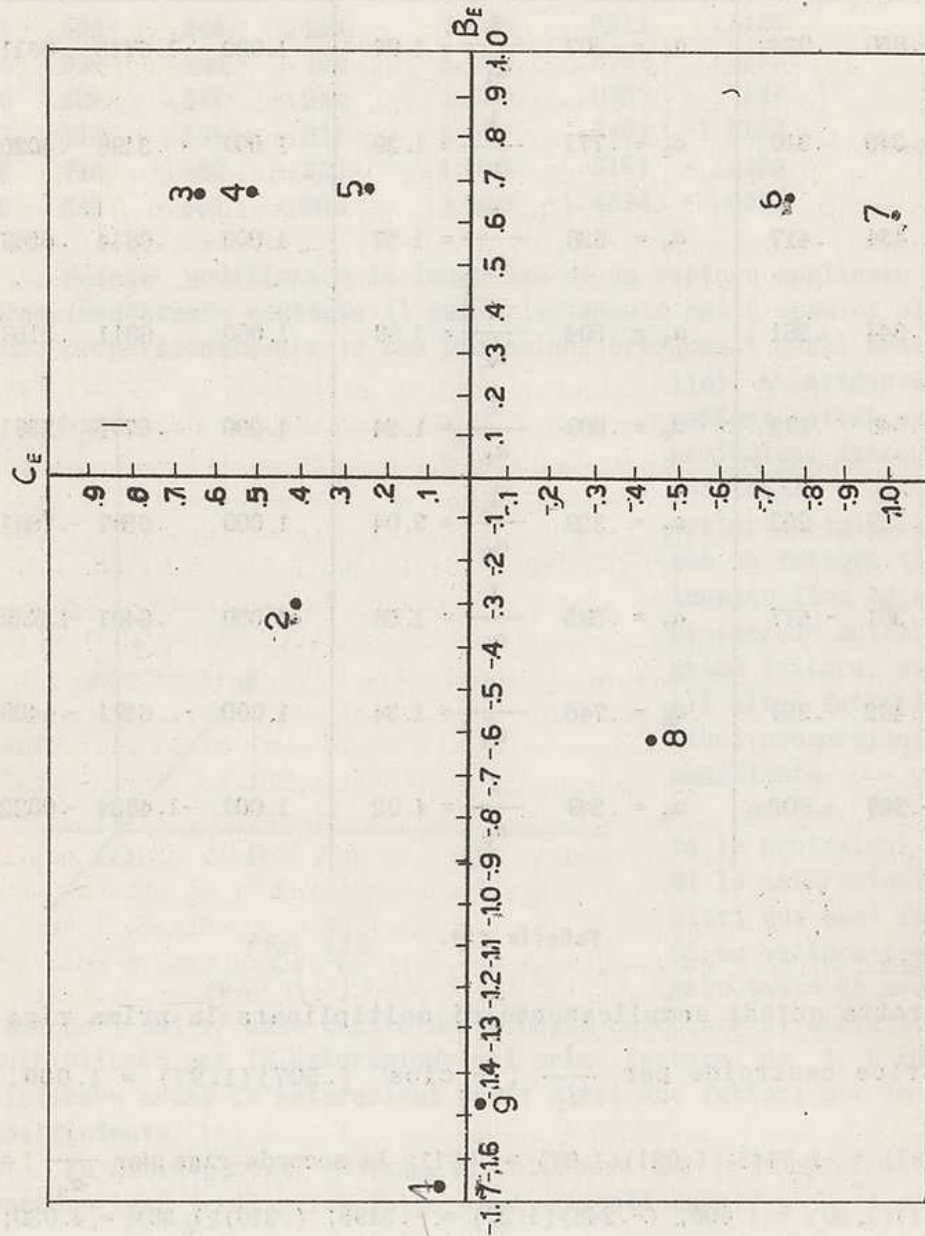


Fig. 116.

Bastera' a tale scopo tracciare i vettori fattoriali ortogonali B e C e individuare i punti che hanno sui due vettori fattoriali le proiezioni elencate nella matrice E_0 dei vettori estesi. Così ad esempio il punto 1 avra' sull'asse B la coordinata -1.6745 e sull'asse C la coordinata $.0611$, cioè approssimativamente (-1.67) e $(.06)$; il punto 2 $(-.32)$ e $(.40)$, ecc. (fig. 116).

Questo modo di procedere si giustifica in quanto, essendo uguali le proiezioni dei vettori-tests estesi sul fattore A , tali proiezioni ci dicono soltanto che tutte le estremita' dei vettori-tests estesi (cioe' i punti-tests) si trovano nel piano perpendicolare al vettore fattoriale A , a distanza $+1.000$ dall'origine. La posizione dei punti nel piano suddetto e' determinata dalle proiezioni sugli assi B e C .

[In realta', tracciando i vettori B e C , ci comportiamo come se la proiezione su A fosse zero, cioè come se il piano fosse il piano individuato dai vettori B e C , il quale passa per l'origine; infatti la posizione dei punti nel piano dipende soltanto dalle coordinate B e C .] ma: allora sono vettori
Comunque e' piu' semplice considerare di aver proiettato i vettori fattoriali B e C su un piano parallelo a quello individuato dai predetti vettori, a distanza unitaria in direzione del verso positivo di A (1). lo stesso

Eseguito il diagramma, vediamo subito che i punti-tests sono allineati abbastanza esattamente in modo da individuare un triangolo. Tracciato il triangolo (fig. 117) abbiamo individuato i tre piani che contengono i vettori-tests: essi sono le tre facce della piramide che ha il vertice nell'origine degli assi (o della struttura vettoriale) e la base nel piano perpendicolare ad A , a distanza 1.000 dall'origine (la base della piramide e' il triangolo tracciato in fig. 117).

Si tratta ora di eseguire la rotazione degli assi dalla loro posizione attuale a quella che realizza la struttura semplice, in cui ogni asse e' perpendicolare ad uno dei tre piani che contengono i vettori-tests. La matrice di trasformazione, cioè la matrice dei coseni degli angoli che i nuovi assi formano con gli assi originari, si ottiene, come al solito, in due tempi. Si costruisce anzitutto, ricavando i dati dal diagramma, la matrice dei coseni dei vettori lunghi (2), e poi, normalizzando quest'ultima, la matrice Λ dei coseni dei vettori unitari, cioè la matrice di trasformazione.

(1) In altre parole, riferendoci a fig. 113, nel primo caso le estremita' dei vettori fattoriali estesi verrebbero proiettate sul "pavimento", mentre nel secondo caso, gli assi del II e del III fattore verrebbero proiettati sul "soffitto". Ma il quadro che ne risulta, sull'uno e sull'altro piano, e' identico.

(2) Per evitare confusione usiamo due diverse espressioni, "vettori lunghi" e "vettori estesi". Con la prima indichiamo il prolungamento dei vettori fattoriali ruotati per ottenere una proiezione unitaria su uno dei due vettori fattoriali originari (v. Parte II, Cap. VI, § 2); mentre con l'espressione "vettori estesi" indichiamo l'operazione descritta in questo paragrafo, per cui i vettori-tests vengono prolungati fino ad ottenere che le loro estremita' raggiungano il piano perpendicolare all'estremita' del I vettore fattoriale. ma e' lo stesso!

Trovare

Per la prova. in A sui 3 vettori risultanti

1. *Ipotesi: 3 segmenti OS (da O all'incontro del vettore originario con uno dei piani). I 3 segmenti sono le misure delle 3 proiezioni di A, B, C in A, B, C.*
2. *quale dei 3 è la proiezione di A, B, C?*

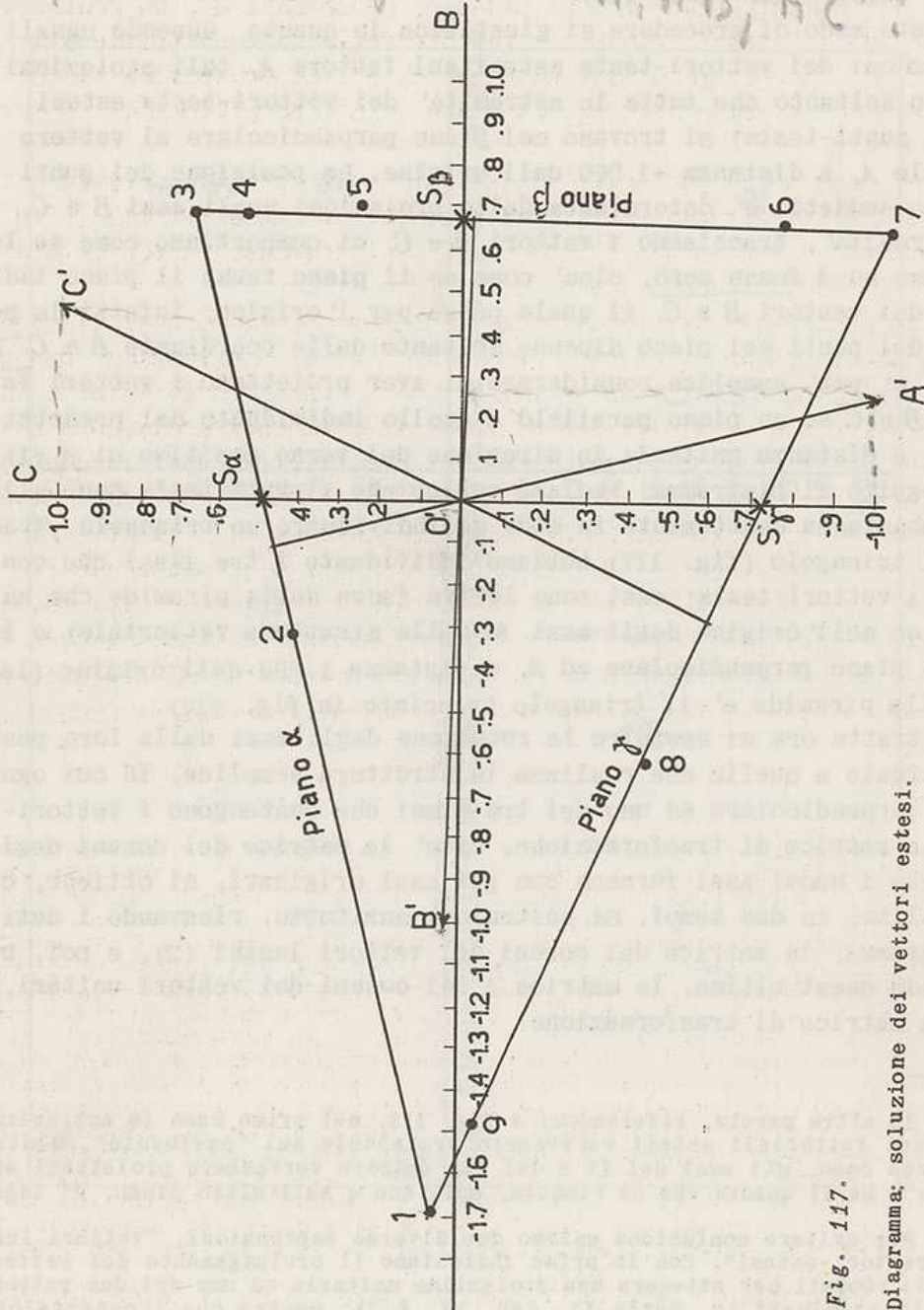


Fig. 117.

Diagramma: soluzione dei vettori estesi.

Ipotesi: 3 proiezioni

Per costruire la matrice L si puo' procedere nel modo seguente (1):

1) Per ognuno dei tre lati del triangolo si traccia la perpendicolare che passa per l'origine degli assi O' (v. fig. 117). Tali perpendicolari vanno prolungate di la' dell'origine finche' hanno una proiezione unitaria sul vettore fattoriale centroide piu' vicino. (In fig. 117 la perpendicolare al piano α , denominata A' , ha proiezione -1.000 sul vettore C , che e' il vettore fattoriale centroide piu' vicino ad A' ; la perpendicolare al piano β , B' , ha proiezione -1.000 sul vettore B ; la perpendicolare al piano γ , C' , ha proiezione $.1.000$ sull'asse C).

2) Si leggono le proiezioni di ognuna delle suddette perpendicolari sui vettori fattoriali B e C e si trascrivono nella matrice L . (A' ha proiezione -1.000 su C e $.25$ su B ; B' ha proiezione -1.000 su B e $.02$ su C ; C' ha proiezione 1.000 su C e $.466$ su B).

3) Le proiezioni sul vettore fattoriale A non si possono leggere nel diagramma, poiche' A essendo perpendicolare al diagramma e' rappresentato soltanto dal punto di incontro O' degli assi. Si puo' tuttavia dimostrare (2) che la proiezione di un vettore ruotato prolungato M' sull'asse A e' pari alla lunghezza del segmento \overline{OS} del vettore centroide che forma l'angolo piu' piccolo con M' (in cui O e' l'origine ed S e' il punto di incontro con la traccia del piano μ). (A' ha proiezione $.48$ su A , B' ha proiezione $.67$, C' $.725$). Va tenuto presente che le proiezioni sono tutte positive, anche quella di C' , benché sia stato utilizzato il semiasse negativo di C . Sono negative soltanto quando la estremita' della perpendicolare e la traccia del piano (al quale essa e' perpendicolare) si trovano tutte e due dalla stessa parte rispetto all'origine.

(cioe' l'origine degli assi e fuori dal triangolo)

(1) Per ottenere la matrice L , cioe' i numeri proporzionali ai coseni degli angoli formati dagli assi ruotati con gli assi originari, si puo' procedere in due modi: 1) Impostare le equazioni dei lati del triangolo formato dalle tracce dei piani contenenti i vettori-tests (fig. 117): i coefficienti delle tre equazioni sono gli elementi delle tre colonne della matrice L , in quanto sono proporzionali ai coseni che le normali ai tre lati del triangolo formano con gli assi cartesiani, cioe' con i vettori fattoriali centroidi; essendo le suddette normali ai lati del triangolo, proiezioni delle normali ai piani contenenti i vettori-tests sul piano del triangolo, cioe' proiezioni degli assi ruotati, i coefficienti delle tre equazioni sono proporzionali ai coseni degli angoli formati dagli assi ruotati con gli assi originari. 2) Procedere come al solito, servendosi delle proiezioni degli assi ruotati nel piano del triangolo, e cioe', prolungare tali proiezioni fino ad ottenere una proiezione unitaria su uno degli assi, leggere la proiezione sul secondo asse, e servirsi di una via indiretta per ottenere la proiezione sul I asse, che non e' rappresentato nel disegno. Useremo prima il secondo procedimento, che appare piu' semplice in quanto e' una estensione del procedimento usato, ma ripeteremo il calcolo presentando anche il secondo procedimento, che da' meno facilmente luogo a sviste ed errori.

(2) La dimostrazione implica la considerazione del piano AC (o rispettivamente AB), non rappresentato in fig. 117, e si basa sull'uguaglianza di due triangoli rettangoli i cui cateti maggiori sono i vettori unitari A e B (o C) e i cui cateti minori sono le proiezioni del vettore ruotato prolungato M' su A e il segmento \overline{OS} .

Ottenuta in tal modo la matrice L , si procede, come con il metodo descritto nei precedenti paragrafi, alla "normalizzazione per colonne", cioè si moltiplica ogni colonna per un coefficiente tale da rendere le somme dei quadrati degli elementi di ogni colonna uguale a 1, ottenendo così la matrice di trasformazione Λ_{01} (tab. 122).

$S_{01} = L_{01}$			Λ_{01}				
	A'	B'	C'		A'	B'	C'
A	.480	.670	.725	A	.422	.557	.550
B	.250	-1.000	.466	B	.220	-.831	.353
C	-1.000	.020	1.000	C	-.880	.017	.758
Σl^2	1.293	1.449	1.743				
$\sqrt{\Sigma l^2}$	1.137	1.204	1.743				
$\frac{1}{\sqrt{\Sigma l^2}}$.880	.831	.758				

Tabella 122.

Prima di procedere al calcolo delle nuove saturazioni dei tests nei fattori ruotati diamo dimostrazione di un altro procedimento per ottenere la matrice L , cioè impostando le equazioni delle rette che formano il triangolo di fig. 117 (1).

Un semplice metodo per ottenere tali equazioni è quello di usare la formula

$$\frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 1,$$

in cui a e b sono le misure dei segmenti degli assi A e B intercettati dalla retta (cioè dal lato del triangolo o dal suo prolungamento).

Ma tale metodo sarebbe molto scomodo da applicare al nostro esempio, poiché uno dei lati del triangolo è pressoché parallelo all'asse C . Perciò si procede dalle coordinate dei vertici del triangolo scrivendo le equazioni dei lati secondo la formula seguente:

$$(lv - mu) + (m - v)y + (u - l)z = 0$$

in cui l ed m sono le coordinate di un vertice ed u e v sono le coordinate dell'altro vertice.

Si ottengono le seguenti equazioni:

(1) Vedi THOMSON, *op. cit.*, Cap. XI.

- Per il lato che costituisce l'intersezione del piano α con il piano perpendicolare all'estremità del I vettore fattoriale

$$\{(-1.6745)(.6547) - (.0611)(.6814)\} + \{(.0611) - (.6547)\} y + \{(.6814) - (-1.6745)\} z = 0$$

da cui, fatti i calcoli, si ottiene $1.1376 - .5936 y + 2.3554 z = 0$.

- Per il lato che costituisce l'intersezione del piano β

$$\{(.6814)(-1.0366) - (.6547)(.6401)\} + \{(.6547) - (-1.0366)\} y + \{(.6401) - (.6814)\} z = 0$$

da cui $-1.1254 + 1.6913 y - .0413 z = 0$

- Per il lato che costituisce l'intersezione del piano γ

$$\{(.6401)(.0611) - (-1.0366)(-1.6745)\} + \{(-1.0366) - (.0611)\} y + \{(-1.6745) - (.6401)\} z = 0$$

da cui $-1.6962 - 1.0977 y - 2.3141 z = 0$.

Si devono quindi "normalizzare" i coefficienti delle equazioni, dividendo ogni equazione per la radice quadrata della somma dei quadrati dei coefficienti. Le tre equazioni assumono allora la forma seguente:

$$\begin{aligned} -.4241 & \quad -.2213 y & \quad .8781 z & = 0 \\ -.5539 & \quad .8324 y & \quad -.0203 z & = 0 \\ -.5521 & \quad -.3573 y & \quad -.7533 z & = 0 \end{aligned}$$

La trasposta della matrice costituita dai coefficienti delle tre equazioni e' la matrice di trasformazione Λ_{01} .

$$\begin{aligned} -.4241 & \quad -.5539 & \quad -.5521 \\ -.2213 & \quad .8324 & \quad -.3573 \\ .8781 & \quad -.0203 & \quad -.7533 \end{aligned} = \Lambda_{01}$$

Dal confronto risulta che la matrice ottenuta con l'altro procedimento corrisponde a questa con sufficiente approssimazione (i primi due decimali sono identici in tutti gli elementi). Per i segni le due matrici sono l'una l'inversa dell'altra, ma cio' non porta a nessun cambiamento poiche' i fattori si possono riflettere a piacimento. In mancanza di altri criteri differenziali e' preferibile adoperare la matrice che avendo un piccolo numero di elementi negativi dara' una maggioranza di saturazioni positive.]

Ottenuta la matrice di trasformazione Λ_{01} possiamo calcolare le proiezioni dei vettori-tests nei vettori fattoriali ruotati, moltiplicando la matrice fattoriale originaria per la matrice di trasformazione Λ . Se moltiplichiamo per Λ_{01} la matrice dei vettori estesi E_0 , otter-

remo la matrice ruotata V_E che avra' pure i vettori estesi, e quindi per poter ottenere la matrice ruotata V_1 dovremo dividere ogni riga della matrice per lo stesso coefficiente per il quale la riga corrispondente della matrice centroide era stata moltiplicata per trasformare la matrice centroide nella matrice dei vettori estesi (v. tab. 121). Ma possiamo evitare queste operazioni moltiplicando la matrice centroide F_0 per la matrice di trasformazione Δ_{01} , cosi' da ottenere direttamente la matrice ruotata V_1 (1) (tab. 123).

Poiche' la matrice F_0 stabilisce i rapporti tra i vettori fattoriali e i vettori ruotati, rapporti che non rifondono nulla lungo gli assi dei vettori tests

F_0			Δ_{01}			V_1					
	A	B	C	A'	B'	C'	A'	B'	C'		
1	.507	-.850	.031	A	.422	.557	.550	1	.000	.989	.002
2	.771	-.246	.310	B	.220	-.831	.353	= 2	-.002	.639	.572
3	.638	.434	-.417	C	-.880	.017	.758	3	-.002	.001	.820
4	.504	.344	.261					4	.058	-.001	.596
5	.809	.548	.192					5	.293	-.001	.784
6	.329	.217	-.252					6	.408	-.002	.067
7	.595	.381	-.617					7	.878	.004	-.006
8	.746	-.462	-.329					8	.502	.793	-.002
9	.249	-.369	-.008					9	.031	.445	.001
Σ	5.148	-.003	.005					Σ	2.166	2.867	2.834
								Contr.	2.167	2.869	2.834

Tabella 123.

Dalla semplice lettura della matrice V_1 (tab. 123) si constata che e' stata raggiunta, con una sola rotazione, la struttura semplice, e dal confronto con il risultato delle operazioni di rotazione con il metodo radiale di cui ai paragrafi precedenti appare chiaro che i risultati dei due diversi procedimenti sono praticamente gli stessi. Costruendo i tre diagrammi $A'B'$, $A'C'$, e $B'C'$ (diagrammi che qui non sono riportati) si ottengono sostanzialmente dei diagrammi uguali ai diagrammi conclusivi della rotazione obliqua col metodo radiale.

Del resto gia' dall' esame del diagramma di fig. 117 risultava che i punti 1, 2, 3 (cioe' i vettori-tests 1, 2, 3), trovandosi sulla traccia del piano α , giacciono sul piano α ed hanno quindi proiezione nulla sul vettore fattoriale di riferimento A' , perpendicolare ad α ; i punti 3, 4, 5, 6, 7 si trovano sulla traccia o in prossimita' della trac-

(1) Siccome con l'operazione di estensione dei vettori-tests, gli angoli che i vettori-tests formano tra loro e con i vettori fattoriali centroidi restano inalterati, non cambiano neppure gli angoli che i vettori-tests formano con i vettori di riferimento orientati nel senso della struttura semplice, ne' gli angoli fra i vettori centroidi e i vettori di riferimento, che costituiscono la matrice Δ . Di conseguenza la stessa matrice di trasformazione serve per calcolare le proiezioni dell'uno come dell'altro insieme di vettori sugli assi ruotati.

cia del piano β , e quindi i vettori-tests 3, 4, 5, 6, 7 hanno proiezione nulla o pressoché nulla sul vettore di riferimento B' ; e infine i punti 7, 8, 9, 1 si trovano sulla traccia del piano γ e quindi i vettori-tests 7, 8, 9, 1 hanno proiezione nulla sul vettore di riferimento C' . La struttura, indicata schematicamente in tabella 124 corrisponde a tab. 109 con la sola eccezione del test 9 che in effetti può essere considerato approssimativamente monofattoriale, data l'entità minima .031 della sua saturazione in uno dei fattori.

	A'	B'	C'
1	0	X	0
2	0	X	X
3	0	0	X
4	X	0	X
5	X	0	X
6	X	0	X
7	X	0	0
8	X	X	0
9	X	X	0

Tabella 124.

Dalla moltiplicazione $\Lambda'_{01}\Lambda_{01} = C_1$ (tab. 125) risulta che gli assi fattoriali sono moderatamente obliqui.

È chiaro che il metodo dei vettori estesi, offrendo la possibilità di raggiungere la struttura semplice con una sola rotazione appare estremamente vantaggioso in confronto al metodo radiale che procede per successivi aggiustamenti. Va notato tuttavia che l'operazione decisiva, cioè la determinazione delle tre rette che individuano le tracce dei piani, può risultare particolarmente difficile e complessa quando si lavora con dati sperimentali. Il procedimento aumenta poi notevolmente di complessità quando le dimensioni sono più di tre; allora anche il metodo dei vettori estesi rende necessario operare su più diagrammi (benché il numero di diagrammi sia minore di quello richiesto dal metodo radiale). Qui ci limitiamo a considerare il caso della struttura tridimensionale in cui l'uso del metodo dei vettori estesi è particolarmente vantaggioso, per la sua semplicità e brevità.

$$\Lambda'_{01} \cdot \Lambda_{01} = C_1$$

	A	B	C		A'	B'	C'		A'	B'	C'	
A'	[.422	.220	-.880]	A	[.422	.557	.550]	=	A'	[1.001	.037	-.357]
B'	[.557	-.831	.017]	B	[.220	-.831	.353]	=	B'	[.037	1.001	.026]
C'	[.550	.353	.758]	C	[-.880	.017	.758]	=	C'	[-.357	.026	1.002]

Tabella 125.

non controllati

7. Struttura e composizione fattoriale

L'obliquita' degli assi porta con se' una serie di complicazioni. La prima tra queste e' la distinzione tra vettori di riferimento e tracce degli iperpiani, che appare nei diagrammi utilizzati per la rotazione col metodo radiale. Finche' gli assi sono ortogonali, ogni asse fattoriale coincide con la traccia del piano (o, se gli assi sono piu' di tre, dell' iperpiano) ortogonale all' asse stesso, sicche', per ottenere proiezione zero su un asse, basta far coincidere il punto-test (che rappresenta l' estremita' del vettore-test) con l' altro asse rappresentato nel diagramma. Quando gli assi non sono ortogonali, bisogna considerare oltre agli assi (vettori di riferimento) anche le tracce dei piani perpendicolari agli assi, in quanto la traccia di un piano perpendicolare a un asse non coincide con l' altro asse (v. figg. 90 e 91).

Un' ulteriore distinzione si rende necessaria, tra saturazione di un test in un fattore, e correlazione tra il test ed il fattore, in quanto nelle nuove condizioni non sussiste piu' l' eguaglianza fra saturazione e correlazione. Si ricordera' infatti che, sia nel caso particolare dell' analisi monofattoriale (Parte I, Cap. II, § 3), sia nel caso generale dell' analisi plurifattoriale (Parte II, Cap. I, § 3), la deduzione dell' equazione $a_t = r_{tA}$ (o in generale $f_t = r_{tF}$, in cui F e' un fattore ed f e' il coefficiente di saturazione di un test in quel fattore), implicava una correlazione nulla tra i diversi fattori; quindi, nella struttura fattoriale obliqua, essendo i diversi fattori correlati tra loro, tale relazione non sussiste, cioe' $f_t \neq r_{tF}$.

La non-identita' fra i coefficienti di saturazione e i coefficienti di correlazione fra tests e fattori rende necessaria una precisazione circa la funzione e quindi l' utilizzazione dei coefficienti di saturazione f_t e dei coefficienti di correlazione r_{tF} .

Per precisare ulteriormente la distinzione fra correlazione di un test con un fattore e saturazione di un test in un fattore sara' utile riferirci al modello geometrico.

In un diagramma ortogonale, proiettare un punto su un asse significa indifferentemente tracciare, per quel punto, la perpendicolare all' asse o tracciare, per quel punto, la parallela all' altro asse, in quanto perpendicolare all' asse e parallela all' altro asse coincidono (fig. 118); ma in un diagramma non ortogonale (fig. 119) la perpendicolare ad un asse X e la parallela all' altro asse Y che passano per uno stesso punto P non coincidono, e intercettano due diversi segmenti sull' asse X . Quindi in quest' ultimo caso deve essere ulteriormente precisata la nozione di proiezione: si deve cioe' specificare se si tratta di proiezione parallela o di proiezione ortogonale.

I coefficienti di saturazione dei tests sono le proiezioni parallele sui rispettivi vettori fattoriali e corrispondono quindi, nel modello geometrico, ai segmenti intercettati su un asse dalle parallele

*a un secondo asse**equazione della corr. (traccia) variata* *$c = r_{tF}$* *e quanto gli assi non sono piu' perpendicolari? (che effetto) e c' e' 30 piu' dimensionati? Piano parallelo?*

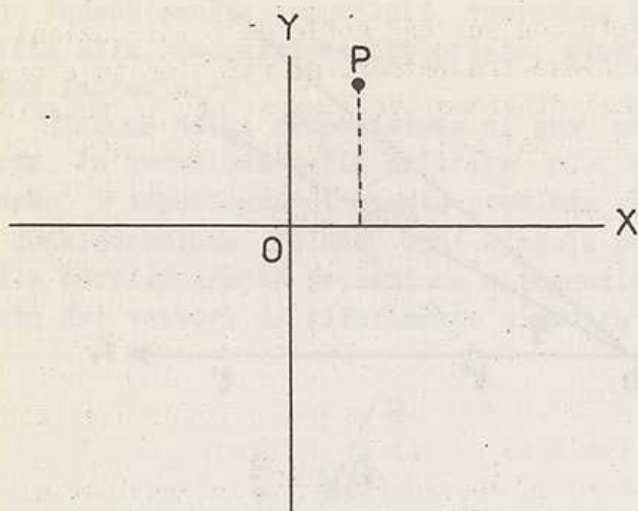


Fig. 118.

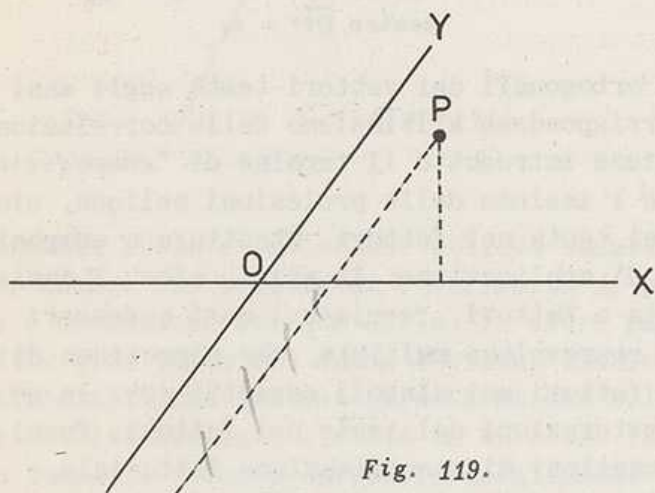


Fig. 119.

all'altro asse che passano per i punti-tests.

Ma tali segmenti non corrispondono alle correlazioni fra variabili (tests) e fattori. Sappiamo infatti che la correlazione r_{tA} di un test t con un fattore A e' il coseno dell'angolo che il vettore-test unitario forma con il vettore del suddetto fattore, cioè il segmento $\overline{Ot'}$, intercettato dalla perpendicolare all'asse A , che passa per l'estremità del vettore t (proiezione ortogonale).

Dobbiamo dunque considerare, nei diagrammi obliqui, sia le proiezioni parallele, sia le proiezioni ortogonali dei punti-tests; in quanto le misure delle proiezioni parallele sono i coefficienti di saturazione delle variabili nei fattori, mentre le misure delle proiezioni ortogonali sono i coefficienti di correlazione fra tests e fattori.

A questo punto si rende necessario riprendere in esame la nozione di struttura fattoriale che richiede un'ulteriore precisazione. Per struttura fattoriale si era inteso infatti finora l'insieme delle proiezioni di una determinata configurazione di tests sugli assi fattoriali. Ma poiché nelle strutture oblique il concetto di proiezione non è univoco, e l'insieme delle proiezioni ortogonali sugli assi fattoriali non corrisponde all'insieme delle proiezioni parallele, è necessario ricorrere a due diverse espressioni per indicare le due diverse nozioni (1). Si riserva perciò il termine "struttura fattoriale" ad indica-

(1) Precedentemente si era fatta la distinzione fra *configurazione* dei tests (o delle variabili), cioè relazioni spaziali fra vettori-tests, e

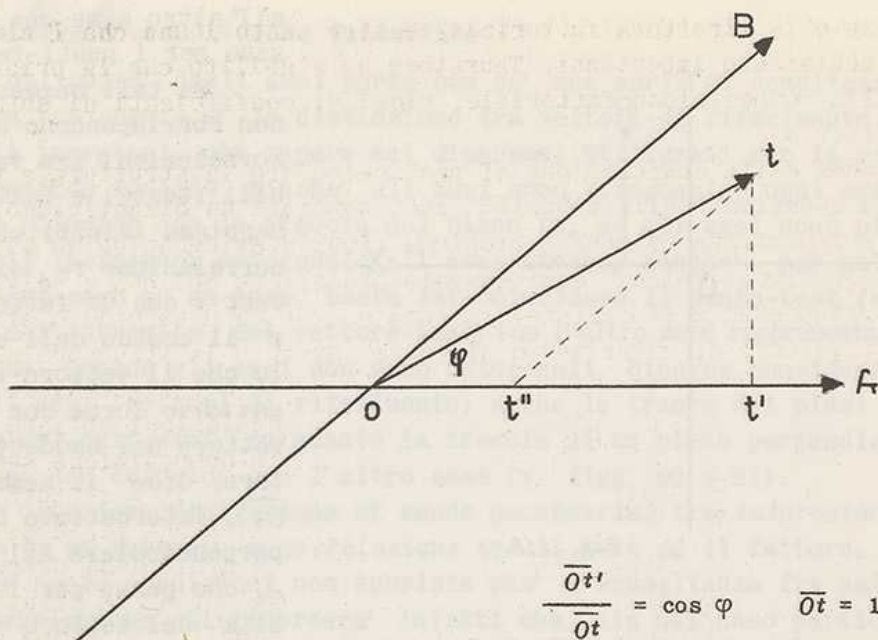


Fig. 120.

$$\frac{\overline{Ot'}}{\overline{Ot}} = \cos \varphi \quad \overline{Ot} = 1$$

quindi $\overline{Ot'} = \cos \varphi = r_{tA}$
mentre $\overline{Ot''} = \alpha_t$

re l'insieme delle proiezioni ortogonali dei vettori-tests sugli assi fattoriali, proiezioni che corrispondono all'insieme delle correlazioni fra tests e fattori, mentre viene introdotto il termine di "composizione" (1) *fattoriale* ad indicare l'insieme delle proiezioni oblique, cioè l'insieme delle saturazioni dei tests nei fattori. Struttura e composizione hanno due diversi campi di applicazione; la prima, cioè l'insieme delle correlazioni fra tests e fattori, fornisce i dati necessari per impostare le equazioni di regressione multipla, che permettono di stimare l'entità dei diversi fattori nei singoli soggetti (2), la seconda, cioè l'insieme delle saturazioni dei tests nei fattori, fornisce i dati per impostare le equazioni di specificazione fattoriale, cioè per conoscerne la composizione fattoriale dei diversi tests.

Tale distinzione pone anzitutto un problema. Qual è lo scopo precipuo dell'analisi fattoriale, la determinazione dei coefficienti di saturazione che ci consentono di scrivere l'equazione di specificazione fattoriale, o la determinazione delle correlazioni fra variabili e fattori che ci consentono di scrivere l'equazione di regressione multipla per il calcolo delle misure probabile dei fattori? La composizione

struttura fattoriale, cioè proiezioni dei tests sui fattori. Qui, dovendosi prendere in considerazione - come si vedrà in seguito - due diversi tipi di proiezioni, ortogonali e parallele, il termine di struttura viene usato ad indicare soltanto le prime.

(1) *Factor "Pattern"*.

(2) Vedi Cap. IV, Parte I. Infatti i coefficienti di regressione multipla si calcolano a partire dalle correlazioni.

fattoriale o la struttura fattoriale? Mentre tanto l'una che l'altra sono indubbiamente importanti, Thurstone ha stabilito che la priorità spetta alla composizione fattoriale, cioè ai coefficienti di saturazione fattoriale.⁽¹⁾

Siccome dalla composizione si può calcolare la struttura e viceversa, la questione della priorità può sembrare un bizantinismo. Senonché l'importanza di questo problema risulta evidente da un'ulteriore considerazione. Poiché ogni singola proiezione obliqua è diversa dalla corrispondente proiezione ortogonale, per un determinato orientamento dei vettori di riferimento si potrà avere o la struttura semplice

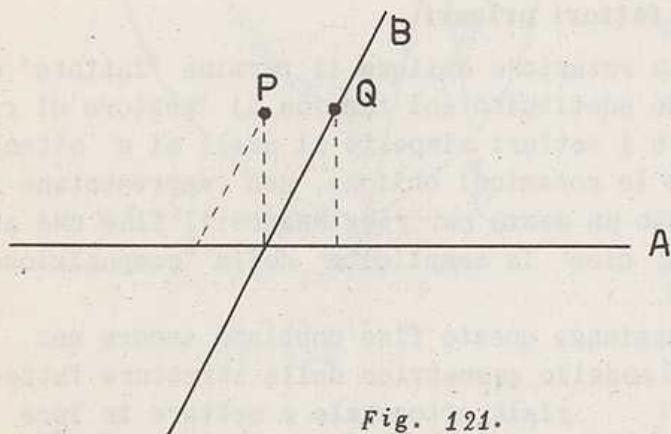


Fig. 121.

nei riguardi delle proiezioni oblique, cioè la composizione semplice, o la struttura semplice nei riguardi delle proiezioni ortogonali, cioè la struttura semplice in senso stretto; ma mai l'una e l'altra. Consideriamo infatti il diagramma di fig. 121.

Il punto-test *P* ha sul vettore di riferimento *A*, proiezione ortogonale nulla e proiezione obliqua negativa, mentre il punto-test *Q*

ha, sempre sul vettore di riferimento *A*, proiezione ortogonale positiva e proiezione obliqua nulla. In altre parole, in una *composizione semplice* gran parte dei tests dovranno essere situati rispetto ai vettori fattoriali come il test *Q* (saturazione nulla in un fattore, e saturazione sufficientemente elevata in un altro fattore) mentre in una *struttura semplice* i tests sarebbero localizzati come il test *P* (correlazione nulla con uno o più fattori, e non-nulla, cioè abbastanza elevata, in modo da non essere neppure approssimativamente nulla, con altri fattori). Non vi sono posizioni (tranne quella di un punto che coincida con l'origine degli assi) che diano ad un tempo saturazione e correlazione nulla nello stesso fattore.

È giunto il momento di chiedersi quale sia il risultato che si raggiunge ruotando, come si è fatto nei paragrafi precedenti, i vettori di riferimento in modo da ottenere una struttura semplice obliqua. Siccome l'obiettivo perseguito era quello di far coincidere il maggior numero possibile di variabili (punti-tests) con i *piani* (o in generale, con gli iperpiani) *ortogonali* ai vettori di riferimento, il risultato che si consegue è di situare i vettori di riferimento in modo da avere il maggior numero possibile di *proiezioni ortogonali nulle* dei tests

(1) Una verifica di questa tale priorità è stata ottenuta da Thurstone nell'analisi del celebre problema della comparsa di vortici e correlazioni tra i tre fattori, all'epoca largamente

sui vettori di riferimento. Si ottiene cioè una "struttura" e non una "composizione" semplice, poiché là dove le proiezioni ortogonali (correlazioni tra tests e vettori di riferimento) sono nulle, le proiezioni oblique (saturazioni) sono necessariamente non-nulle.

La soluzione a cui portano i procedimenti di rotazione obliqua non risponde dunque alla finalità posta da Thurstone, per il quale lo scopo dell'analisi fattoriale è di trovare una soluzione semplice che permetta di scrivere le equazioni di specificazione fattoriale con meno termini di quanto non siano i fattori, cioè con almeno un coefficiente di saturazione nullo per ogni equazione.

8. Vettori di riferimento e fattori primari

La ragione per cui nella rotazione obliqua il termine "fattore" o "vettore fattoriale" è stato sostituito col termine di "vettore di riferimento" è che gli assi, o i vettori rispetto ai quali si è ottenuta la struttura semplice con le rotazioni oblique, non rappresentano il fine dell'analisi, ma soltanto un mezzo per raggiungere il fine che abbiamo specificato più sopra, cioè la semplicità della "composizione" fattoriale.

Per mostrare come si raggiunge questo fine dobbiamo ancora una volta riprendere in esame il modello geometrico della struttura fatto-

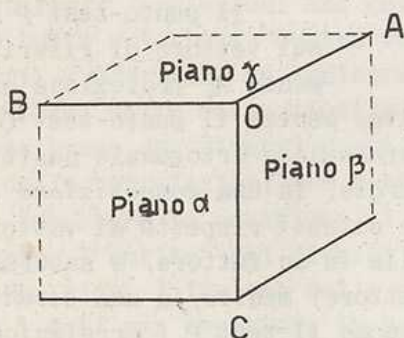


Fig. 122.

riale ortogonale e mettere in luce un'ulteriore complicazione determinata dal passaggio dalla ortogonalità alla obliquità della struttura.

A tale scopo prendiamo in esame una struttura ortogonale tridimensionale: se consideriamo soltanto i semiassi positivi essa ci si presenta come un vertice di un cubo (fig. 122), in cui concorrono tre spigoli, i quali individuano a due a due, i tre piani, che corrispondono a tre facce del cubo. I tre spigoli rappresenta-

no i tre vettori fattoriali ortogonali, mentre le tre facce corrispondono ai piani, ciascuno ortogonale ad un asse, nei quali vengono a trovarsi i vettori-tests quando si raggiunge la struttura semplice. Oltre ad essere ortogonale ad un piano ogni asse corrisponde ad uno spigolo e costituisce quindi anche l'intersezione fra due piani; cioè ogni asse costituisce l'intersezione dei piani ai quali non è ortogonale (l'asse A è ortogonale al piano α , e costituisce l'intersezione del piano β col piano γ).

Nel compiere la rotazione col metodo dei vettori estesi è risultato chiaramente che nella struttura ad assi obliqui viene a mancare

questa doppia funzione degli assi. Quando i tre assi non sono ortogonali fra loro, la retta costituita dall'intersezione di due piani α e β (cioè lo spigolo) non è ortogonale al piano γ , o, in altre parole, la normale al piano γ non coincide con lo spigolo determinato dall'intersezione dei due piani (v. fig. 123).

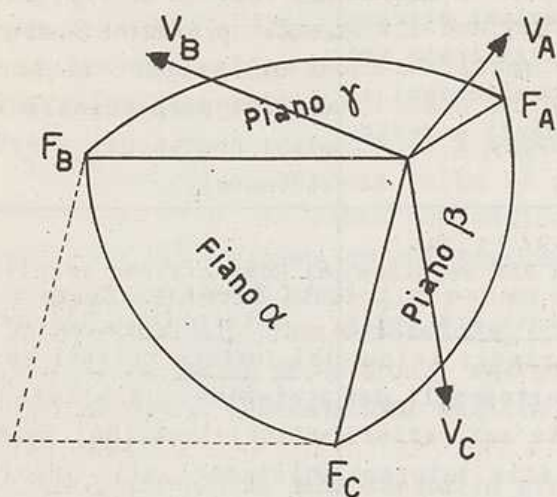


Fig. 123.

Mentre nel caso particolare della struttura ortogonale tridimensionale ci trovavamo a dover considerare soltanto una terna di rette, i tre assi ortogonali, di cui ognuno era ad un tempo l'intersezione di due piani e la normale al terzo piano, nelle strutture oblique ci si trova di fronte a due terne di rette, le tre intersezioni dei piani (i tre spigoli $F_A F_B F_C$) e le tre normali ai piani ($V_A V_B V_C$).

Tanto l'una quanto l'altra terna di rette può essere assunta come sistema di

coordinate oblique. Infatti la terna delle perpendicolari ai piani corrisponde al sistema dei vettori di riferimento, per ciascuno dei quali la posizione nello spazio viene fissata in base alla posizione assunta da uno dei piani, e cioè perpendicolarmente a tale piano.

L'altra terna di rette, costituita dalle intersezioni dei piani, è caratterizzata dal fatto che i punti-tests che si trovano su uno dei piani (comprendente due delle 3 rette) hanno proiezione *parallela* nulla sulla terza retta; così ad esempio tutti i punti-tests che si trovano sul piano α (fig. 123), piano che è individuato dalle due rette F_B ed F_C , hanno proiezione parallela nulla sulla retta F_A (1).

Ruotando dunque i vettori fattoriali in questa posizione, in modo da farli coincidere con le intersezioni dei piani che contengono i vettori-tests (gli spigoli di fig. 123) si raggiunge la *composizione fattoriale semplice*, in quanto risultano semplici (cioè costituite di meno di tre termini) le equazioni di specificazione dei tests. È questo, come si è detto, il fine che secondo Thurstone si deve raggiungere: ottenuta la struttura semplice con i vettori di riferimento (V_A, V_B, V_C ,

(1) Infatti, per ogni punto del piano α , la proiezione parallela al piano α sull'asse F_A si trova congiungendo il punto stesso al punto di intersezione del piano α con F_A , punto che corrisponde all'origine ed ha quindi proiezione nulla.

Proiezioni ortog.
in riferimento
Vettori di riferimento
 (ortogonali ai piani
 contenenti i vettori-
 tests)

Sbontare
 Proiezioni ortogonali

comporre
 Proiezioni parallele

<p>a) <u>Struttura semplice</u> Correlazioni fra tests e vettori di riferimento (cioè proiezioni ortogo- nali di vettori-tests sui vettori perpendicolari ai piani contenenti i vetto- ri-tests).</p>	<p>c) <u>Composizione non semplice</u> <u>Saturazioni dei tests</u> nei vettori di riferimento (cioè proiezioni paralle- le dei vettori-tests sui vettori perpendicolari ai piani contenenti i vetto- ri-tests).</p>
<p>b) <u>Struttura non semplice</u> <u>Correlazioni fra tests</u> e fattori primari (cioè proiezioni ortogonali dei vettori-tests sui vettori collineari alle interse- zioni fra i piani che con- tengono i vettori-tests).</p>	<p>d) <u>Composizione semplice</u> <u>Saturazioni dei tests</u> nei fattori primari (cioè proiezioni parallele dei vettori-tests sui vettori collineari alle interse- zioni fra i piani che con- tengono i vettori-tests).</p>

Cambiare
Fattori primari
 (intersezioni dei piani
 contenenti i vettori-
 tests)

Tabella 126.

in fig. 123) si deve compiere un ultimo passaggio, assumendo come vet-
 tori fattoriali le intersezioni fra i piani, che egli chiama *fattori*
primari, e realizzando in tal modo la composizione semplice.

Come vedremo in seguito, vi è la possibilità di passare median-
 te un calcolo, dalla struttura semplice alla composizione semplice,
 cioè dalla matrice delle proiezioni ortogonali dei tests sui vettori
 di riferimento (i quali, essendo raggiunta la struttura semplice, sono
 orientati ortogonalmente ai piani contenenti i tests) alla matrice del-
 le proiezioni *oblique* dei tests sui fattori primari, cioè sui vettori
 che coincidono con le intersezioni dei piani contenenti i tests. Ma non
 è questa la sola trasformazione delle coordinate di cui si offre la
 possibilità. Vi è anche la possibilità di passare dalla matrice del-
 le proiezioni ortogonali dei tests sui vettori di riferimento (orien-
 tati in modo da ottenere la struttura semplice) alla matrice delle pro-
 iezioni *ortogonali* dei tests sui fattori primari (che, come si è det-
 to, non costituiscono una struttura semplice). Vi è infatti la possi-
 bilità di ottenere (e quindi di calcolare) le proiezioni ortogonali o
 le proiezioni *oblique*, sia sui vettori di riferimento sia sui fattori
 primari, ma solo le proiezioni ortogonali sui vettori di riferimento
 (orientati come è stato detto) rappresentano una struttura semplice, e
 soltanto le proiezioni *oblique* sui fattori primari rappresentano una
 composizione semplice (tab. 126).

Contorno con 89 e 10 in fotocopia

9. Il passaggio dalla struttura semplice alla composizione semplice

Prima di considerare i procedimenti di calcolo che consentono di passare dalla struttura semplice dei vettori di riferimento alla struttura dei fattori primari o alla composizione semplice, riprendiamo in esame la trasformazione ottenuta estendendo i vettori-tests fino ad ottenere proiezione 1.000 sul primo vettore centroide A , trasformazione che ci permette di eseguire *direttamente* in modo intuitivamente evidente una rotazione degli assi tale da portarli a coincidere con le intersezioni tra i piani contenenti i tests.

Utilizziamo ancora una volta il diagramma di fig. 117, riprodotto in fig. 124, cioè il piano perpendicolare all'asse centroide A , a distanza 1.000 dall'origine, su cui appaiono le estremità dei vettori-tests estesi, e le tracce dei piani α , β e γ su cui giacciono i vettori-tests. (piano E)

Congiungendo i tre vertici del triangolo con la proiezione dell'origine otteniamo le proiezioni, sul predetto piano perpendicolare al vettore A , delle intersezioni dei tre piani, cioè dei vettori fattoriali primari. le proiezioni

Per ottenere la matrice delle proiezioni dei vettori-tests sui vettori primari (cioè sulle intersezioni dei piani contenenti i tests) occorre la matrice di trasformazione, comprendente i coseni degli angoli fra i vettori fattoriali primari e i vettori centroidi. Si tratta quindi di ottenere, al solito, le proiezioni degli assi ruotati, cioè degli assi dei fattori primari (prolungati in modo che una delle proiezioni sia 1.000), sugli assi centroidi.

Consideriamo a tale scopo uno dei vertici P_A , P_B , P_C del triangolo rappresentato in fig. 124, per es. il punto P_B . Tale punto può essere considerato l'estremità di un vettore fattoriale prolungato (1): infatti esso si trova nel piano E , e, come tutti i punti del piano E ha proiezione 1.000 sul vettore centroide A (fig. 125). test

Dunque la proiezione del punto P_B (e quindi del vettore primario prolungato F_B) sul vettore centroide A è 1.000. Le proiezioni su B e C si possono leggere direttamente sul diagramma di fig. 124, su cui sono stati proiettati i suddetti vettori fattoriali B e C , ortogonali ad A . Essi sono, rispettivamente -1.67 e $.06$; ma in questo caso particolare, poiché P_B coincide con 1 , possiamo ricavare da tab. 121 le proiezioni del vettore-test esteso 1 , che conosciamo con molta maggior esattezza, e cioè -1.6745 e $.0611$.

Nella matrice che denominiamo P_{0F} , per distinguerla dalla S_{01} e dalla L_{01} , si registrano le proiezioni dei vettori primari prolungati

(1) In questo caso particolare il punto P_B coincide con l'estremità del vettore-test 1 . Va tenuto presente però che non è affatto necessario che i vertici del triangolo corrispondano a dei punti-tests, cioè a dei punti d'incontro di vettori-tests prolungati col piano perpendicolare all'estremità del vettore fattoriale centroide. Quando ciò avviene, significa che un vettore-test coincide, per la sua direzione, con un fattore primario.

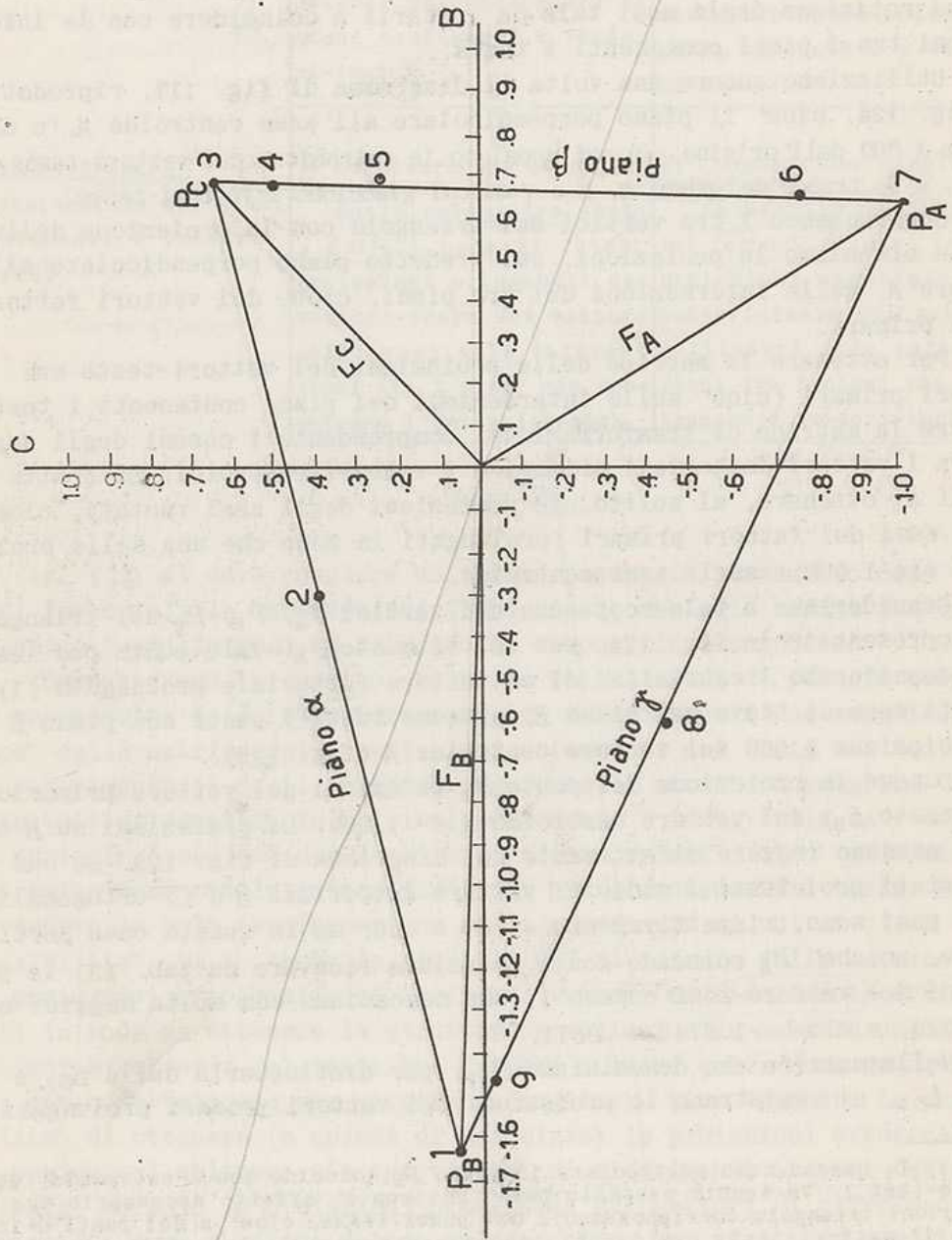


Fig. 124.

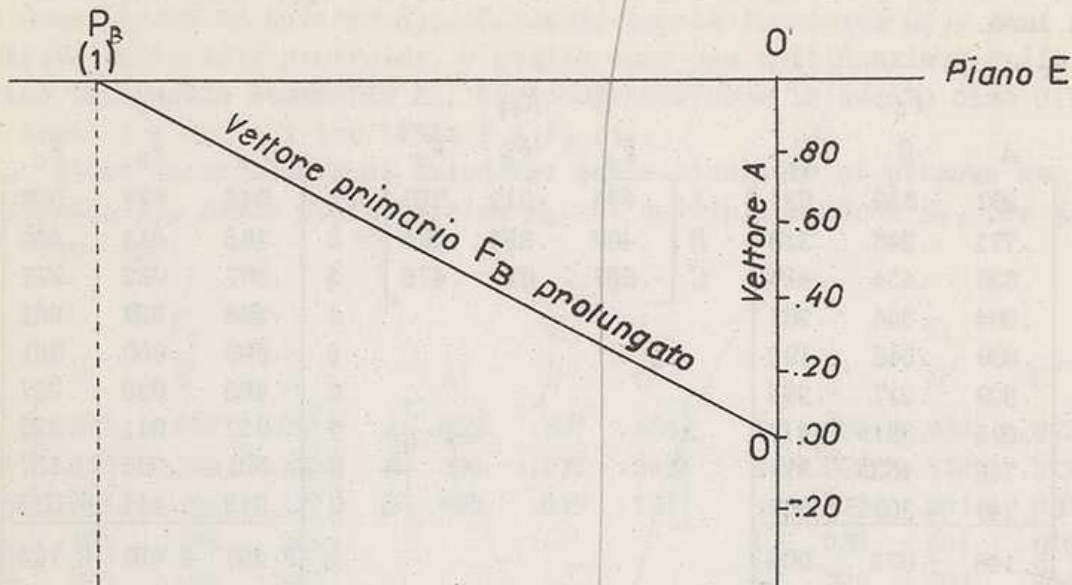


Fig. 125.

F_A, F_B, F_C , e cioè la proiezione 1.000 (per tutti e tre i vettori) sul vettore centroide A e le proiezioni dei punti P_A, P_B, P_C sui vettori centroidi B e C (v. tab. 127). Dalla matrice delle proiezioni dei vettori prolungati si passa, col solito procedimento di normalizzazione, alla matrice dei coseni degli angoli tra vettori fattoriali originari e vettori fattoriali ruotati, matrice che, per distinguerla dalla Δ_{01} denominiamo $K_{0F} \cdot T_{OP}$

cioè, tra Vettori fattoriali ortogonali e vettori fattoriali primari

	P_{OP}			$T_{OP} K_{0F}$		
	F_A	F_B	F_C	F_A	F_B	F_C
A	1.0000	1.0000	1.0000	.634	-.512	.727
B	.6400	-1.6745	.6814	.406	-.857	.495
C	-1.0366	.0611	.6547	-.657	.031	.476
Σp^2	2.4841	3.8077	1.8929			
$\sqrt{\Sigma p^2}$	1.5761	1.9513	1.3758			
$\frac{1}{\sqrt{\Sigma p^2}}$.634	.512	.727			

Tabella 127.

Moltiplicando la matrice centroide F_0 per la matrice di trasformazione K_{0F} otteniamo la matrice H_1 delle proiezioni (ortogonali) dei vettori-testi sui vettori fattoriali primari (tab. 128). In tab. 129 otteniamo, al solito, premoltiplicando la matrice di trasformazione per

la sua trasposta, i coseni degli angoli che i fattori primari formano tra loro. *noi la matrice Φ delle correlazioni tra fattori primari.*

	F_0				K_{0F}^{OP}				W_1		
	A	B	C		F_A	F_B	F_C		F_A	F_B	F_C
1	.507	-.850	.031	A	.634	.512	.757	1	-.044	.989	-.038
2	.771	-.246	.310	B	.406	-.857	.495	2	.185	.615	.586
3	.638	.434	.417	C	-.657	.031	.476	3	.307	-.032	.877
4	.504	.344	.261					4	.288	-.029	.661
5	.809	.548	.192					5	.609	-.050	.951
6	.329	.217	-.252					6	.462	-.026	.227
7	.595	.381	-.617					7	.937	-.041	.327
8	.746	-.462	-.329					8	.501	.768	.157
9	.249	-.369	-.008					9	.013	.444	-.005
Σ	5.148	-.003	.005					Σ	3.258	2.638	3.743
								Contr.	3.260	2.639	3.743

Tabella 128.

	K_{0F}'				K_{0F}				Δ		
	A	B	C		F_A	F_B	F_C		F_A	F_B	F_C
F_A	.634	-.406	-.657	A	.634	.512	.727	F_A	.998	-.043	.349
F_B	.512	-.857	.031	B	.406	-.857	.495	F_B	-.043	.998	-.037
F_C	.727	.495	.476	C	-.657	.031	.476	F_C	.349	-.037	1.000

Tabella 129.

Confrontando la matrice V_1 (tab. 123) con la matrice W_1 , si constata che quest'ultima, a differenza della prima, non è caratterizzata da semplicità di struttura. Si tratta infatti del caso B di tab. 126: abbiamo calcolato le proiezioni ortogonali dei vettori-tests sui fattori primari, cioè la struttura dei fattori primari, che non è semplice.

Allo scopo di rendere più familiare la nozione di fattore primario e di metterne in luce le caratteristiche prendiamo in esame la matrice K_{0F} e la sua trasposta K_{0F}' . Gli elementi di queste due matrici sono i coseni degli angoli che i vettori primari formano con i vettori centroidi, cioè le correlazioni dei vettori primari con i vettori centroidi; ed anche - poiché i vettori centroidi sono ortogonali - le saturazioni dei vettori primari nei vettori fattoriali centroidi.

Per renderci conto di che cosa cioè significhi ricordiamo che nel nostro esempio tre tests (1, 3, 7) coincidevano per direzione con i tre vettori primari. Come abbiamo già fatto in un'altra occasione possiamo anche qui ricorrere all'artificio di considerare i vettori fattoria-

bulletto di vettori ortogonali

li come tests perfetti, privi di fattore specifico. Cio' posto, possiamo considerare la matrice K_{OF} , o meglio la sua trasposta K'_{OF} , come una matrice fattoriale centroide, o meglio come una continuazione della matrice fattoriale centroide F_0 , che comprenderebbe in questo caso oltre ai tests 1-9 anche i tre tests $F_A F_B F_C$ (1).

Viene fatto allora di chiedersi quale risultato si ottenga se, considerando K'_{OF} parte della matrice F_0 , si moltiplica anche K_{OF} per Δ_{01} (v. tab. 130).

F_0			Δ_{01}			V_1					
A	B	C	A'	B'	C'	A'	B'	C'			
1	.507	-.850	.031	A	.422	.557	.550	1	.000	.989	.002
2	.771	-.246	.310	B	.220	-.831	.353	2	-.002	.639	.572
3	.638	.434	.417	C	-.880	.017	.758	3	-.002	.001	.820
4	.504	.344	.261					4	.058	-.001	.596
5	.809	.548	.192					5	.293	-.001	.784
6	.329	.217	-.252					6	.408	-.002	.067
7	.595	.381	-.617					7	.878	.004	-.006
8	.746	-.462	-.329					8	.502	.793	-.002
9	.249	-.369	-.008					9	.031	.445	.001

K'_{OF}

	A	B	C
F_A	.634	.406	-.657
F_B	.512	-.857	.031
F_C	.727	.495	.476
Σ	7.021	.041	-.145

D

	A	B	C
F_A	.935	.004	-.006
F_B	.000	.998	.002
F_C	-.003	.002	.935
Σ	3.098	3.871	3.765
Contr.	3.099	3.873	3.766

Possibile moltiplicazione la F_0 per Δ_{01} , Tabella 130. in ottengono le proiezioni sui vettori test in vettori di riferimento A', B', C', e viceversa che eseguendo la moltiplicazione per la matrice K'_{OF} in ottengono le proiezioni sui vettori primari F_A, F_B, F_C .

Eseguito la moltiplicazione si sono calcolate le proiezioni di F_A, F_B, F_C sui vettori di riferimento disposti ortogonalmente ai piani su cui giacciono i vettori-tests, in modo da realizzare la struttura semplice.

Il risultato della moltiplicazione e' una matrice diagonale D, cioe' una matrice che ha non-nulli soltanto gli elementi che costituiscono la diagonale principale.

(1) La ragione per cui la trasposta di K_{OF} ha questo carattere e' che, date le regole della moltiplicazione di matrici (riga per colonna), le matrici moltiplicatrici si devono disporre per colonne anziche' per righe, cioe' si devono scrivere trasposte.

in i vettori primari e vettori di riferimento o in altre parole i coseni degli angoli che i vettori primari formano con i vettori di riferimento

Non si tratta di un risultato fortuito. Basta pensare che i fattori primari costituiscono ognuno l'intersezione di due dei tre piani α , β , γ , e che ciascuno di tali piani e' ortogonale a uno dei tre vettori di riferimento V_A , V_B , V_C , per rendersi conto che ogni vettore primario, giacendo su due di tali piani, ha proiezione nulla su due vettori di riferimento, e proiezione non nulla su uno soltanto, cioe' sul terzo. La moltiplicazione di matrici $K'_{0F} \Delta_{01} = D$ puo' servire dunque di controllo dei calcoli.]

La struttura dei fattori primari, cioe' l'insieme delle proiezioni ortogonali dei vettori-tests sui vettori primari (la matrice W_1) serve, come si e' detto, per calcolare la misura probabile dei fattori primari di un soggetto, in quanto, per calcolare i coefficienti dell'equazione di regressione multipla, occorrono appunto tali proiezioni ortogonali, che sono i coefficienti di correlazione dei tests con i fattori primari. Le proiezioni oblique dei vettori-tests sui vettori fattoriali primari costituiscono invece la composizione fattoriale dei fattori primari, cioe' l'insieme delle saturazioni dei tests nei fattori, che sono i coefficienti delle equazioni di specificazione fattoriale e servono per interpretare fattorialmente i tests. La composizione fattoriale dei vettori primari si ottiene facilmente dalla struttura dei vettori di riferimento, in quanto le colonne della matrice W_C (saturazioni dei tests nei fattori primari, cioe' composizione fattoriale) sono proporzionali a quelle della matrice V (correlazioni dei tests con i vettori di riferimento, cioe' struttura fattoriale) (1); la formula per il calcolo, la cui deduzione richiede un po' di algebra matriciale (2) e

(1) Cio' equivale a dire che una delle due matrici e' uguale all'altra, moltiplicata per una matrice diagonale. Infatti moltiplicare una matrice per una matrice diagonale significa moltiplicare tutti i termini della 1a colonna per il I termine della diagonale, tutti i termini della 2a colonna per il II termine della diagonale, ecc.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}X_{11} & a_{12}X_{22} & a_{13}X_{33} \\ a_{21}X_{11} & a_{22}X_{22} & a_{23}X_{33} \\ a_{31}X_{11} & a_{32}X_{22} & a_{33}X_{33} \end{bmatrix}$$

(2) Per dedurre l'equazione che permette il calcolo della matrice W_C i cui elementi sono le saturazioni (cioe' le proiezioni oblique) dei tests nei fattori primari, dobbiamo anzitutto definire alcuni simboli:

z = matrice dei risultati dei soggetti nei tests (le righe corrispondono ai tests e le colonne ai soggetti), in unita' normalizzate, cioe' unita' standard divise per \sqrt{n} [percio' i termini saranno simboleggiati da $z^{(n)}$].

F_p = matrice delle misure dei soggetti nei fattori (le righe corrispondono ai fattori e le colonne ai soggetti), pure in unita' normalizzate [$f^{(n)}$].

Il vantaggio delle unita' normalizzate e' la semplificazione della formula della correlazione che si riduce a una somma di prodotti [$r_{xy} = \sum z_x^{(n)} z_y^{(n)}$].

e una matrice di correlazioni puo' quindi venir espressa mediante una moltiplicazione di matrici; per es. $zz' = R$, cioe' la matrice dei risultati dei soggetti, moltiplicata per la sua trasposta, e' uguale alla matrice delle correlazioni. Cio' premesso ($z = W_C F_p$), infatti ogni elemento di z , $z_{tp} = W_{At} f_{Ap} + W_{Bt} f_{Bp}$, $z F_p' = W_C F_p F_p'$, ma $F_p F_p'$ e' la matrice delle correlazioni fra i fattori

in particolare la nozione di inverso di una matrice (vedi nota 1 a pie' di pagina) e' :

$$W_C = V D^{-1}$$

in cui D^{-1} e' l'inverso della matrice D (1) (tab. 130).

primari, in quanto i termini della matrice-prodotto sono le somme dei prodotti delle misure dei soggetti in due fattori.

Quindi $F_p F_p' = \Delta = K_{OF}' K_{OF}$ (v. tab. 129) e percio'

$$z F_p' = W_C' K_{OF}' K_{OF}$$

ma $K_{OF}' \Lambda_{OV} = D$ e quindi

$$K_{OF}' = D \Lambda_{OV}^{-1} \quad \text{e} \quad K_{OF} = (\Lambda_{OV}')^{-1} D$$

percio'

$$z F_p' = W_C D \Lambda_{OV}^{-1} (\Lambda_{OV}')^{-1} D$$

perche' K_{OF} e' la trasposta di K_{OF}' ; e la trasposta di un prodotto $(D \Lambda_{OV}^{-1})'$ e' il prodotto delle trasposte in ordine inverso, cioe' $(\Lambda_{OV}')^{-1} D'$. Ma e' inutile scrivere D' perche' $D' = D$.

Ma il risultato del prodotto $z F_p'$ e' la matrice delle correlazioni fra i tests e i fattori primari [gli elementi della matrice prodotto sono $\sum_{i=1}^n z_{ti}^{(n)} f_{ji}^{(n)} = r_{z_t f_j}$, cioe' la correlazione fra il test t e il fattore j], cioe' la struttura dei fattori primari W . D'altra parte $W = F_0 K_{OF}$ (v. tab. 128), e $K_{OF} = (\Lambda_{OV}')^{-1} D$, quindi

$$z F_p' = W = F_0 (\Lambda_{OV}')^{-1} D,$$

e quindi

$$F_0 (\Lambda_{OV}')^{-1} D = W_C D \Lambda_{OV}^{-1} (\Lambda_{OV}')^{-1} D.$$

Semplificando,

$$F_0 = W_C D \Lambda_{OV}^{-1}$$

moltiplicando da ambo le parti per Λ_{OV}

$$F_0 \Lambda_{OV} = W_C D$$

moltiplicando da ambo le parti per D^{-1}

$$W_C = F_0 \Lambda_{OV} D^{-1}$$

equazione che permette di calcolare W_C ; disponendo gia' di V , siccome $V = F_0 \Lambda_{OV}$ (v. tab. 123) si giunge infine alla semplice relazione

$$W_C = V D^{-1}$$

(vedi G. THOMSON, *op. cit.*, Mathematical Appendix, 19).

(1) L'inverso, o valore reciproco di una matrice A e' quella matrice (A^{-1}) che premoltiplicata per A da' la cosiddetta matrice identica I , cioe' una matrice diagonale che ha gli elementi della diagonale uguali a 1 e gli altri elementi uguali a zero. Per es. una matrice identica di ordine 3 e'

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per ottenere la composizione di fattori primari basta dunque calcolare l'inverso della matrice D (tab. 130) cioè la matrice D^{-1} (tab. 131) e postmultiplicare V_1 per D^{-1} (tab. 132).

$$\begin{array}{c}
 D \\
 \begin{array}{ccc}
 A' & B & C' \\
 \begin{array}{l} F_A \\ F_B \\ F_C \end{array} \begin{bmatrix} .935 & .004 & -.006 \\ .000 & .998 & .002 \\ -.003 & .002 & .935 \end{bmatrix} \\
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 (D^{-1}) = D^{-1} \\
 \begin{array}{ccc}
 F_A & F_B & F_C \\
 \begin{array}{l} A' \\ B' \\ C' \end{array} \begin{bmatrix} 1.070 & .000 & .000 \\ .000 & 1.002 & .000 \\ .000 & .000 & 1.070 \end{bmatrix} \\
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Tabella 131.

$$\begin{array}{c}
 V_1 \\
 \begin{array}{ccc}
 A' & B' & C' \\
 \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ \Sigma \end{array} \begin{bmatrix} .000 & .989 & .002 \\ -.002 & .639 & .572 \\ -.002 & .001 & .820 \\ .058 & -.001 & .596 \\ .293 & -.001 & .784 \\ .408 & -.002 & .067 \\ .878 & .004 & -.006 \\ .502 & .793 & -.002 \\ .031 & .445 & .001 \\ 2.166 & 2.867 & 2.834 \end{bmatrix} \\
 \end{array}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 D^{-1} \\
 \begin{array}{ccc}
 F_A & F_B & F_C \\
 \begin{array}{l} A' \\ B' \\ C' \end{array} \begin{bmatrix} 1.070 & .000 & .000 \\ .000 & 1.002 & .000 \\ .000 & .000 & 1.070 \end{bmatrix} \\
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 W_C \\
 \begin{array}{ccc}
 F_A & F_B & F_C \\
 \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ \Sigma \end{array} \begin{bmatrix} .000 & .991 & .002 \\ -.002 & .640 & .612 \\ -.002 & .001 & .877 \\ .062 & -.001 & .634 \\ .314 & -.001 & .839 \\ .437 & -.002 & .072 \\ .939 & .004 & -.006 \\ .537 & .795 & -.002 \\ .033 & .446 & .001 \\ 2.318 & 2.873 & 3.029 \end{bmatrix} \\
 \end{array}
 \end{array}$$

Contr. 2.318 2.873 3.032

Tabella 132.

dunque, una volta ottenuta la struttura semplice rispetto al sistema dei vettori di riferimento, si passa mediante un semplice calcolo, alla composizione semplice rispetto al sistema dei fattori primari, e con ciò si raggiunge quella che è la finalità dell'analisi fattoriale secondo Thurstone.

La matrice identica, pre- o post-moltiplicata per un'altra matrice la lascia invariata.

L'inverso di una matrice ha, nel calcolo con matrici, le stesse funzioni che ha nel calcolo numerico, il valore reciproco di un numero: la moltiplicazione per l'inverso di una matrice corrisponde all'operazione del dividere per la matrice suddetta.

Soltanto le matrici quadrate non singolari, cioè quelle matrici quadrate il cui determinante è diverso da zero, hanno un inverso.

Il calcolo dell'inverso di una matrice è lungo e complesso, tranne per le matrici diagonali: l'inverso di una matrice diagonale è una matrice i cui elementi sono il valore reciproco dei corrispondenti elementi della matrice originaria. Siccome D è una matrice diagonale, è molto semplice calcolarne l'inverso cioè D^{-1} .

La ragione per cui il sistema dei fattori primari gode della proprietà di fornire una descrizione semplice ed adeguata (1) delle variabili, in termini di equazioni di specificazione, risulta chiara considerando che ottenere la struttura semplice ruotando i vettori di riferimento, significa ottenere che la maggior parte delle variabili coincidano con i piani. Ma le variabili che stanno in un piano sono punti del piano, e come tali vengono descritte adeguatamente mediante le loro proiezioni su un sistema di due assi appartenenti al piano; cioè sono definiti ciascuno mediante un'equazione (l'equazione di specificazione) i cui coefficienti sono soltanto le proiezioni sui due fattori primari che appartengono al piano (in quanto costituiscono i due spigoli che limitano il piano) (2).

Resta ora da generalizzare quanto è stato detto, dato che, per poter fare riferimento ad una rappresentazione spaziale, abbiamo considerato finora soltanto il caso particolare rappresentato da una struttura tridimensionale.

In uno spazio ad r dimensioni, quando cioè i fattori comuni sono r , ed $r > 3$, quelli che in uno spazio a 3 dimensioni erano i 3 piani contenenti i vettori-tests, sono gli r iperpiani (spazi ad $r-1$ dimensioni); e la struttura semplice è caratterizzata dal fatto che i vettori di riferimento sono normali agli iperpiani, uno ad ogni iperpiano.

Alle intersezioni dei piani, che nello spazio fattoriale tridimensionale definiscono i vettori primari, corrispondono nello spazio fattoriale r -dimensionale le intersezioni degli iperpiani, che definiscono pure - sebbene in modo non intuibile - i vettori primari.

Tutti i vettori-tests che giacciono in un iperpiano hanno proiezione ortogonale nulla sul vettore di riferimento normale all'iperpiano e proiezione obliqua nulla sul vettore primario che costituisce la intersezione di tutti gli altri iperpiani, escluso quello in cui giacciono i suddetti tests.

Il calcolo delle saturazioni nei fattori primari (matrice W_C) è semplice quando lo spazio fattoriale è a tre dimensioni, perché allora applicando il metodo dei vettori estesi si ottiene agevolmente, sia la matrice W (cioè la struttura rispetto ai vettori di riferimento) sia la matrice K_{OF} (dei coseni degli angoli tra vettori centroidi e vettori primari) dalla quale si ricava la matrice D necessaria per il calcolo della matrice W_C . Ma quando le dimensioni dello spazio fattoriale sono più di tre, l'applicazione del metodo dei vettori estesi diventa complessa e può quindi risultare preferibile raggiungere la strut-

(1) Cioè tale da offrire un'interpretazione soddisfacente in termini psicologici, o, in generale, nei termini di quella scienza alla quale si riferiscono i dati dell'analisi.

(2) Cioè il fattore primario che non appartiene al piano considerato, non serve a definire i punti, i quali hanno infatti proiezione obliqua nulla sull'asse di tale fattore.

x cioè individuare i piani in cui giacciono le variabili.

xx) è basta individuare le estremità poiché l'ordine è

le estremità (xx)

*le
Ta*

elaborazione semplice

il metodo dei vettori estesi

tura semplice per successivi tentativi prendendo in considerazione due assi per volta, col metodo radiale.

In questo caso la matrice D si ottiene per un'altra via. La matrice delle intercorrelazioni (o dei coseni degli angoli) fra i fattori primari Δ si ottiene, al solito, premoltiplicando la matrice delle intercorrelazioni (o dei coseni degli angoli) tra vettori primari e vettori centroidi K_{OF} per la trasposta. Cioè

$$\Delta = K'_{OF} K_{OF} \quad (\text{tab. 129}).$$

Ma abbiamo veduto anche

$$K'_{OF} \Lambda_{OV} = D$$

quindi

$$K'_{OF} = D \Lambda_{OV}^{-1} \quad \text{e} \quad K_{OF} = (\Lambda'_{OV})^{-1} D \quad (1).$$

Si può perciò operare la sostituzione in Δ

$$\Delta = D \Lambda_{OV}^{-1} (\Lambda'_{OV})^{-1} D$$

Ma il prodotto di due matrici inverse è l'inverso del prodotto delle due matrici in ordine inverso. Cioè

$$\Lambda_{OV}^{-1} (\Lambda'_{OV})^{-1} = (\Lambda'_{OV} \Lambda_{OV})^{-1}$$

quindi

$$\Delta = D (\Lambda'_{OV} \Lambda_{OV})^{-1} D.$$

Questa formula permette di calcolare la matrice diagonale D , necessaria per applicare la formula $W_c = VD^{-1}$ per il calcolo della composizione fattoriale relativa ai fattori primari.

La matrice Δ presenta una importante particolarità; gli elementi della diagonale principale sono tutti unitari; infatti, trattandosi dei coseni degli angoli che formano tra loro i vettori primari, gli elementi della diagonale, che rappresentano i coseni degli angoli che ogni vettore forma con se stesso, devono essere tutti pari ad 1.00, dato che l'angolo che un vettore forma con se stesso è di 0 gradi.

Perciò, calcolato il prodotto delle matrici $\Lambda'_{OV} \Lambda_{OV}$ (2) e l'inverso della matrice-prodotto (3), si tratta semplicemente di calcolare

(1) La trasposta del prodotto di due matrici (K e' la trasposta di K') e' il prodotto delle trasposte delle due matrici, in ordine inverso, se $A = BC$. $A' = C'B'$.

(2) Ricordiamo che la matrice Λ_{OV} e' la matrice di trasformazione che moltiplicata per la matrice fattoriale centroide da' la matrice della struttura semplice dei tests rispetto ai vettori di riferimento. Si tratta quindi di un dato di cui si dispone.

(3) Il calcolo dell'inverso di una matrice e' lungo e complicato, tanto che spesso gli sperimentatori preferivano limitarsi a fornire come risultato

quella matrice diagonale che pre- e postmoltiplicata per il suddetto inverso, rende unitari gli elementi della sua diagonale principale.

Tale calcolo e' semplicissimo. Premoltiplicando una matrice per una matrice diagonale, i termini di ogni riga della matrice vengono moltiplicati per il termine della riga corrispondente della matrice diagonale, e postmoltiplicando una matrice per una matrice diagonale, i termini di ogni colonna della matrice vengono moltiplicati per il termine della colonna corrispondente della matrice diagonale, cioe'

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & by & cx \\ dy & ey & fy \\ gz & hz & iz \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & by & cz \\ dx & ey & fz \\ gx & hy & iz \end{bmatrix}$$

Premoltiplicando e postmoltiplicando una matrice per la stessa matrice diagonale, gli elementi della diagonale principale vengono moltiplicati due volte per lo stesso elemento della matrice diagonale, cioe' vengono moltiplicati per il quadrato di tale elemento. Infatti, moltiplicando la matrice $B = DA$ per D si ottiene

$$B = DA \quad D \quad C = DAD$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x & a_{12}x & a_{13}x \\ a_{21}y & a_{22}y & a_{23}y \\ a_{31}z & a_{32}z & a_{33}z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x^2 & a_{12}xy & a_{13}xz \\ a_{21}yx & a_{22}y^2 & a_{23}yz \\ a_{31}zx & a_{32}zy & a_{33}z^2 \end{bmatrix}$$

Si tratta dunque di stabilire quale valore dare ad x , y e z , affinche' $a_{11}x^2$, $a_{22}y^2$, $a_{33}z^2$ siano uguali a 1.00. Risolvendo per x l'equazione $a_{11}x^2 = 1$ si ha

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{a_{11}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}$$

cioe' prendendo in considerazione soltanto la radice reale $\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}$.

Quindi la matrice D e'

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} & 0 & 0 & \dots\dots \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} & 0 & \dots\dots \\ 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{\sqrt{a_{kk}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

la matrice V , cioe' la struttura semplice rispetto ai vettori di riferimento. Attualmente, con l'uso dei calcolatori elettronici tale difficolta' non sussiste.

essendo K l'ordine della matrice quadrata $(\Lambda_0' \nu \Lambda_0 \nu)^{-1}$.

In altre parole, ottenuto l'inverso della matrice $(\Lambda_0' \nu \Lambda_0 \nu)$ si può costruire la matrice D (necessaria per ottenere la matrice delle saturazioni dei tests nei fattori primari), in quanto gli elementi della diagonale D sono ognuno il reciproco della radice quadrata del corrispondente elemento della diagonale principale della matrice $(\Lambda_0' \nu \Lambda_0 \nu)^{-1}$.

Ottenuta in tal modo la matrice D , se ne calcola l'inverso D^{-1} , e quindi, postmoltiplicando la matrice V_1 (che rappresenta la struttura semplice ottenuta per successive approssimazioni col metodo radiale) per D^{-1}

$$V \cdot D^{-1} = W_C$$

si ottiene la matrice W_C delle saturazioni dei tests nei fattori primari $F_A F_B F_C$ (composizione semplice).

*come si calcola
l'inverso di una matrice
triangolare? v. nota n. p. 326*

*Non c'è la matrice
delle correlazioni
tra i fattori primari
2.*

ste più'. Dovendo calcolare l'inverso di una matrice di ordine superiore a 3 conviene senz'altro ricorrere ad un calcolatore elettronico.

L'INTERPRETAZIONE DELL'ANALISI FATTORIALE

Capitolo VII

1. Interpretazione, stima e utilizzazione dei fattori

1. Il risultato dell'analisi fattoriale e' rappresentato da una matrice fattoriale - la matrice fattoriale ortogonale ruotata - in modo da realizzare la semplicita' della struttura, o, nel caso piu' comune di obliquita' della struttura, la matrice dei fattori primari che esprime la composizione semplice (1).

Raggiunto tale risultato si passa a formulare un'ipotesi sul significato dei fattori.

In una matrice fattoriale che esprime una struttura semplice, ogni fattore satura un numero limitato di variabili (tests). Si tratta quindi di trovare cio' che e' comune alle variabili saturate; se i fattori sono bipolari, cioe' hanno anche saturazioni negative sostanziali, si tratta di mettere in evidenza cio' che e' comune oltre che nelle variabili saturate positivamente, anche nell'inverso delle variabili saturate negativamente (2).

Consideriamo un esempio particolarmente semplice di tale procedimento, ricavato da uno studio di G. Lepore (3).

La matrice fattoriale ruotata [struttura semplice obliqua (4)] si riferisce alla seguente batteria di 12 tests (5):

(1) Ci riferiamo al metodo di Thurstone.

(2) Qui ci limitiamo a dare un esempio relativo a una matrice fattoriale ruotata in cui oltre alla struttura semplice e' presente anche l'"insieme positivo". Esempi di interpretazione di strutture fattoriali con fattori bipolari si trovano nell'ultimo paragrafo di questo capitolo.

(3) G. LEPORE, Costruzione e analisi fattoriale di una batteria di tests attitudinali, *Rivista di Psicologia sociale*, 1957, 3.

(4) Va tenuto presente che spesso ci si accontenta di raggiungere la struttura semplice obliqua, che, quando l'obliquita' degli assi e' limitata, differisce di poco dalla composizione semplice.

(5) *Op. cit.*, Tab. 2.

- Test 1. **PROBLEMI.** Il soggetto deve trovare la soluzione di una serie di problemi aritmetici presentati verbalmente.
- Test 2. **CALCOLO.** Il soggetto deve eseguire un certo numero di operazioni aritmetiche elementari.
- Test 3. **ANALOGIE.** Fra quattro parole il soggetto deve scegliere le due che meglio si adattano per completare un'analogia verbale di cui sono noti solo i primi due termini.
- Test 4. **SIMILI-CONTRARI.** Il soggetto deve scegliere fra quattro parole le due che hanno un significato simile o contrario.
- Test 5. **QUADRATI.** Fra quattro figure geometriche piane, il soggetto deve scegliere quella che permette di costruire un quadrato con le due parti di cui si compone.
- Test 6. **CUBI.** Fra varie figure geometriche solide il soggetto deve scegliere quelle che permettono di formare un cubo.
- Test 7. **RICONOSCIMENTO DI FORME.** Dati due gruppi di figure geometriche identiche, ma disposte in modo diverso nei due gruppi, il soggetto deve ricercare nel secondo gruppo ciascuna figura del primo.
- Test 8. **CONFRONTO DI PAROLE.** Il soggetto deve controllare se due parole nella loro espressione grafica sono uguali o diverse.
- Test 9. **CONFRONTO DI NUMERI.** Il soggetto deve controllare se due numeri composti di varie cifre sono identici oppure no.
- Test 10. **TRACCIAMENTO.** Il soggetto deve tracciare una linea avendo cura di non toccare determinati punti.
- Test 11. **PUNTEGGIATURA.** Il soggetto deve collocare dei punti in un certo numero di cerchietti disegnati a varia distanza fra di loro.
- Test 12. **SEGUIRE.** Il soggetto deve seguire con lo sguardo il percorso di una linea facente parte di un gruppo di linee variamente intrecciate fra loro.

Il Lepore interpreta i fattori nel modo seguente (1):

1) Il fattore I presenta le saturazioni più elevate nei tests *Quadrati*, *Cubi*, *Riconoscimento di forme* e *Seguire*, che hanno tutti un contenuto spaziale: senza dubbio esso corrisponde al fattore *spaziale* trovato da altri autori e può essere indicato con la lettera 'S'. Questo fattore presenta saturazioni praticamente zero nei tests di contenuto verbale e numerico.

2) Il fattore II presenta le massime saturazioni nei tests *Confronto di parole* e *Confronto di numeri*. È evidente che esso è di natura percettiva perché l'esecuzione dei tests ora ricordati richiede essenzialmente velocità ed accuratezza di percezione di parole e di numeri nella loro espressione grafica, indipendentemente da qualsiasi significato. Questo fattore presenta saturazioni praticamente zero nei tests *Analogie* e *Simili-contrari* che hanno anche un contenuto verbale, ma la cui esecuzione implica la conoscenza del significato delle parole ed un riconoscimento

(1) LEPORE, *op.cit.*, pp. 267-268.

	I	II	III	IV	V
1. Problemi	.154	.347	.010	.206	.552
2. Calcolo	.005	.555	.096	.135	.577
3. Analogie	.101	-.044	.124	.523	.168
4. Simili-contrari	.003	.149	.019	.543	.012
5. Quadrati	.633	-.038	.207	.186	.135
6. Cubi	.655	-.086	.121	.082	.098
7. Riconoscimento di forme	.336	.212	.053	-.097	.180
8. Confronto di parole	-.072	.567	-.113	.143	.077
9. Confronto di numeri	.152	.626	-.053	-.102	.136
10. Tracciamento	.223	-.108	.536	.202	.029
11. Punteggiatura	.006	-.024	.453	-.040	.078
12. Seguire	.332	.130	.213	.106	.220

Tabella 133.

Da LEPORE, *op. cit.*, tab. 6. Sono stati aggiunti i nomi dei tests e le incasellature alle saturazioni piu' elevate per rendere piu' agevole la lettura.

del nesso logico che le unisce. Esso presenta una saturazione bassa nel test *Problemi* che e' formato di parole e di numeri, ma implica un ragionamento aritmetico; presenta invece una saturazione elevata nel test *Calcolo* che implica l'esecuzione di operazioni aritmetiche semplicissime, le quali non presentano alcuna difficolta' per i soggetti su cui noi abbiamo sperimentato ed in cui pertanto gioca una grande importanza la velocita' e l'accuratezza di percezione. Tale fattore puo' essere identificato con la *clerical perception* degli autori americani ed indicato con la lettera P.

3) Il fattore III presenta le piu' elevate correlazioni nei tests *Punteggiatura* e *Tracciamento* che implicano l'esecuzione grafica di punti e linee; per eseguire bene questi esercizi si richiede la giusta valutazione delle distanze e la coordinazione dei movimenti della mano con la visualizzazione effettuata. Esso puo' essere considerato di natura spaziale e motoria e puo' essere denominato di *coordinazione occhio-mano*. Corrisponde all'*aiming* degli autori americani e lo indichiamo con la lettera C.

4) Il fattore IV presenta la massima saturazione con i tests *Analogie* e *Simili-contrari*. puo' essere considerato come un fattore di *comprensione verbale* ed indicato con la lettera V.

5) Il fattore V presenta le saturazioni piu' elevate con i tests *Problemi* e *Calcolo*: il primo implica ragionamento aritmetico ed esecuzione di calcoli,

ed il secondo esecuzione di calcoli. Il fattore puo' essere interpretato di natura *numerica* ed indicato con la lettera *N*.

2. L'interpretazione rappresenta un' ipotesi che e' opportuno controllare. Nell' esempio citato il controllo non e' necessario, poiche' i fattori sono gia' noti, in quanto corrispondono alle *Primary Mental Abilities* di Thurstone o ad altri fattori ampiamente confermati da precedenti ricerche. Ma se si tratta di fattori non precedentemente noti e' necessario un controllo: si procede allora alla costruzione di un test o di un questionario o si utilizza un altro mezzo (1) idoneo a misurare direttamente il tratto che rappresenta l'interpretazione ipotetica di ogni singolo fattore, e si applicano questi strumenti di misura allo stesso campione al quale era stata applicata la batteria di tests fattorizzata, o se questo per ragioni pratiche non e' possibile, si applica tutta la batteria, insieme ai nuovi strumenti di misura, ad un nuovo campione di soggetti della stessa popolazione.

Ottenuta cosi' la matrice delle correlazioni, la si sottopone nuovamente ad analisi fattoriale: a rotazione ultimata, se l'interpretazione del singolo fattore era adeguata, il *test fattoriale* o la misura che ne assume le funzioni deve avere una saturazione molto elevata, superiore a quelle degli altri tests della batteria, nel nuovo fattore (2).

La costruzione di tests fattoriali, o di altri mezzi per una stima diretta dei fattori, e' comunque una fase naturale di una ricerca che abbia finalita' applicative, perche', una volta individuate le dimensioni essenziali (cioe' i fattori), le dimensioni arbitrarie (i tests) hanno scarso interesse (3).

Ad ogni modo, a prescindere dai tests fattoriali, va tenuto presente che le misure dei fattori dei singoli soggetti si possono stimare in base alla matrice fattoriale. La stima migliore e' quella che si ottiene impostando, per ogni fattore, l'equazione di regressione multipla (4), e introducendo poi nei diversi termini dell'equazione, i ri-

(1) Non e' necessario che la stima diretta del fattore sia costituita da un test; cosi', ad esempio, se un fattore viene interpretato come "neuroticismo", si possono sottoporre i soggetti ad un esame psichiatrico chiedendo allo psichiatra di valutare con un punteggio il grado di neuroticismo del singolo soggetto, o almeno di ordinare i soggetti secondo il grado di neuroticismo.

(2) Un procedimento, dovuto al Dwyer, consente di stimare le saturazioni fattoriali di una nuova variabile, non compresa nella batteria gia' fattorizzata (v. FRUCHTER, *op. cit.*, Appendice).

(3) D'altra parte benché possa apparire un vicolo vizioso, una volta accertata l'interpretazione dei fattori, leggendo la matrice fattoriale per righe anziché per colonne, ci si può rendere conto del significato fattoriale del singolo test.

(4) Vedi Parte I, Cap. IV. Si tenga presente che, nel caso di rotazione obliqua, per il calcolo delle equazioni di regressione multipla per la stima dei fattori primari occorre la matrice delle *correlazioni* fra tests e fattori primari (e non la matrice delle saturazioni dei tests nei fattori primari).

sultati del soggetto nei singoli tests. Sia ad esempio l'equazione di regressione multipla per la stima del fattore C

$$C_p = \beta_{1C}z_{1p} + \beta_{2C}z_{2p} + \dots + \beta_{mC}z_{mp}$$

quando sono stati calcolati i coefficienti β , si tratta soltanto di sostituire agli z i risultati del soggetto p nei vari tests (espressi in unita' standard) per calcolare la stima del fattore C del soggetto p .

Ma, come afferma Cattell (1) ben di rado il lavoro di calcolo necessario per ottenere le equazioni di regressione multipla e' giustificato dalla maggior precisione delle stime rispetto a quelle che si ottengono con mezzi di approssimazione del tutto grossolani, e cioe' utilizzando semplicemente, senza alcun coefficiente ponderale, i tests che nella matrice fattoriale risultano saturi (positivamente o negativamente) nel fattore che si vuol stimare e poco saturi in altri fattori.

Così, nell'esempio citato piu' sopra, trattandosi di stimare la misura del soggetto p nel fattore IV si puo' semplicemente calcolare la media aritmetica dei suoi risultati nei tests 3 e 4 che nella matrice fattoriale risultano saturi nel predetto fattore, e cioe':

$$z_{IVp} = \frac{1}{2} (z_{3p} + z_{4p}).$$

Naturalmente, se la batteria e' piu' ampia, e si dispone di un maggior numero di tests saturi nel singolo fattore, la stima della dotazione fattoriale di un soggetto e' piu' attendibile.

3. Disponendo delle dimensioni fattoriali di un soggetto, ci si puo' servire delle equazioni di specificazione fattoriale per stimare il suo probabile risultato nelle variabili di cui si conosce la composizione fattoriale.

Così ad esempio per una variabile j , in base alla matrice fattoriale si puo' scrivere:

$$z_{jp} = a_j A_p + b_j B_p + c_j C_p + d_j D_p + e_j E_p + s_j S_p$$

(in cui il fattore di errore casuale e' conglobato nel fattore specifico).

Ricavando a_j, b_j, c_j, d_j, e_j , dalla matrice fattoriale e disponendo di A_p, B_p, C_p, D_p, E_p [cioe' delle stime dei fattori A, B, C, D, E del soggetto p , espresse in unita' standard ($A_p = z_{Ap}$)], si puo' ottenere la misura approssimativa di z_{jp} (2).

Sorge pero' naturale l'obiezione che non vi e' ragione di stimare il risultato di un soggetto in un test, quando si puo' ottenere diret-

(1) CATTELL, *Factor Analysis*, p. 80.

(2) Si ignora la misura del fattore specifico S_{jp} il quale viene percio' trascurato: con cio' si attribuisce ad S_{jp} il valore 0, cioe' il valore medio (dato che i fattori sono misurati in unita' standard).

misura ponderata

Media

E' un'altra semplice

Esempio

2 cp

Esempio

con il risultato in un test.

X In quest caso conviene trasformare l'equazione di regressione multipla in un'equazione di regressione semplice, sostituendo ai coefficienti β altri coefficienti che permettono di misurare al posto dei risultati in unita' standard...

tamente tale risultato applicando il test al soggetto. E inoltre, perche' andare in cerca dei risultati nei tests, quando si dispone ormai dei fattori, cioe' delle reali dimensioni del fenomeno studiato?

La risposta a tutte queste obiezioni e' che le correlazioni, che in seguito vengono sottoposte ad analisi fattoriale, si possono calcolare oltre che fra tests anche fra altre variabili.

Se una batteria di tests comprende anche una variabile, come il risultato all'esame finale di un determinato tipo di scuola, o il risultato in una determinata professione, e' evidente che la previsione di una variabile di questo genere, in base all'equazione di specificazione, non mancherebbe di interesse. Naturalmente, non si tratterebbe di formulare la previsione per i soggetti del campione sul quale sono state calcolate le correlazioni per l'analisi fattoriale - perche' in questi doveva essere noto il successo scolastico alla fine della scuola (se era questa la variabile introdotta nella batteria) o il risultato professionale, ma per altri soggetti, di cui con altri mezzi (misure fattoriali dirette) siano state stimate le misure dei fattori risultati dall'analisi fattoriale della suddetta batteria. Per questi soggetti, sostituendo nell'equazione di specificazione fattoriale relativa alla variabile che ci si propone di stimare, le misure individuali dei fattori, si puo' giungere a una previsione utile agli effetti dell'orientamento scolastico o professionale.

C' e' tuttavia una grave obiezione a questo modo di procedere. Il procedimento classico di previsione di una prestazione scolastica o professionale consiste nell'impostare un'equazione di regressione multipla che mette in relazione i risultati di un soggetto in un particolare gruppo di tests con il suo risultato probabile nella prestazione che si intende prevedere (1). Orbene, se si puo' stimare una variabile direttamente dai tests, perche' seguire la via piu' lunga, e cioe' fare l'analisi fattoriale per poter sostituire i fattori ai tests, e quindi stimare la variabile per mezzo dei fattori? Non e' un giro vizioso?

L'obiezione non manca di creare una certa perplessita'; Thomson nella sua trattazione non si sente di prendere posizione a favore della via piu' lunga, tanto piu' che oltre ad essere piu' lunga e' anche quella che da' una peggiore approssimazione. Infatti all'approssimazione insita nella stima ottenuta per mezzo della regressione si aggiunge, se si usano i fattori, l'approssimazione dovuta alla stima dei fattori, i quali sono anch'essi, necessariamente, stimati con lo stesso metodo.

Una diversa posizione, nettamente ottimistica, e' quella di Cattell, il quale fa presente l'enorme vantaggio consistente nel fatto che le misure di un numero limitato di fattori consentono di fare tutta u-

(1) Il metodo, illustrato nei suoi fondamenti logici nel Cap. IV della I Parte di questo volume, e' esposto, con esempi, in ogni tests di statistica psicologica. Vedi per es., J.P. GUILFORD, *Fundamental Statistics in Psychology and Education*, New York, 1956. Cap. XVI.

na serie di previsioni riguardanti una persona, risolvendo tutta una serie di equazioni di specificazione. Ma l'argomento fondamentale a favore dell'uso dei fattori e' che mentre la previsione per mezzo dei tests e' cieca, perche' non si sa che cosa i tests abbiano in comune col "criterio", cioe' con la variabile che si intende prevedere, l'analisi fattoriale da', nell'equazione di specificazione, la composizione fattoriale del "criterio", e in questo modo rende comprensibile la previsione. Inoltre, essendo i fattori in numero ridotto di fronte alla miriade dei tests, diminuisce il rischio che con un diverso campione di soggetti il valore di previsione di una data combinazione di fattori svanisca, come non di rado avviene per una determinata combinazione di tests che pure erano stati sperimentati a tale scopo.

Cattell presenta a tale proposito un quadro avveniristico - che purtroppo continua ad essere tale anche oggi, a dieci anni dalla pubblicazione del suo volume - secondo cui lo psicologo professionista finirebbe con l'aver bisogno soltanto di due schedari: uno schedario di persone, con le loro misure standard in un piccolo numero di fattori primari di personalita' (1); e uno schedario di "situazioni" (professioni, materie scolastiche, cure psicoterapiche, ecc.) con i rispettivi coefficienti di saturazione nei vari fattori, cosi' da poter calcolare il probabile successo di ogni soggetto nelle varie situazioni.

2. Piani dell'analisi e loro significati

L'analisi fattoriale ha avuto origine dalle difficolta' inerenti al metodo dei tests, difficolta' messe in evidenza dal calcolo delle correlazioni. Per lungo tempo il metodo fattoriale e' rimasto legato ai problemi dei tests, come uno sviluppo particolare della teoria dei tests. Thurstone, pur avendo sottolineato il carattere di procedimento scientifico generale dell'analisi multifattoriale, da lui considerata come un metodo per la prima esplorazione di nuovi campi di indagine, ha sviluppato il metodo tenendo presente quasi esclusivamente il problema della struttura delle attitudini umane. Ma in seguito, pur rimanendo lo studio della struttura della personalita' l'argomento al quale e' dedicata la massima parte delle indagini, si sono aperte altre vie all'applicazione del metodo.

Il cambiamento nell'oggetto dell'indagine si ripercuote sulla struttura concettuale alla quale si e' fatto riferimento nel corso di questa esposizione: la relazione fra soggetti e tests. Non si tratta infatti soltanto di sostituire alla nozione di test una nozione piu' generale, come quella di misura o di variabile: se ai tests vengono a sostituirsi altre variabili, viene a cadere (o puo' venire a cadere) an-

(1) Nel senso lato che comprende anche le funzioni strettamente mentali.

*Tests come vettori in uno spazio li cui
dimensioni sono i soggetti*

che la nozione di soggetto o persona, altrettanto essenziale alla teoria fattoriale, in quanto i fattori sono misure individuali.

Le complicazioni non sono connesse soltanto all'estensione del metodo a campi diversi da quello della Psicologia; anche nel campo di applicazione originario si sono presentate delle possibilità nuove, che aprono nuove vie alla ricerca e hanno imposto una ristrutturazione concettuale.

Per rendersi conto di queste innovazioni, cioè dei diversi piani su cui può essere condotta l'analisi, conviene riconsiderare le modalità di applicazione del calcolo della correlazione.

Fin qui, i dati per calcolare una correlazione consistevano in due serie di misure, ottenute applicando due tests ad un campione di soggetti. Ogni soggetto forniva due misure, relative l'una all'uno e l'altra all'altro test. È questo il modo più comune di calcolare le correlazioni nelle scienze umane; ma non è l'unica via per ottenerle. Un altro procedimento, proposto da Cattell, consiste nell'applicare le due misure più volte, in tempi diversi, allo stesso individuo; in questo caso, la coincidenza fra le due misure si ottiene applicandole nelle stesse "occasioni".

Così, ad esempio, due tests possono venire applicati, ad un campione di 200 persone o invece alla stessa persona in 200 occasioni diverse. Le occasioni possono essere scelte con un particolare criterio o invece conservando costante l'intervallo (per es. il primo giorno della settimana, alle 9 del mattino); ma in ogni occasione si applicano tutti e due i tests.

È chiaro che, sia nell'uno che nell'altro caso, si può calcolare un coefficiente di correlazione fra i due tests. E in tutti e due i casi, se, anziché applicare soltanto due tests, si applica una batteria di tests, si ottiene una matrice di risultati (v. tabb. 134 e 135) dalla quale si può ricavare una matrice di correlazioni fra tests, che può essere sottoposta ad analisi fattoriale.

Handwritten notes:
 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$
 $t_1, t_2, t_3, \dots, t_m$
 matrice

	t_1	t_2	...	t_m
p_1	$X_{p_1 t_1}$	$X_{p_1 t_2}$...	$X_{p_1 t_m}$
p_2	$X_{p_2 t_1}$	$X_{p_2 t_2}$...	$X_{p_2 t_m}$
...				
p_n	$X_{p_n t_1}$	$X_{p_n t_2}$...	$X_{p_n t_m}$

Tabella 134.

Matrice di risultati ottenuti applicando m tests ad n soggetti in una stessa occasione.

	t_1	t_2	...	t_m
o_1	$X_{o_1 t_1}$	$X_{o_1 t_2}$...	$X_{o_1 t_m}$
o_2	$X_{o_2 t_1}$	$X_{o_2 t_2}$...	$X_{o_2 t_m}$
...				
o_n	$X_{o_n t_1}$	$X_{o_n t_2}$...	$X_{o_n t_m}$

Tabella 135

Matrice di risultati ottenuti applicando m tests ad uno stesso soggetto in n occasioni.

Le due matrici di risultati sono diversissime perché nella prima le righe contengono ognuna i risultati di un diverso soggetto, mentre nell'altra le diverse righe contengono i risultati di uno stesso soggetto, esaminato in occasioni diverse; tale diversità svanisce invece, almeno dal punto di vista formale, quando, tanto per l'una quanto per l'altra matrice, prendendo le colonne a due a due, si calcolano tutte le possibili intercorrelazioni e si costruiscono le due matrici delle correlazioni. Si tratta, infatti, di due matrici di intercorrelazioni fra tests, contenenti cioè l'una e l'altra altrettante misure dell'affinità (o analogia) fra gli stessi m tests, e quindi, salvo il materiale che è servito per ottenere le misure e che non compare nelle matrici di correlazioni, *formalmente* non diverse tra loro.

In altre parole, una matrice di correlazioni fra tests (o, in generale, tra variabili), ottenuta mediante una ricerca sul piano P (1) non differisce, agli effetti della fattorizzazione della matrice di correlazione, dalle classiche ricerche compiute sul piano R (batteria di tests applicata ad un campione di soggetti); cioè dal punto di vista tecnico non pongono alcun problema nuovo. I problemi nuovi sorgono quando si tratta di interpretare i risultati dell'analisi. Basti ricordare che i fattori che sul piano R rappresentano caratteri individuali, di cui ogni soggetto dispone in maggior o minor misura, sul piano P sono proprietà delle singole occasioni.

Ma la possibilità di compiere un'analisi sul piano P sta a dimostrare che in ogni ricerca compiuta con lo strumento della correlazione si devono considerare non due, ma tre ordini di fatti: a) *variabili* misurate con particolari strumenti (es.: tests); b) *oggetti*, a cui applicare le misure (per es.: persone); c) *occasioni*, in cui si applicano tali misure.

Abbiamo veduto che calcolando le correlazioni si considerano solo due dei suddetti tre ordini di fatti: così sul piano R si applica una serie di tests (2) a un campione di soggetti, mentre sul piano P si applica una serie di tests in un campione di occasioni; ma va tenuto presente che il terzo ordine di fatti, apparentemente assente, è tuttavia presente ma rappresentato da un solo membro. Ciò è evidente per l'analisi sul piano P (i tests sono applicati, in una serie di occasioni successive, *allo stesso soggetto*), ma vale anche per l'analisi sul piano R (i tests sono applicati ad una serie di soggetti *nella stessa occasione*), cioè si devono escludere differenze sistematiche dovute alle diverse circostanze in cui si applicano i tests (3).

(1) La scoperta di diversi piani dell'analisi (Cattell) esige l'uso di diversi simboli per indicare tali piani. Il piano P , è caratterizzato dall'applicazione di una batteria di tests in una serie di occasioni, ad un'unica persona.

(2) Invece di tests, od oltre ai risultati dei tests, si possono utilizzare altre misure: età, reddito, grado di istruzione, ecc.

(3) Nel caso molto comune, dell'applicazione collettiva di una batteria di tests, si realizza di fatto l'unicità dell'occasione.

(*) *Il fatto, non le rotazioni fattoriali.*

*R, B, C,
le misure
fattoriali*

Il procedimento per cui, partendo da tre ordini di fatti si sono ottenute le correlazioni sul piano R e P , considerando di volta in volta due ordini di fatti, si completa naturalmente considerando insieme le o e le p (cioè le occasioni e le persone) e trascurando le t , i tests (cioè riducendoli ad un unico membro). È chiaro che anche in queste condizioni è possibile il calcolo di una matrice di correlazioni; in che cosa consistono, e come vanno interpretate?

Per maggior chiarezza, esaminiamo la matrice dei risultati che si ottengono applicando *uno stesso test* a una serie di soggetti in una serie di occasioni diverse (tab. 136).

	o_1	o_2	...	o_n
p_1	$X_{p_1 o_1}$	$X_{p_1 o_2}$...	$X_{p_1 o_n}$
p_2	$X_{p_2 o_1}$	$X_{p_2 o_2}$...	$X_{p_2 o_n}$
...				
p_n	$X_{p_n o_1}$	$X_{p_n o_2}$...	$X_{p_n o_n}$

Tabella 136.

ce delle correlazioni che si ottengono associando le colonne a due a due e calcolando ogni volta il coefficiente di correlazione è una matrice di correlazioni fra occasioni.

Prima di interpretare il significato di queste correlazioni e quindi il significato di una eventuale fattorizzazione, va tuttavia notato

	p_1	p_2	...	p_n
o_1	$X_{o_1 p_1}$	$X_{o_1 p_2}$...	$X_{o_1 p_n}$
o_2	$X_{o_2 p_1}$	$X_{o_2 p_2}$...	$X_{o_2 p_n}$
...				
o_n	$X_{o_n p_1}$	$X_{o_n p_2}$...	$X_{o_n p_n}$

Tabella 137.

che la stessa matrice dei risultati può dar luogo ad una diversa matrice di correlazioni, calcolando cioè le correlazioni tra le righe anziché tra le colonne. Infatti non vi era nessuna ragione per scrivere la suddetta matrice C piuttosto che la sua trasposta (tab. 137), in cui, essendo le colonne costituite ciascuna dai risultati di una persona alla quale

è stato applicato lo stesso test in occasioni diverse, calcolando, come al solito, le correlazioni fra colonne, si ottiene una matrice di correlazioni tra persone.

Che cosa significa una correlazione fra due persone? Siccome lo stesso problema si presenta anche nella situazione abituale della matrice delle correlazioni R , dove è pure possibile calcolare la correlazione fra le righe anziché fra le colonne, cioè correlare fra loro

(1)	t_1	t_2	...	t_n
p_1	$X_{p_1 t_1}$	$X_{p_1 t_2}$...	$X_{p_1 t_n}$
p_2	$X_{p_2 t_1}$	$X_{p_2 t_2}$...	$X_{p_2 t_n}$
.
p_n	$X_{p_n t_1}$	$X_{p_n t_2}$...	$X_{p_n t_n}$

Tabella 138.

le persone anziche' i tests, e' preferibile esaminare il problema del significato della correlazione fra persone in questo contesto ormai familiare (tab. 138). Correlare fra loro le righe della matrice dei risultati ottenuti applicando un gruppo di tests a un campione di soggetti significa (se la matrice e' scritta secondo le consuetudini, intestando le colonne ai tests e le righe ai soggetti) cal-

colare i coefficienti di correlazione fra le persone anziche' fra i tests. E mentre e' facile rendersi conto che cio' e' tecnicamente possibile (applicando cioe' la formula di Pearson) non e' altrettanto facile rendersi conto del significato di una tale operazione.

A tale scopo e' utile riesaminare il significato della correlazione fra tests. Nell' impostazione iniziale dell' analisi fattoriale i tests erano considerati come entita' ignote o assai poco conosciute, e le correlazioni, determinandone il grado di affinita' reciproca consentivano di raggrupparli, cio' che costituiva una forma di classificazione obiettiva, e quindi di conoscenza.

Come per i tests, anche per le persone il coefficiente di correlazione misura l' affinita' reciproca e ne permette il raggruppamento. Solo che quando si calcola un coefficiente di correlazione fra due tests, si ricorre a un campione di soggetti, rappresentativo di una popolazione, per cui, applicando i tests ad un altro gruppo di soggetti, il risultato varia soltanto entro i limiti dell' errore di campionatura, rimanendo quindi approssimativamente costante. Invece i tests di una batteria non rappresentano un campione casuale di una popolazione di tests, per cui non vi e' ragione di ritenere che, usando un' altra batteria di tests, la correlazione fra due persone rimanga approssimativamente la stessa.

Si tratta comunque di una difficolta' che e' stata superata con vari mezzi, creando particolari tipi di tests che presentino la caratteristica di essere un campione casuale di una popolazione di tests (2).

(1) La possibilita' di correlare fra loro le persone anziche' i tests e' stata presentata per la prima volta contemporaneamente a G. Thomson e a W. Stephenson nel 1935, cioe' oltre 30 anni dopo il primo articolo di Spearman sull' analisi fattoriale.

(2) Un primo procedimento consiste nell' utilizzare come tests una serie di saggi (disegni, compiti) da valutare. I saggi (per es. una serie di compiti di un gruppo di scolari) fungono da tests di abilita' da giudicare; e in questo caso i tests si possono considerare come un campione rappresentativo di una popolazione di tests: ogni saggio deve essere giudicato per es. su una scala di 7 punti, e ognuno degli n giudici (soggetti) esprime il suo giudizio sugli m saggi. Si genera in tal modo una matrice $m \cdot n$ di risultati (tab. 139, in cui $t_1 - t_n$ sono i tests, e $p_1 - p_n$ i soggetti). Ogni colonna della matrice

*in tal
standard?
che stan
partic
zione?*

a/n

Con cio' le correlazioni fra persone acquistano un preciso significato in quanto costituiscono una misura dell'affinita' fra due persone rispetto a una determinata popolazione di variabili (1); e la matrice delle correlazioni fra persone ottenuta dalla trasposizione della matrice dei risultati puo' essere sottoposta ad analisi fattoriale (piano Q). I fattori cosi' ottenuti stanno alle persone come i fattori ottenuti nelle analisi compiute sul piano R stanno ai tests. Come questi ultimi rappresentano le reali dimensioni che sono presenti, combinate fra loro in misura diversa, nelle variabili arbitrarie, cosi' nell'analisi compiuta sul piano Q i fattori rappresentano i tipi, le dimensioni della personalita', combinate diversamente nelle singole persone (2).

E' chiaro che, una volta dimostrata la possibilita' dell'analisi "inversa", basata sulla trasposizione della matrice dei risultati, i piani dell'analisi da tre diventano sei; cioe', quando le due serie in relazione sono persone e tests, si possono calcolare e fattorizzare le correlazioni fra tests (piano R) o le correlazioni fra persone (piano Q); se le due serie sono tests e occasioni, si possono calcolare e fat-

e' costituita dai voti che un soggetto ha espresso sugli m saggi, cioe' dai risultati del soggetto nei tests di valutazione. Il coefficiente di correla-

	P_1	P_2	...	P_n
t_1	$X_{t_1P_1}$	$X_{t_1P_2}$...	$X_{t_1P_n}$
t_2	$X_{t_2P_1}$	$X_{t_2P_2}$...	$X_{t_2P_n}$
.				
.				
t_m	$X_{t_mP_1}$	$X_{t_mP_2}$...	$X_{t_mP_n}$

Tabella 139.

zioni fra due soggetti (ottenuto correlando fra loro gli elementi di due colonne) fornisce la misura dell'affinita' di due soggetti (nei riguardi dell'operazione di valutare dei saggi di quella determinata disciplina).

Un altro metodo utilizzabile a tale scopo e' il Q-sort, un procedimento che consiste nel valutare, secondo una scala di 5 punti, una serie di tratti psicologici, propri (autovalutazione) o di altri (eterovalutazione). I tratti che sono sempre gli stessi, per ogni operazione di valutazione, e rappresentano le variabili, dovrebbero costituire un campione rappresentativo di un universo di tratti di personalita'. Le valutazioni di tratti, cosi' ottenute, consentono di calcolare la correlazione fra le persone valutate.

Infine si possono utilizzare come tests delle "scale di valutazione" costituite ciascuna da due opposti, fra i quali deve cadere il giudizio nei riguardi di un particolare oggetto (*Differenziale semantico*, v. il n. 4 del seguente paragrafo). Per es.:

Buono	1	X	3	4	5	6	7	cattivo
Triste	1	2	3	4	X	6	7	allegro, ecc.

Anche queste scale di valutazione si possono scegliere in modo tale che esse costituiscono un campione rappresentativo di un universo di scale di valutazione; utilizzandole per valutare un campione di soggetti si ottiene una matrice di risultati "tests (cioe' scale di valutazioni) per soggetti", che consente di calcolare le correlazioni fra le persone valutate.

(1) Questo vale anche per i tests; per es. l'affinita' fra due tests di attitudine e' diversa a seconda che la popolazione di soggetti rappresentata dal campione al quale sono stati applicati i tests e' una popolazione di adulti o di bambini.

(2) I fattori possono rappresentare soltanto quelle dimensioni della per-

torizzare le correlazioni fra tests (piano *P*) o fra occasioni (piano *O*); e infine se le due serie sono persone e occasioni si possono calcolare

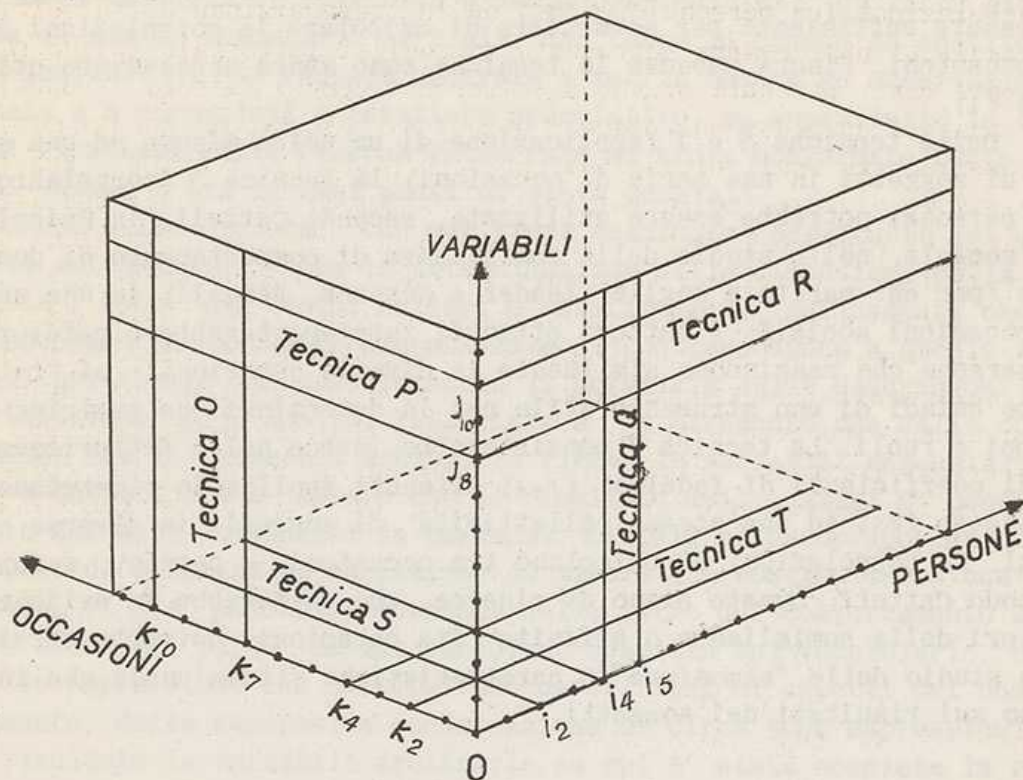


Fig. 126. - Diagramma di covarianza di Cattell (da R. B. CATTELL, *Description and measurement of Personality*, World Book Co., 1946).

e fattorizzare le correlazioni fra persone (piano *S*) e fra occasioni (piano *T*) (fig. 126).

A prescindere dal piano *R*, che comprende la grande maggioranza delle ricerche e degli studi di analisi fattoriale finora compiuti, e dal piano *Q*, sul quale sono state eseguite parecchie ricerche, soprattutto dallo Stephenson e dai suoi collaboratori, gli altri quattro piani che rappresentano altrettante tecniche di ricerca fattoriale sono stati scoperti dal Cattell.

Le ricerche sui piani *P* ed *O* sono caratterizzate dal fatto che le correlazioni e quindi i risultati dell'analisi fattoriale si riferiscono a un singolo individuo. Le due tecniche sono state proposte dal Cattell come mezzi di indagine clinica. L'indagine viene condotta (in ambedue i casi) sottoponendo una singola persona ad una serie di misure (tests psicologici, misure fisiologiche o altre determinazioni quanti-

sonalità che sono state messe in gioco dai tests utilizzati per il calcolo delle correlazioni.

tative) e ripetendo tali misure in una serie di occasioni; per la tecnica *P* il numero delle occasioni dev' essere tale da consentire il calcolo di un coefficiente di correlazione *sufficientemente attendibile* fra le due misure; mentre, per la tecnica *O*, il numero delle misure deve essere sufficiente per permettere di calcolare le correlazioni fra le occasioni. Finora ambedue le tecniche sono state scarsamente utilizzate (1).

Delle tecniche *S* e *T* (applicazione di un' unica misura ad una serie di soggetti in una serie di occasioni) la tecnica *S* (correlazione fra persone) potrebbe essere utilizzata, secondo Cattell, in Psicologia sociale, nello studio della somiglianza di comportamento di due persone (per es. marito e moglie, leader e seguace, gemelli) in una serie di occasioni sociali: i fattori ottenuti rappresenterebbero categorie di persone che reagiscono similmente in diverse occasioni - si tratterebbe quindi di uno strumento utile per la determinazione empirica di gruppi e ruoli. La tecnica *T* consisterebbe invece nella fattorizzazione di coefficienti di fedelta' (r_{tt}) ottenuti applicando ripetutamente lo stesso test ad una stessa collettivita' di soggetti in diverse occasioni. Le correlazioni si calcolano tra occasioni, e percio', sempre secondo Cattell, questo piano di ricerca, che metterebbe in evidenza i fattori della somiglianza o affinita' fra occasioni, dovrebbe servire allo studio delle "atmosfera" o caratteristiche situazionali che influiscono sui risultati dei soggetti.

3. Esempi di interpretazione dei risultati dell' analisi fattoriale, usata come strumento di ricerca

1. - Una delle piu' importanti applicazioni dell' analisi fattoriale come strumento di ricerca in Psicologia e' la determinazione della struttura della personalita'. A questo proposito e' giusto ricordare l' opera di tre studiosi di primo piano, R. Cattell, J.P. Guilford e H. Eysenck; qui accenneremo, schematicamente, ad alcuni dei risultati ottenuti dal Cattell, lo studioso che ha trattato il problema da un punto di vista generale, dedicandovi buona parte della sua feconda attivita' di ricercatore (2).

Il problema della struttura della personalita' era stato impostato in maniera affascinante e originale, nei primi decenni del secolo,

(1) La tecnica *P* e' stata utilizzata da Cattell per ricerche sui fattori di personalita' e per lo studio dell' evoluzione dei caratteri nazionali (v. il paragrafo successivo). Per la tecnica *O*, va ricordato uno studio longitudinale di una persona a diverse eta' (Burt e Watson).

(2) Gli studi di Cattell su questo problema si estendono ad oltre un ventennio. Ci limitiamo a citare *Personality. A Systematic Theoretical and Factual Study* (1950), "Personality and Motivation Theory based on Structural Measurement", in I.L. Maccary. *Psychology of Personality* (1956) e *The Scientific Analysis of Personality* (1966).

da numerosi studiosi, di diversa origine - non soltanto psicologi, ma anche psichiatri, medici costituzionalisti, biologi, filosofi e pedagogisti - ognuno dal particolare punto di vista della propria disciplina. La ricerca fattoriale, obiettiva e senza pregiudiziali, ha fatto giustizia di queste concezioni parziali, non tanto in quanto ha sostituito i risultati di una ricerca generale a teorie basate su osservazioni limitate e a concezioni a carattere speculativo, ma soprattutto in quanto nei risultati della ricerca fattoriale si trova confermato tutto ciò che di vitale c'era in quei punti di vista parziali.

Scopo della ricerca - che qui viene esaminata soprattutto nei suoi aspetti metodologici - era la determinazione delle dimensioni della personalità, cioè dei tratti unitari e relativamente indipendenti che rappresentano le variabili essenziali e si contrappongono a quelle variabili arbitrarie che costituiscono il materiale delle descrizioni fatte intuitivamente. L'analisi fattoriale è lo strumento che dalle correlazioni fra le variabili arbitrarie ricava le variabili essenziali, cioè i fattori; ma è chiaro che il risultato dell'analisi è condizionato dai dati utilizzati in partenza. Cattell si preoccupò quindi anzitutto di disporre di un insieme di misure che costituissero una campionatura il più possibile completa delle forme del comportamento umano. Perciò egli partì da una raccolta, compiuta sul vocabolario, di tutte le espressioni che costituivano descrizioni di aspetti del comportamento; dalla successiva condensazione di circa 3000 espressioni sono risultate le variabili arbitrarie su cui è stata compiuta la ricerca.

Un altro aspetto metodologico importante è costituito dal controllo dei risultati. La ricerca si è svolta lungo tre direttrici indipendenti, utilizzando dati di diversa origine:

a) *Osservazioni di comportamenti* (allo scopo di ottenere misure o stime relativamente alle variabili arbitrarie ottenute, come è stato detto, a partire dalla campionatura del vocabolario) in situazioni naturali della vita di ogni giorno.

b) *Dati introspettivi* che i soggetti fornivano su se stessi rispondendo a questionari.

c) *Risultati* ottenuti mediante l'applicazione di tests obiettivi.

I tre ordini di dati, elaborati separatamente in tre matrici di correlazioni, hanno dato luogo a tre distinte analisi fattoriali. In tal modo le tre analisi fattoriali si controllavano a vicenda dato che, se un fattore rappresenta veramente una dimensione fondamentale della personalità, esso si deve ripresentare in tutte e tre le analisi, benché in ciascuna i dati di partenza appartengano a tre diversi campi di osservazione.

L'applicazione di questo "principio dell'indifferenza dell'indicatore" trova tuttavia un grosso ostacolo nel fatto che la campionatura

dei dati di osservazione diretta trova riscontro solo parzialmente negli altri due campi di osservazione: se entro certi limiti e' possibile tradurre una variabile osservativa esterna, cioe' un termine che descrive un comportamento, in una variabile introspettiva e' ben piu' difficile trovare un corrispettivo a tale variabile nell'ambito dei tests obiettivi, cioe' trovare un test obiettivo che metta in evidenza e misuri la variabile stessa (1). Percio' la corrispondenza e' risultata fin da principio chiara soprattutto per i fattori ottenuti nelle due prime analisi, quella relativa ai dati osservativi esterni e quella relativa ai dati introspettivi.

Le dimensioni della personalita' piu' sicuramente stabilite risultano essere le seguenti:

- A - Ciclotimia-schizotimia
- B - Capacita' mentale generale - deficienza mentale
- C - Forza dell' Io o carattere emozionalmente stabile - emozionalita' generale neurotica
- E (2) - Dominanza - sottomissione
- F - Euforia - depressione (o malinconia ansiosa)
- G - Forza del Super-Io - carattere dipendente, non compulsivo
- H - Immunita' - sensibilita' rispetto alla minaccia
- I - Mollezza - durezza
- K - Raffinatezza - grossolanita'
- L - Ciclotimia fiduciosa - paranoia
- M - Calma - preoccupazione
- N - Sofisticazione - semplicita'

E' interessante notare come parecchie delle suddette dimensioni corrispondano esattamente a quelle messe in luce nelle diverse concezioni della personalita' e del carattere - le cosiddette "caratterologie" - sorte nei primi decenni del secolo; cosi' la dimensione A (ciclotimia-schizotimia) corrisponde esattamente ai due temperamenti descritti da Kretschmer, la dimensione G (forza del Super-io) trova riscontro nella concezione psicoanalitica della personalita', mentre la dimensione I (mollezza-durezza) richiama i tipi di James. La dimensione estraversione-intraversione si ritrova invece come fattore di secondo ordine, ottenuto sottoponendo ad analisi fattoriale la matrice delle correlazioni tra i fattori (3).

Ognuna delle dimensioni fattoriali suddette (tranne forse la seconda, che corrisponde alla G di Spearman) ha carattere bipolare, cioe' satura positivamente alcune delle variazioni descritte (che funzionava-

(1) Tale difficulta', presente all'inizio della ricerca, si e' attenuata nel corso degli studi successivi, in quanto Cattell e i suoi collaboratori si sono dedicati alla costruzione di batterie di tests obiettivi di personalita'.

(2) Il tratto D non e' stato sufficientemente confermato da ricerche indipendenti.

(3) Si tratta di fattori non-ortogonali, che presentano una certa correlazione fra loro.

no come tests agli effetti dell' analisi) e negativamente altre (1). Riportiamo qui come esempio le saturazioni della dimensione A (2), in base alle quali essa e' stata interpretata come ciclotimia-schizotimia.

A - Ciclotimia-schizotimia

<i>Variabili saturate positivamente</i>	<i>Variabili saturate negativamente</i>
facilone	ostruzionista, intrattabile
adattabile (nelle abitudini)	inflexibile, rigido
di buon cuore	freddo, indifferente
aperto, placido	silenzioso, segreto, ansioso
emozionalmente espressivo	riservato
fiducioso, credulo	sospettoso, circospetto
impulsivamente generoso	chiuso, cauto
cooperativo, dimentico di se'	ostile, egotistico
sensibile agli appelli emozionali personali	impersonale
faceto	impassibile

La precedente tabella, che raccoglie, in ordine di saturazione i tratti elementari (variabili osservative) piu' saturati, positivamente o negativamente, dalla *dimensione* (cioe' dal fattore) A, rappresenta una colonna della matrice fattoriale. Analoghe tabelle raccolgono i tratti elementari che saturano le altre *dimensioni*.

In base ai risultati dell' analisi e' stato costruito da Cattell uno strumento diagnostico, che in questo caso non e' costituito da una serie di tests fattoriali (uno per ogni dimensione), ma da un questionario da cui si ricava la misura approssimativa di ognuno dei dodici fattori (piu' altri quattro: 16 in tutto) di un soggetto.

L' indagine del Cattell e' andata piu' in la': oltre ai tratti fondamentali della personalita' sono state determinate, sempre col metodo fattoriale, le dimensioni degli stati d' animo (*moods*) degli istinti, e dei "sentimenti" (3).

Per queste ricerche che, a differenza da quella sui tratti della personalita', hanno preso le mosse da certe ipotesi sulla struttura delle tendenze, fu usata oltre alla classica tecnica R, anche e soprattutto la tecnica P che utilizza la fluttuazione delle funzioni affettivo-

(1) I nomi alternativi (ciclotimia-schizotimia, euforia-depressione, ecc.) stanno ad indicare le due forme opposte che la dimensione assume, a seconda che risulta positiva o negativa nella dotazione fattoriale del singolo soggetto.

(2) L' ordine, indicato dalle lettere A-N, sta ad indicare la quantita' di varianza assorbita da ogni dimensione. La dimensione A e' in questo senso la piu' importante, perche' assorbe una proporzione di varianza maggiore delle altre.

(3) Lasciamo da parte, per brevitaa, il procedimento, basato sulla tecnica P, per determinare la struttura degli stati d' animo, e ci limitiamo a qualche cenno sulla struttura degli istinti e dei sentimenti.

tendenziali e permette di studiarne la struttura nel singolo individuo, con risultati di grande interesse dal punto di vista clinico, in quanto la matrice fattoriale che ne risulta rappresenta la struttura tendenziale di un singolo individuo. Le variabili elementari arbitrarie erano in questo caso una cinquantina di "atteggiamenti di interesse", scelti in modo che ogni tendenza ipotizzata fosse rappresentata da almeno due variabili elementari.

I fattori ottenuti con questa impostazione di ricerca, chiamati dal Cattell *ergs*, allo scopo di evitare espressioni come "istinti" o "tendenze", cariche di significati connessi a particolari impostazioni teoretiche, rappresentano la struttura motivazionale innata della personalita' umana. Si tratta di una decina di dimensioni tendenziali che corrispondono piu' o meno agli istinti ipotizzati dagli etologi nei mammiferi superiori, fra cui sesso, paura, gregarismo, autoasserzione, istinto parentale e protettivo, pugnacita', ecc. La seguente tabella rappresenta un esempio degli atteggiamenti-interessi saturati dall'*erg* "paura".

	Saturazione fattoriale
Voglio che il mio paese raggiunga una maggiore protezione contro il terrore della bomba atomica	0,5
Voglio vedere attaccata e distrutta ogni formidabile po- tenza militaristica che rappresenta un' attiva minaccia contro di noi	0,5
Voglio che si riduca il pericolo di morte per accidenti e per malattie	0,4
Voglio veder puniti i responsabili dell' inflazione	0,4
Voglio che non mi tocchi mai di essere ricoverato in un o- spedale psichiatrico	0,4
Voglio che si ottenga una riduzione della tassa sul reddi- to per quelli della mia categoria	0,3
Voglio avere un' assicurazione piu' elevata contro le ma- lattie	0,3
Voglio far carriera	0,3
Voglio che il mio paese sia potente e abbia influenza nel mondo	0,5
Mi piace partecipare a discussioni politiche	0,3

Nell' estendere le ricerche nell' ambito delle tendenze e degli in-
teressi, furono ottenute anche delle strutture fattoriali di altra na-
tura, le cui dimensioni *non* apparivano innate, cioe' preformate costitu-
zionalmente, e risultavano percio' non avere nessuna parentela con le
caratteristiche delle altre specie, biologicamente affini all' uomo; ta-
li dimensioni risultavano *acquisite* socialmente ed erano centrate ognu-
ra su una particolare istituzione sociale: la famiglia, la nazione, la

chiesa, la professione, lo svago preferito, ecc. Cattell, con evidente riferimento alla concezione di McDougall, indica come *sentimenti* questa classe di strutture dinamiche. Al pari delle altre dimensioni fattoriali, ogni sentimento satura una serie di atteggiamenti o interessi.

E' interessante il fatto che in un primo tempo l'analisi delle correlazioni fra variabili motivazionali (di atteggiamento-interesse) elementari porto' alla determinazione delle dimensioni istintive innate (ergs) e solo in seguito, usando come strumenti di misura speciali tests, il Cattell riusci' a mettere in evidenza la struttura dei sentimenti acquisiti (metanergs). Si tratta, secondo l'Autore, di due diversi tipi di misure di cui - come si e' detto - l'una, *E*, esprime l'intensita' di bisogni istintivi, l'altra, *M*, tratti sociali determinati dall'esperienza. L'equazione di specificazione per un determinato interesse o atteggiamento, *I*, misurato mediante un test o un questionario sara' dunque

$$I = S_{E1}E_1 + S_{E2}E_2 + \dots + S_{EN}E_N + S_{M1}M_1 + S_{M2}M_2 + \dots + S_{MN}M_N$$

in cui *I* e' l'intensita' di un particolare *interesse* o atteggiamento di una persona;

S e' il coefficiente di saturazione dell'interesse suddetto, in un fattore *E* oppure *M*, cioe' in una dimensione istintiva o sentimentale;

*E*_{1-N} sono le misure delle diverse dimensioni istintive (ergs) del soggetto;

*M*_{1-N} sono le misure delle diverse dimensioni sentimentali (metanergs) del soggetto.

2. - Uno studio fattoriale del Remondino (1) riguarda la determinazione delle dimensioni del giudizio degli insegnanti che valutano le composizioni scolastiche nella lingua materna.

Il problema delle dimensioni del giudizio e' essenziale nei riguardi di tutte le valutazioni di saggi scolastici. Una volta messa in evidenza dai docimologi l'enorme disparita' dei giudizi, la prima questione che si pone e' quella di stabilire se tale disparita' non dipenda dal fatto che l'oggetto del giudizio di due valutatori puo' essere diverso. Cio' e' particolarmente evidente quando si tratta di composizioni nella lingua materna, in cui si valuta ad un tempo la correttezza, lo stile, il contenuto e, magari inconsciamente, anche la pulizia, la "decenza" della presentazione dal punto di vista grafico.

Si tratta dunque anzitutto di stabilire quali e quante sono le dimensioni indipendenti del giudizio dei valutatori.

Per ottenere tale risultato, l'A. procede nel modo seguente:

(1) C. REMONDINO, Studio fattoriale della valutazione di composizioni scolastiche in lingua materna, *Bollettino di Psicologia e Sociologia applicata*, 205-218 (1958). Vedi anche *British Journal of Educational Psychology*, 29, 3 (1959) e *Travail Humain*, 22 (1959). Vale la pena di leggere nell'originale il breve articolo, che e' un modello di rigore metodologico.

1. E' stato intervistato un campione di insegnanti (professori di materie letterarie) ai quali e' stato chiesto un elenco di attributi, o qualita' che si possono distinguere in una composizione scolastica. Riunendo tutte le informazioni ottenute e dopo numerosi controlli e' stato compilato l'elenco seguente (1):

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. Leggibilita' | : qualita' di una scrittura che si presta a una lettura facile, rapida, senza equivoci. |
| 2. Estetica | : linea armonica e gradevole delle lettere e buon gusto nell'impaginazione. |
| 3. Presentazione | : pulizia, cura, buona presentazione del lavoro. |
| 4. Correttezza ortografica | : densita' errori ortografici. |
| 5. Correttezza morfologica | : densita' errori morfologici. |
| 6. Correttezza sintattica | : densita' errori sintattici. |
| 7. Organicita' di esposizione | : qualita' di un'esposizione fatta con ordine, nelle giuste proporzioni, e seguendo uno schema. |
| 8. Ricchezza di idee | : quantita' di idee, spunti e argomenti. |
| 9. Adeguatezza di idee | : qualita' per cui le idee esposte sono pertinenti e adeguate con il tema. |
| 10. Precisione d'informazione | : veridicita' ed esattezza oggettiva delle affermazioni e dei fatti esposti. |
| 11. Completezza | : qualita' che consiste nel non aver tralasciato niente di quanto si doveva dire. |
| 12. Concisione | : qualita' per la quale le cose da dire sono dette con il minimo indispensabile di termini senza ripetizioni, ridondanze o tortuosita'. |
| 13. Proprieta' di linguaggio | : giusto impiego dei vocaboli. |
| 14. Stile | : facilita', esattezza, padronanza della lingua in cio' che riguarda la costruzione delle frasi. |
| 15. Originalita' | : qualita' per la quale, attraverso il lavoro, traspare e si afferma qualche cosa della personalita'. |
| 16. Maturita' | : capacita' di giudizio, profondita' critica, acutezza dei ragionamenti esposti. |
| 17. Fantasia | : capacita' di creazione, di trasfigurazione, di proiezione, rivelata dallo scritto. |

(1) *Op. cit.*, Tav. 1. (Le citazioni si riferiscono al *Bollettino di Psicologia e Sociologia applicata*).

2. Un gruppo di composizioni e' stato quindi valutato secondo le 17 categorie sopra indicate [per ogni composizione ogni valutatore esprimeva il suo giudizio secondo ognuna delle 17 voci, indicando un piu' (+) se giudicava la qualita' indicata nell'elenco, presente in misura superiore alla media, un meno (-) se la giudicava presente in misura inferiore alla media, e uno zero (0) se non si distaccava dalla media]. Si sono calcolate quindi le correlazioni fra le varie categorie di giudizi, ottenendo in tal modo una matrice di correlazioni per ogni valutatore. Essendo stato constatato che i risultati dei diversi valutatori presentavano una fondamentale analogia, si e' calcolata una matrice di correlazione media (1).

3. Sottoposta ad analisi fattoriale la suddetta matrice di correlazioni si e' ottenuta in seguito a rotazione la struttura semplice obliqua rappresentata dalla matrice di tab. 140.

	A	B	C	D
1. Leggibilita'	.72	-.10	-.09	-.17
2. Estetica	.80	-.16	-.15	-.15
3. Presentazione	.79	-.16	-.08	-.22
4. Correttezza ortografica	-.07	.59	-.04	.06
5. Correttezza morfologica	-.11	.66	-.01	.06
6. Correttezza sintattica	-.18	.70	.07	.10
7. Organicita' di esposizione	-.06	.13	.49	.07
8. Ricchezza di idee	-.17	.09	.50	.24
9. Adeguatezza d' idee	-.03	-.01	.68	.02
10. Precisione d' informazione	.00	.04	.56	.01
11. Completezza	.05	-.03	.45	.17
12. Concisione	.14	.04	.26	.07
13. Proprieta' di linguaggio	.01	.49	.16	.13
14. Stile	-.06	.52	.13	.24
15. Originalita'	-.18	.16	.07	.67
16. Maturita'	-.06	.13	.23	.44
17. Fantasia	-.21	.22	.06	.65

(da Remondino, Tav. V)

Tabella 140.

Dei 4 fattori ottenuti, l' Autore da' la seguente interpretazione.

- 1) Il primo fattore satura altamente i parametri:
 1. Leggibilita'
 2. Estetica
 3. Presentazione.

(1) Fra i tre valutatori che presentavano fra loro la massima analogia e si potevano quindi considerare tipici.

Si tratta di tre parametri riguardanti la forma esteriore dell'elaborato. Il termine PRESENTAZIONE GRAFICA puo' designare in modo abbastanza chiaro questo complesso fattoriale.

- 2) I parametri piu' saturi del secondo fattore sono:
4. Correttezza ortografica
 5. Correttezza morfologica
 6. Correttezza sintattica
 13. Proprieta' del linguaggio
 14. Stile.

Evidentemente ognuno di questi cinque parametri rispecchia un livello diverso di una stessa qualita' dimostrata dal redattore, che si puo' esprimere bene con il termine USO DELLA LINGUA.

- 3) Il terzo fattore satura specialmente i parametri seguenti:
7. Organicita' di esposizione
 8. Ricchezza di idee
 9. Adeguatezza di idee
 10. Precisione di informazione
 11. Completezza.

Si tratta indubbiamente di diversi aspetti tutti attinenti alla sostanza degli elaborati, e che possono venir sintetizzati bene dall'espressione: CONTENUTO ED ORGANIZZAZIONE DELL'ESPOSIZIONE.

- 4) I parametri piu' saturati del quarto fattore sono:
15. Originalita'
 16. Maturita'
 17. Fantasia.

Troviamo raggruppate qui le caratteristiche piu' sottili, le piu' difficili a definire e a rintracciare nelle composizioni.

Come ci risulta' chiaro dall'indagine di controllo, gli insegnanti, facendo uso di questi termini, intendono significare alcuni aspetti della composizione che sono strettamente connessi alla personalita' del redattore; sempre secondo gli insegnanti intervistati, sarebbe almeno teoricamente possibile trovare due distinte composizioni che presentino uno stesso contenuto, che siano espresse con forma linguistica e grammaticale simile e tracciate sulla carta con grafia identica, e che siano cio' nonostante manifestamente diverse: l'elemento che, nelle condizioni esposte, puo' rendere diverse le due composizioni e', secondo le espressioni degli insegnanti intervistati, una "forma", una "colorazione" di natura assolutamente "personale". Originalita', maturita' e fantasia potrebbero percio' venir definiti come ASPETTI PERSONALI DEL CONTENUTO (1).

(1) *Op. cit.*, pp. 210-211.

3. - Un gruppo di ricerche fattoriali, dovute al Cattell, riguardano le dimensioni culturali delle nazioni. Tali studi rappresentano, per così dire, il parallelo delle ricerche fattoriali compiute dallo stesso Cattell per la determinazione delle "dimensioni" della personalità. Infatti, come per ricavare le dimensioni della personalità si comincia col misurare un certo numero di variabili su un campione di soggetti, e poi si calcolano le correlazioni fra le variabili, sottoponendole quindi ad analisi fattoriale, così, per determinare le dimensioni di quell'unità relativamente indipendente che è il gruppo nazionale, e che egli chiama "syntality" (con evidente riferimento alla nozione di "personality"), il Cattell procede in modo strettamente analogo: in una originalissima ricerca egli (1) utilizzò le misure di una serie di variabili su 69 nazioni, calcolando le correlazioni fra le suddette variabili, e quindi sottoponendo la matrice delle correlazioni ad analisi fattoriale.

In altre parole, riferendoci per maggiore chiarezza allo schema soggetti-tests, in questa ricerca le nazioni sono i soggetti, e le variabili sono i tests. Le 69 nazioni non rappresentano un campione, ma l'intera popolazione delle nazioni esistenti al tempo in cui è stata compiuta la ricerca (2). Le variabili utilizzate nella ricerca sono 82, poi ridotte a 72 (in quanto 10 risultarono inutilizzabili per incompletezza, infedeltà o altre cause) parte delle quali (le variabili "storiche") si riferiscono ai 100 anni dal 1837 al 1937, e le altre all'ultimo decennio di questo periodo. Si tratta di dati per la maggior parte statistico-demografici come ad esempio: popolazione, densità di popolazione, espansione (o contrazione) dell'area della nazione, percentuale di popolazione cattolica, percentuale di popolazione buddista, ecc.; percentuale di telefoni, percentuale di spesa per armamenti, spesa destinata all'educazione, numero di gruppi linguistici, miglia di ferrovia per 1000 persone, percentuale di popolazione in servizio militare permanente, percentuale di illetterati, morti per omicidio su 1000, morti per suicidio per 1000 ecc., numero di premi Nobel, livello di vita, aumento della produzione industriale, rapporto fra divorzi e matrimoni, consumo di proteine per persona al giorno, frequenza di guerre, numero di partiti politici (1927-37), numero di trattati, numero di rivoluzioni, percentuale di uomini eminenti (in diverse aree), grado di libertà nel divorzio, prostituzione (graduazione da "legalmente riconosciuta" a "proibita").

La matrice fattoriale ruotata ottenuta analizzando la matrice delle correlazioni fra le 72 variabili, rappresenta una struttura semplice di 12 fattori, di cui i più chiaramente interpretabili sono:

(1) R. CATTELL, The Dimensions of Culture Patterns by Factorization of National Characters, in *J. of Abn. and Soc. Psychol.*, 1949, 44, pp. 443-469.

(2) Perciò viene a cadere la critica relativa all'esiguità del campione.

1. grandezza, 2. pressione culturale, 3. benessere illuminato, 4. solidarieta' patriarcale conservatrice, 5. razionalismo urbano e-mancipato, 6. intelligente laboriosita', 7. ordine energico, autode-terminato, 8. filisteismo borghese, 11. buddismo-mongolismo, 12. in-tegrazione culturale e morale.

Va notato che si tratta per la maggior parte di fattori di signi-ficato psicologico e sociologico, che sono tutti, tranne il 1° e l'11°, bipolari. Ma i nomi dei fattori sono, come dice lo stesso Cattell, ten-tativi di interpretazione, data soprattutto la novita' della ricerca. Così, ad esempio, il primo fattore, "grandezza", che presenta le se-guenti saturazioni (1)

Saturazioni

0,63	area grande (in senso assoluto)
0,65	molti assassini politici
-0,63	poche citta' sopra i 20.000 abitanti per milione di popolazione
0,61	grande numero assoluto di abitanti
0,52	molte rivolte e ribellioni locali nel periodo 1837-1937
0,52	molti gruppi linguistici diversi
0,47	tardo sviluppo della produzione industriale
0,46	elevato rapporto divorzi/matrimoni
0,33	frequenza di trattati segreti nel 1837-1937
-0,32	bassa percentuale di spesa governativa per l'educa-zione

starebbe ad indicare che le organizzazioni sociali gigantesche soffro-no di un disagio sia interno che esterno, per cui il fattore si potreb-be eventualmente interpretare come un fattore bipolare di *grandezza in-sicura* contrapposta a *esiguita' ben organizzata* (2).

A scopo di esemplificazione consideriamo anche il 4° fattore, in-terpretato come *solidarieta' conservatrice, patriarcale* contrapposta a *fermento di liberazione*. Le variabili sono numerose e anche se per la maggior parte sature in misura non molto elevata, hanno tuttavia l'im-

(1) Si noti che nella descrizione delle variabili e' gia' tenuto conto del segno della saturazione. Così, per es., la variabile "Percentuale di spe-sa governativa per l'educazione" essendo saturata negativamente dal fattore grandezza, e' tradotta in "Bassa percentuale di spesa governativa per l'educa-zione".

(2) *Op. cit.*, pp. 458-59. Secondo questa interpretazione le nazioni che presentano in misura molto elevata questo fattore sarebbero caratterizzate da grandezza di area e di popolazione e insicurezza interna ed esterna, mentre le nazioni che presentano una misura molto bassa in questo fattore sarebbero ca-ratterizzate da un'area e una popolazione piccole e da una buona organizza-zione.

portante caratteristica di presentare la massima saturazione in questo fattore (1).

- 0,61 bassa percentuale di politici eminenti fra gli uomini eminenti
- 0,59 scarsa frequenza di telefoni per 1000 abitanti
- 0,56 alta percentuale di popolazione permanentemente sotto le armi
- 0,53 grandi restrizioni nel divorzio
- 0,47 scarsa tendenza alle gravi depressioni industriali
- 0,41 scarsa poligamicita' nei costumi matrimoniali
- 0,37 elevato rapporto di femmine illetterate rispetto ai maschi illetterati
- 0,34 scarsa creativita' in scienza e filosofia
- 0,34 marcata tendenza al risparmio
- 0,32 alta percentuale - fra gli uomini eminenti - di uomini eminenti in campo religioso
- 0,32 bassa percentuale di morti per cancro
- 0,30 basso rapporto di esportazioni rispetto alle importazioni
- 0,26 molto analfabetismo

Il fattore caratterizza le nazioni con tradizioni religiose e morali restrittive (compresa una forma di cauto risparmio) con una semplice organizzazione autoritaria (nessuna necessita' di uomini politici e di telefoni) e con i valori tipici di una societa' mascolina [donne illetterate, interessi militari (2)]; esso e' presente in societa' molto diverse, come le colonie del New England, la Svizzera dell' '800 e l'antica Sparta. Psicologicamente tale fattore avrebbe carattere ossessivo, originato dalla severita' nella relazione padre-figlio, caratteristica di quelle civiltà, e persistente per ragioni storiche e ambientali (3).

Un altro studio dello stesso Autore, pure sulle variabili nazionali (4) e' stato condotto invece con la tecnica *P*. Come nello studio della personalita' la tecnica *P* ne mette in evidenza le dimensioni fattoriali, applicando tests o altro genere di misure a un unico soggetto, che viene esaminato ripetutamente per un lungo periodo di tempo, cosi' nello studio delle dimensioni culturali delle nazioni, con la tecnica *P* si ripetono molte volte, attraverso un lungo periodo di tempo, le misure delle stesse variabili in un'unica nazione. Lo studio compiuto dal Cattell riguarda la Gran Bretagna (5), le misure delle variabili, ripe-

(1) *Op. cit.*, p. 462.

(2) Non militarismo come tendenza alla guerra e alle conquiste, ma piuttosto mantenimento di cospicue forze armate come espressione di cautela e di disciplina (*op. cit.*, pp. 461-62).

(3) *Op. cit.*, pp. 461-462.

(4) R. CATTELL, A quantitative Analysis of the Changes in the Culture Pattern of Great Britain 1837-1937 by the *P* technique, in *Acta Psychologica*, 1953, 9, pp. 99-121.

(5) Fu scelta la Gran Bretagna per la completezza dei dati disponibili.

tute anno per anno, riguardano il centennio 1837-1937. Le variabili, scelte tra quelle di cui erano disponibili le misure, anno per anno, nel predetto periodo, sono in parte quelle dello studio fattoriale compiuto su 69 nazioni, precedentemente esposto, in parte quelle usate in un'altra ricerca, pure compiuta con la tecnica *P*, negli Stati Uniti di America (1). Uno degli scopi della ricerca era di stabilire se la struttura fattoriale ottenuta con la tecnica *R* sulla popolazione delle nazioni si ritrovava, almeno in parte, applicando la tecnica *P* su una nazione singola. Tale ipotesi trova conferma nei risultati di questo studio, in quanto, dei 5 fattori chiaramente interpretabili, quattro risultano uguali o analoghi a fattori messi in luce dalla precedente ricerca, e precisamente: pressione culturale, emancipazione-rigore, (prosperita')-illuminata (2), condizioni morali depresse-integrazione culturale.

I risultati della ricerca (e cioè le diversità non meno delle analogie di risultato con la ricerca condotta col metodo *R* sulle 69 nazioni e più ancora con la ricerca condotta col metodo *P* negli Stati Uniti), offrono all'Autore l'occasione di impostare il problema generale delle cause delle analogie e delle diversità che si constatano nelle strutture fattoriali emerse da questo genere di studi. Dal punto di vista tecnico è interessante la possibilità di rappresentare l'andamento dei fattori, cioè la loro misura anno per anno (fig. 127). Il calcolo della misura di un particolare fattore in un determinato anno è stato eseguito approssimativamente (senza ricorrere all'equazione di regressione) sommando le misure in unità standard delle variabili più importanti e rappresentando poi ogni fattore con media e deviazione standard uguali (3). Dal diagramma si vede anzitutto che i fattori hanno un'individualità indipendente, in quanto hanno ognuno un diverso andamento nel tempo; inoltre le modificazioni delle singole curve, messe in relazione agli eventi storici, offrono la possibilità di interessanti interpretazioni.

L'intensità di azione (grandezza) di ogni variabile in ogni anno può essere espressa con la consueta equazione di specificazione, e cioè

$$H_{my} = s_{m1}F_{1y} + s_{m2}F_{2y} + \dots + s_{mn}F_{ny} + s_m F_{my}$$

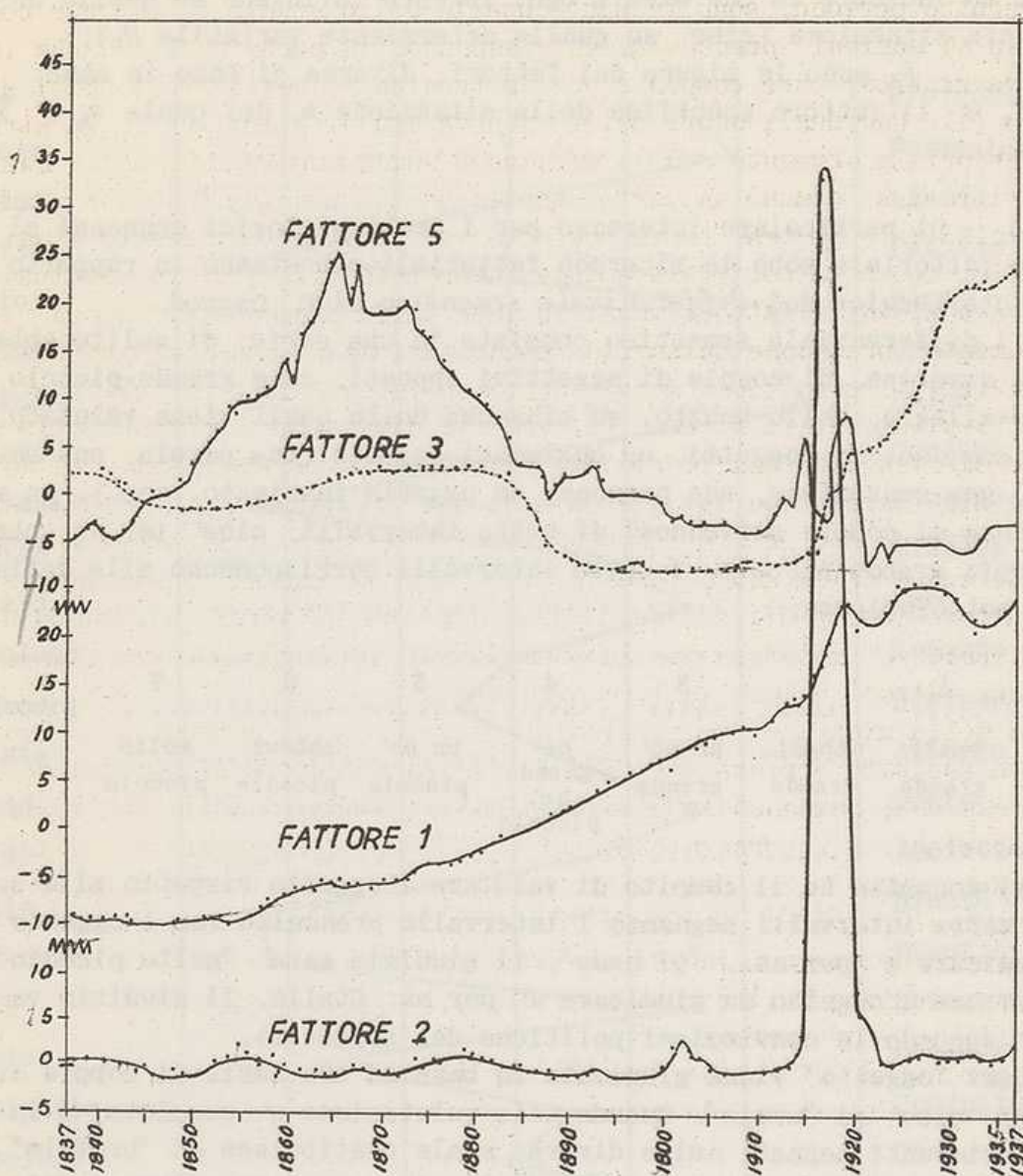
in cui

H_{my} è una particolare manifestazione storica *m* nell'anno *y* (cioè una delle 48 variabili misurata in un determinato anno);

(1) R. CATTELL e M. ADELSON, The Dimensions of Social Change in the U. S. A. as determined by *P* technique, *Soc. Forces*, 1952, 30, pp. 190-201.

(2) La coincidenza è solo parziale, poiché l'aspetto "prosperita'" non è presente nel fattore messo in luce in questa ricerca.

(3) *Op. cit.*, p. 115. In altre parole, i 100 valori annuali ottenuti sommando le variabili più importanti per un determinato fattore sono stati trasformati in unità standard, dopo averne calcolato la media e la deviazione standard.



(da CATTELL, op. cit.)

Fig. 127.

I 4 fattori il cui andamento e' rappresentato nel diagramma sono:

1. Pressione culturale
2. Tensione bellica - vita tranquilla
3. Emancipazione - rigore
5. Condizioni morali depresse - integrazione culturale

$s_{n1} \dots s_{nn}$ sono le saturazioni della variabile H_n nei fattori $F_1 \dots F_n$ cioè quelli che Cattell chiama "indici situazionali", che stanno ad indicare in che misura ogni fattore influisce su quella determinata situazione (cioè su quella determinata variabile H_n);

$F_1 \dots F_n$ sono le misure dei fattori, diverse di anno in anno;

F_m è il fattore specifico della situazione m , del quale s_m è la saturazione.

4. - Di particolare interesse per i problemi logici connessi al metodo fattoriale sono le ricerche fattoriali che stanno in rapporto alla nota tecnica del *differenziale semantico* di C. Osgood.

Il differenziale semantico consiste in una serie, di solito abbastanza numerosa, di coppie di aggettivi opposti, come grande-piccolo, triste-allegro, bello-brutto, su ciascuna delle quali viene valutato, da un campione di soggetti, un qualsiasi oggetto (una parola, una nozione, una sensazione, una persona, un oggetto inanimato, ecc.). La valutazione si compie servendosi di sette intervalli; cioè per es. per la coppia grande-piccolo, i sette intervalli corrispondono alle definizioni sottoindicate:

	1	2	3	4	5	6	7	
grande	piccolo
	molto	abbast.	un po'	ne'	un po'	abbast.	molto	
	grande	grande	grande	grande	piccolo	piccolo	piccolo	
				ne'				
				piccolo				

Il soggetto ha il compito di valutare l'oggetto rispetto alla scala di sette intervalli segnando l'intervallo prescelto (se l'oggetto da giudicare è per es., "il nano", il giudizio sarà "molto piccolo", cioè 7; se l'oggetto da giudicare è per es. Stalin, il giudizio varierà secondo le convinzioni politiche del soggetto).

Ogni "oggetto" viene giudicato in base ad una serie di coppie di opposti, cioè di "scale". Quando tale valutazione è compiuta, l'insieme dei punti segnati sulle diverse scale costituisce un "profilo" (v. fig. 128). Si possono confrontare fra loro, per es., due profili relativi allo stesso oggetto, forniti da due diversi soggetti, o due profili relativi a due oggetti diversi forniti dallo stesso soggetto. Di solito si procede al confronto fra profili relativi a oggetti diversi e i risultati forniti da un campione di soggetti relativamente allo stesso oggetto vengono utilizzati per calcolare il *profilo medio* relativo a quell'oggetto.

Si misura l'affinità fra due profili mediante il calcolo della correlazione, e una matrice di correlazioni fra profili può essere sottoposta ad analisi fattoriale.

Conviene però anzitutto precisare il significato di correlazione tra profili. Quali sono le variabili di cui si calcola la correlazione,

PROFILO MEDIO DEL CONCETTO "AMORE"

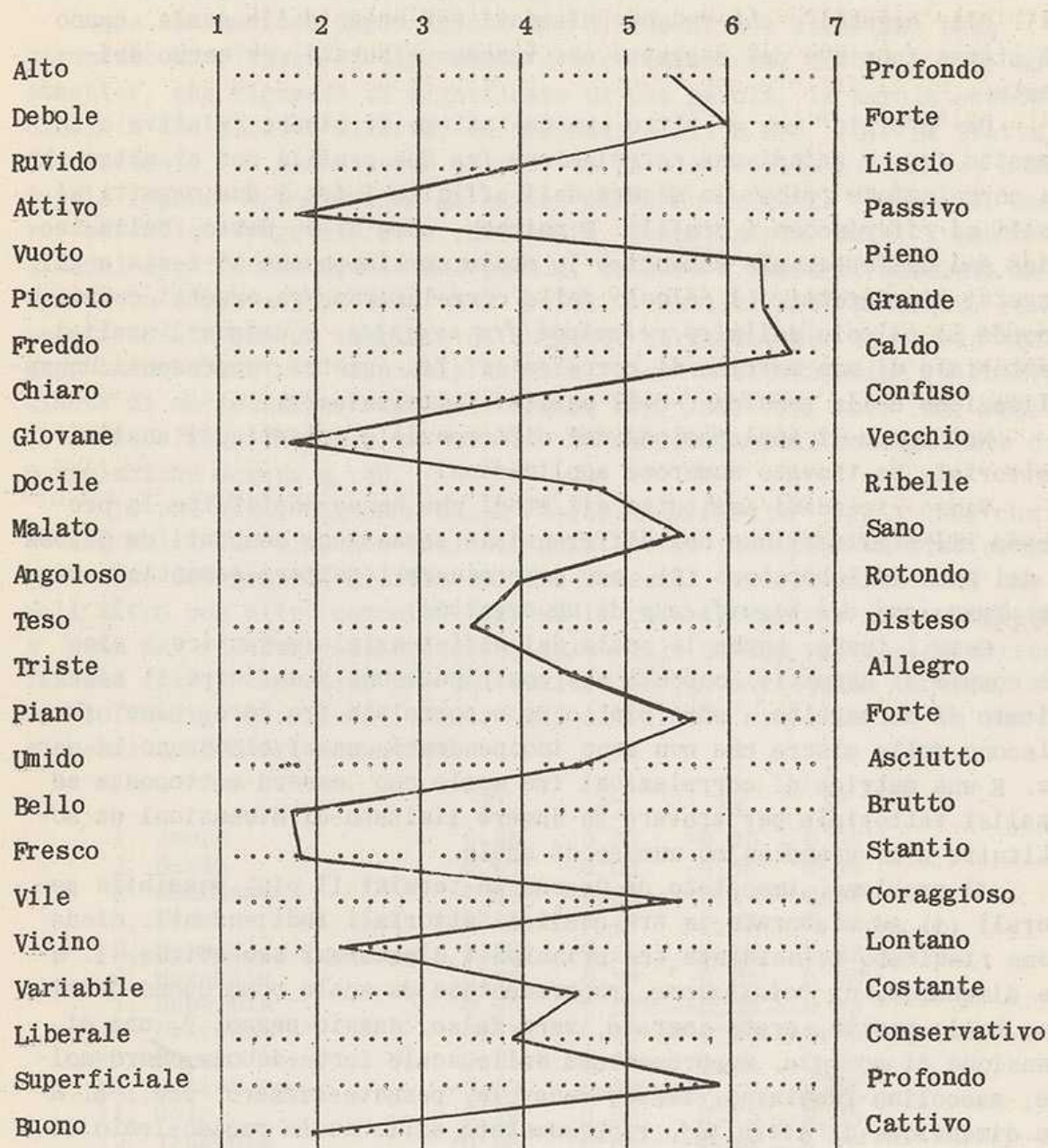


Fig. 128.

Va notato che le scale che non appaiono applicabili all'oggetto giudicato (in questo caso, ruvido-liscio, chiaro-confuso, angoloso-rotondo) danno come risultato 4, il che significa che l'oggetto giudicato non corrisponde ne' all'uno ne' all'altro dei due aggettivi opposti.

e su che base viene calcolata?

Per chiarire questo punto, giova riferirsi allo schema abituale soggetti-tests. Le scale, cioe' le coppie di contrari rispetto a cia-

scuna delle quali viene valutato l'oggetto della valutazione, si possono assimilare ad altrettanti tests, in quanto ciascuna di esse fornisce (indipendentemente dalle altre) una misura (su una scala di 7 gradi). Gli "oggetti", che vengono misurati per mezzo delle scale, hanno la stessa funzione dei soggetti che vengono misurati per mezzo dei tests.

Un "profilo" non e' altro che un insieme di misure relative a un oggetto (1); e quindi una correlazione fra due profili non e' altro che la correlazione (cioe' la misura dell'affinita') fra i due oggetti ai quali si riferiscono i profili. E poiche', come si e' detto, nella tecnica del differenziale semantico le scale corrispondono ai tests e gli oggetti ai soggetti, il calcolo della correlazione tra oggetti corrisponde al calcolo della *correlazione fra soggetti*, e dunque l'analisi fattoriale di una matrice di correlazioni fra oggetti rappresenta un'applicazione della tecnica *Q* dell'analisi fattoriale (2).

Nel campo di applicazione del differenziale semantico l'analisi fattoriale ha trovato numerose applicazioni.

Vanno ricordati anzitutto gli studi che hanno costituito la premessa all'utilizzazione del differenziale semantico, compiuti da Osgood e dai suoi collaboratori (3), per determinare i fattori semantici, cioe' le *dimensioni del significato* di un oggetto.

Come i tests, anche le scale del differenziale semantico - cioe' le coppie di aggettivi opposti che contribuiscono a definire il significato di un oggetto - sono piu' o meno correlate fra loro, cioe' forniscono delle misure che non sono indipendenti, ma si ricoprono in parte. E una matrice di correlazioni fra scale puo' essere sottoposta ad analisi fattoriale per trovare un numero limitato di dimensioni da sostituire a un grandissimo numero di scale.

Il problema, impostato da Osgood in termini il piu' possibile generali (4) ed elaborato in tre analisi fattoriali indipendenti, diede come risultato coincidente tre principali dimensioni semantiche: 1. una dimensione di *valutazione*, rappresentata da scale come buono-cattivo, bello-brutto, grato-ingrato, vero-falso, saggio-pazzo; 2. una dimensione di *potenza*, rappresentata dalle scale forte-debole, duro-molle, mascolino-femminino, tenace-cedevole, pesante-leggero, ecc.; 3. una dimensione di *attivita'*, rappresentata dalle scale rapido-lento, at-

(1) Come il "profilo psicologico" di un soggetto non e' che l'insieme dei risultati ottenuti applicando un certo numero di tests allo stesso soggetto.

(2) Naturalmente si possono calcolare - e vengono spesso calcolate, come si vedra' piu' sotto - le correlazioni tra le scale che corrispondono alle comuni correlazioni fra tests. L'analisi fattoriale di una matrice di correlazione tra scale rappresenta un'applicazione della comune tecnica *R*.

(3) Ch. E. OSGOOD, G. J. SUCI, P. H. TANNENBAUM, *The Measurement of Meaning*, Urbana, 1957.

(4) Facendo due diverse campionature di scale, una delle quali partendo dal *Thesaurus* di Roget, un'opera che intende dare una classificazione logicamente esaustiva dei significati delle parole.

tivo-passivo, caldo-freddo, eccitabile-calmo. In base al risultato dei suddetti studi, valutazione, potenza e attivita' rappresentano le tre dimensioni fondamentali del significato (1).

Tra le numerose applicazioni del differenziale semantico come strumento di ricerca ci limiteremo a ricordarne una, dovuta a P.R. Hofstaetter, che riguarda il significato di una parola, la parola solitudine, in due nazioni diverse, la Germania e gli U.S.A. (2). Si tratta, naturalmente, di due diverse parole, la parola tedesca *Einsamkeit* e la parola inglese *lonesomeness*. Ma mentre per altri concetti (successo, amore, maschile, tragedia, eroe, dittatore, sonno, ansia, odio) l' analogia del significato fra le due parole, tedesca e inglese, misurata mediante la correlazione fra i due profili semantici medi (ottenuti rispettivamente con un campione di soggetti germanici per la parola tedesca, e americani per la parola inglese) risulta elevatissima (i coefficienti di correlazione sono nell' ordine .96, .96, .93, .91, .90, .88, .87, .84, .78, .70), per il concetto di solitudine, il coefficiente di correlazione scende a .40.

Da che cosa dipende questa scarsa affinita' fra i due concetti? Nella sua elegante analisi, Hofstaetter ricorre a diversi mezzi: confronto dei profili grafici dei due concetti, correlazione dell' uno e dell' altro con altri concetti (3). Ma la chiarificazione piu' completa e' data dal risultato dell' analisi fattoriale di una matrice di correlazione fra 17 concetti, due dei quali sono la "solitudine tedesca" e la "solitudine americana", mentre gli altri sono stati scelti in funzione di indicatori semantici:

	F1	F2	F3	h ²
1. Amore	0,98	0,00	-0,05	0,96
2. Gioia	0,97	-0,03	-0,06	0,94
3. Successo	0,92	0,29	-0,10	0,94
4. Eroe	0,84	0,48	-0,15	0,95
5. Femminile	0,80	-0,40	0,13	0,82
6. Maschile	0,78	0,59	-0,05	0,96
7. Superbia	0,74	0,37	-0,38	0,83
8. Dolcezza	0,76	-0,48	0,24	0,87
9. Sonno	0,51	-0,58	0,49	0,84
10. Dittatore	-0,09	0,92	-0,15	0,88
11. Odio	-0,19	0,89	0,15	0,85
12. Tragedia	-0,05	0,69	0,49	0,72
13. Stanchezza	-0,44	-0,73	0,48	0,95
14. Noia	-0,76	-0,47	0,30	0,89
15. Angoscia	-0,84	0,19	0,40	0,90
16. Solitudine (ted.)	-0,06	0,22	0,74	0,60
17. Solitudine (amer.)	-0,93	0,05	0,35	0,98

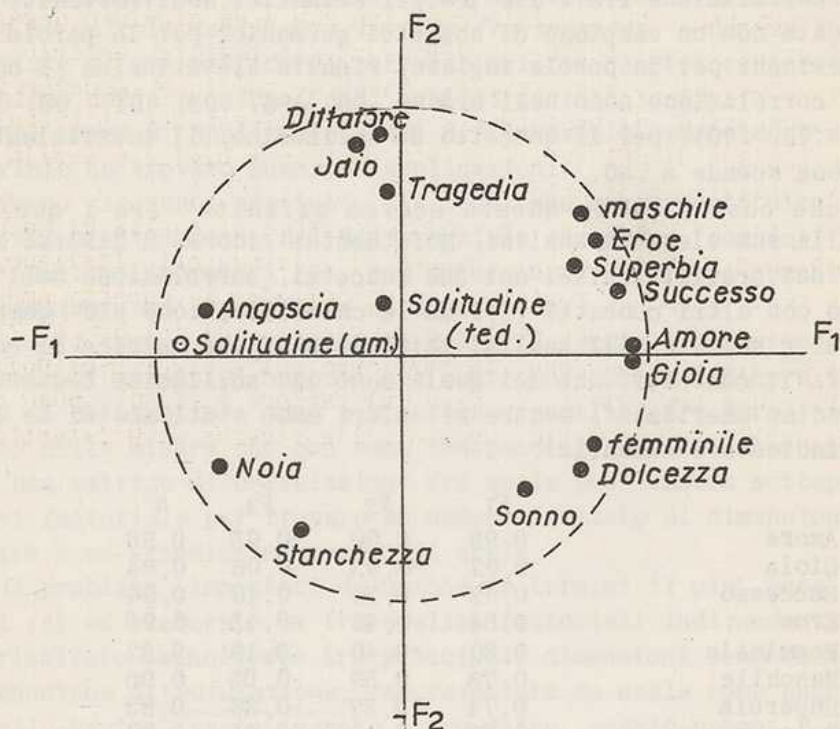
Matrice fattoriale ruotata ortogonalmente

(1) Altri fattori semantici, molto meno importanti perche' assorbono una piccola percentuale di varianza, non sono comparsi in tutte e tre le analisi e quindi non hanno avuto uguale conferma.

(2) P.R. HOFSTAETTER, Die amerikanische und die deutsche Einsamkeit, *Verhandlungen des 13. Deutschen Soziologentages*, Westdeutscher Verlag.

(3) Correlazione calcolata per mezzo dei rispettivi profili semantici.

I due primi fattori F_1 e F_2 vengono interpretati da Hofstaetter, anche in relazione a precedenti ricerche fattoriali compiute col differenziale semantico, come fattori dell'atteggiamento positivo (F_1 , caratterizzato dall'elevatissima saturazione del concetto di "amore") e atteggiamento negativo (F_2 , caratterizzato dall'altissima saturazione del concetto di "odio"). Essi si possono perciò identificare con amore e odio; ed il fatto interessante, e in un certo senso sorprendente, è che si tratta di due dimensioni ortogonali, cioè prive di correlazione fra loro. Amore e odio non risultano dunque l'uno la negazione dell'altro (in tal caso sarebbero rappresentati da un'unica dimensione bipolare), ma dimensioni indipendenti che possono dunque coesistere ri-



(da HOFSTAETTER, op. cit.)

Fig. 129.

petto allo stesso oggetto, come la psicologia dinamica ha mostrato da tempo. Per il terzo fattore l'interpretazione (ipotetica) dell'Autore è che si tratti della dimensione del "ritiro", cioè dell'intraversione.

I due concetti di solitudine hanno saturazioni sostanziali in fattori diversi. La solitudine americana ha una fortissima saturazione negativa in F_1 , si trova dunque al polo opposto dell'amore, che è caratterizzato dall'angoscia, mentre la solitudine tedesca è fortemente saturata in F_3 , il fattore dell'intraversione.

Rappresentando in un diagramma F_1 e F_2 e le proiezioni dei 17 concetti (fig. 129) Hofstaetter rende evidente, oltre al significato della solitudine americana (la solitudine tedesca e' localizzata nella zona centrale) il significato dei due fattori e l' analogia fra i concetti. Il primo fattore F_1 e' caratterizzato al polo positivo dai concetti di amore e gioia, e al polo negativo da solitudine (americana) e angoscia; il secondo fattore, F_2 ha al polo positivo i concetti di ditatore e odio, mentre al polo negativo mancano concetti che lo caratterizzino; le proiezioni negative piu' importanti sono "stanchezza" e "sonno".

Ritornando ai due concetti di solitudine, il risultato dell' analisi e' che uno dei due concetti e' nettamente negativo, mentre l' altro e' estraneo sia a un giudizio positivo che a un giudizio negativo. Secondo il primo la solitudine e' debolezza, anormalita' sociale, malattia; secondo l' altro puo' essere - anche se non lo e' necessariamente - forza, capacita' di bastare a se stessi, elevatezza spirituale. La nozione inglese di solitudine ha una posizione simile a quella americana, ma tuttavia meno radicale.

In una ricerca condotta, seguendo lo schema di quella di Hofstaetter, in ambiente italiano da D. Capozza (1), il concetto italiano di solitudine risulta in una posizione intermedia fra i concetti americano e tedesco, poiche' ha una proiezione negativa sul fattore F_1 (-.52) ma molto meno elevata del concetto americano nella ricerca di Hofstaetter (-.93), e una proiezione positiva sul fattore F_3 (.60), poco meno elevata di quella del concetto tedesco nella ricerca di Hofstaetter (.74).

(1) Ricerca non ancora pubblicata.

I N D I C E

Prefazione pag. III

Parte Prima - LA TEORIA DEI DUE FATTORI

Cap. I. - LE ORIGINI DEL METODO " 3

- 1. La crisi della Psicometria all'inizio del secolo " 3
- 2. Il controllo obiettivo: la correlazione con misura dell'affinita' " 4
- 3. La soluzione di Spearman' " 5

Cap. II. - TEORIA DEI DUE FATTORI " 11

- 1. Equazione di specificazione fattoriale " 11
- 2. L'annullamento delle differenze tetradiche " 13
- 3. Implicazioni dell'equazione di specificazione fattoriale " 18
- 4. Calcolo delle saturazioni fattoriali " 24
- 5. Calcolo delle saturazioni ed errore di campionatura " 27
- 6. Calcolo delle saturazioni per approssimazioni successive " 33

7. ~~Forme~~ *Procedimenti di calcolo per la stima del fattore G di un soggetto*

Cap. III. - LA RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA " 42

- 1. Soggetti e tests " 42
- 2. La rappresentazione geometrica delle correlazioni " 57
- 3. L'obliquita' degli assi-tests " 59
- 4. La convenzione del coseno " 64
- 5. Rappresentazione geometrica della soluzione fattoriale di Spearman " 68

Stima delle miscele fattoriali

Cap. IV. - LA VALUTAZIONE DEL FATTORE G " 75

- 1. Il test fattoriale " 75
- 2. Correlazione e previsione " 76
- 3. L'equazione di regressione " 78
- 4. ~~La previsione a partire dai risultati in due o piu' tests~~ *La previsione a partire dai risultati in due o piu' tests* " 89
- 5. Il procedimento di Spearman per il calcolo del valore probabile della G di un soggetto " 94

Parte Seconda - I METODI DI ANALISI MULTIFATTORIALE

Cap. I.	- DALLA TEORIA DEI DUE FATTORI AI METODI PLURIFATTORIALI . . .	pag. 101
1.	I fattori di gruppo	" 101
2.	Controllo dell'ipotesi della presenza di un fattore di gruppo . . .	" 103
3.	Estensione delle equazioni fondamentali ai fattori di gruppo . . .	" 107
4.	Estensione del procedimento di analisi di una matrice gerarchica ai fattori di gruppo	" 108
5.	Estrazione dei fattori generale e di gruppo da una matrice priva di errori di campionatura	" 114
Cap. II.	- FONDAMENTI TEORICI DELL'ANALISI PLURIFATTORIALE	" 121
1.	La teoria dei due fattori e i fattori di gruppo	" 121
2.	La nozione di "rango" di una matrice e la generalizzazione della soluzione di Spearman	" 122
3.	La moltiplicazione fra matrici e l'equazione fondamentale di Thurstone	" 125
Cap. III.	- LA RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DELLO SPAZIO DEI FATTORI COMUNI	" 131
1.	Spazio fattoriale e spazio dei tests	" 131
2.	Il modello vettoriale	" 133
3.	Le correlazioni come prodotti scalari	" 136
4.	La proiezione sui vettori fattoriali	" 138
5.	La struttura bifattoriale (fattori comuni G e V) nella rappresentazione geometrica	" 139
6.	Configurazione dei tests e struttura fattoriale	" 142
7.	L'analisi in due fattori comuni nel modello geometrico	" 146
8.	L'indeterminazione della soluzione fattoriale	" 148
Cap. IV.	- L'ANALISI CENTROIDE DI THURSTONE	" 151
1.	L'approssimazione delle comunanze	" 151
2.	I presupposti teorici dell'analisi di una matrice non-gerarchica col metodo delle sommatorie	" 152
3.	L'orientamento del primo vettore fattoriale nell'analisi centroide	" 156
4.	L'estrazione del 1° fattore	" 159
5.	Riflessione dei vettori-tests	" 160
6.	Estrazione del 2° fattore e riflessione delle saturazioni	" 163
7.	Il metodo centroide completo	" 167
8.	Le fasi dell'analisi centroide nel modello geometrico	" 180
9.	Significativita' dei residui	" 186

V Altri metodi di analisi multifattoriale

1. comp. princ.

2. biangolare

3. Metodo centrato a cluster

4. analisi di dati gerarchici

5. Cluster analysis

Cap. V. - LA ROTAZIONE DEI VETTORI FATTORIALI	pag. 191
1. Le caratteristiche della struttura centroide	" 191
2. L'esigenza della semplicità	" 192
3. La soluzione di Thurstone	" 194
4. Adeguatezza della soluzione e semplicità della struttura	" 196
5. Il procedimento di rotazione	" 199
6. Il calcolo delle saturazioni dei tests nei fattori ruotati	" 203
7. Rotazione di strutture fattoriali a più di due dimensioni	" 208
8. La rotazione col metodo grafico	" 220
9. Ricostruzione della struttura originaria	" 234
10. Estensione del procedimento alle strutture pluridimensionali	" 238
11. Calcolo delle saturazioni mediante moltiplicazione di matrici	" 239
Cap. VI. - LE STRUTTURE OBLIQUE	" 254
1. Il passaggio dalle strutture ortogonali alle strutture oblique	" 254
2. Il metodo radiale	" 258
3. La rappresentazione delle strutture oblique per mezzo di diagrammi ortogonali	" 265
4. Ricerca di una struttura semplice mediante rotazioni oblique	" 271
5. Precisazione della struttura semplice	" 285
6. Il metodo dei vettori estesi	" 298
7. Struttura e composizione fattoriale	" 312
8. Vettori di riferimento e fattori primari	" 316
9. Il passaggio dalla struttura semplice alla composizione semplice	" 319
Cap. VII. - L'INTERPRETAZIONE DELL'ANALISI FATTORIALE	" 331
1. Interpretazione, stima e utilizzazione dei fattori	" 331
2. Piani dell'analisi e loro significati	" 337
3. Esempi di interpretazione dei risultati dell'analisi fattoriale, usata come strumento di ricerca	" 344

Velocità di fattori

Bibliografia

Appendice

1. Elementi di statistica necessari alla lettura di q. volume
2. Importazione ~~dei dati~~ *dei dati per canali automatici* ~~selezione~~ *selezione* ~~del~~ *del* ~~inverso~~ *inverso* di una matrice
3. Dimostrazioni ecc. *Dimostrazione dell'eq. fondamentale di Thurstone*
 - a) il caso Hotelling
 - b) l'origine del metodo di Spearman
 - c) l'impiego della *rotazione* ~~del~~ *del* ~~range~~ *range*

soluzione unica nel caso di rango 1 e saturazioni in fronte quasi il rango è $m \geq 1$

Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page. The text is arranged in several paragraphs and is mostly mirrored across the page.

