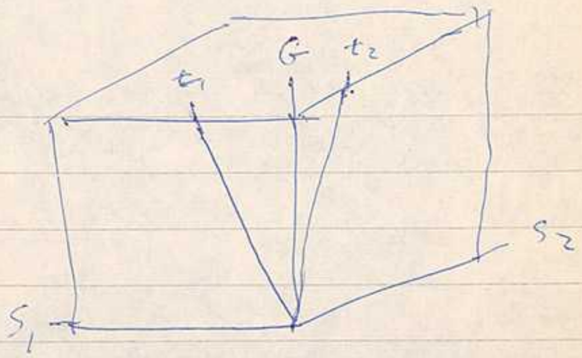
	ERRATA	CORRIGE
p.23 r.31	$r_{ab}r_{pq}-r_{ap}r_{bq}$	$r_{ab}r_{pq}-r_{aq}r_{pb}$
p.107 r.13	$z_{tp}=a_tG_p+b_t\Delta_p+u_tS_{tp}+e_tE_p$	$\ldots+e_tE_{tp}$
p.114 r.4	priva di campiona-tura	priva di errori di campionatura
p.136 r.8	$t_c^2=a_t^2+b_t^2+h_t^2$	$t_c^2=a_t^2+b_t^2=h_t^2$
p.155 r.3	rango inferiore a 1	rango superiore a 1
p.156 r.12	$\frac{a_1\ a_2\ldots a_m}{m}$	$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_m}{m}$
p.180 r.1	La ricostruzione della matrice delle correla-zioni della matrice	La ricostruzione della matrice delle correla-zioni dalla matrice
p.204 r.15	originati	originali
p.204 nota 1 r.1	funzioni geometriche	funzioni goniometriche
p.324 nota 2 r.30	$W=FOK_{OF}$	$W=FoK_{OF}$
p.328 r.12	$K'_{OF}=(\Lambda'_{OV})^{-1}D$	$K_{OF}=(\Lambda_{OV})^{-1}D$
p.335 r.28	$z_{jp}=a_jA_p+b_jB_p+c_jC_p+d_jD_p+e_jE_p+s_jS_p$	$\ldots+e_jE_{jp}+s_jS_{jp}$

S.E.&O.

(3) La denominazione dipende dal fatto che queste ~~partic~~ matrici presentano la particolarità di poter essere ordinati in modo che gli elementi di ogni riga (e di ogni colonna) siano in ordine (gerarchico) di grandezza (v. tab. 3). Quest'ordine si ottiene addizionando gli elementi di ogni colonna (o di ogni riga, dato che le righe sono identiche alle colonne) e ordinando le colonne (e le righe) secondo la grandezza delle rispettive somme.

Per mettere in evidenza ~~questa~~ la suddetta caratteristica i dati della matrice sono stati ~~ordinati~~ ristrutturati ordinando le colonne e le righe secondo la grandezza delle somme dei rispettivi elementi.



Problema: quando due tests hanno una correlazione perfetta coincidono con G?

No, possono coincidere uno con l'altro in qualsiasi posizione, avendo uguali gli specifici.

Cioè: se i due tests non hanno correlazione specifica, con l'aumentare della correlazione aumenta la saturazione in G e diminuisce quella negli S, finchè arrivano a coincidere con G, ~~non~~ ~~non~~ essendosi la correlazione rispett. con S_1 e con S_2 ridotta a zero.

In questo modo i due tests posson diventare sempre più simili senza offendere la gerarchia, cioè l'annullamento delle tetradi.

Possono però diventare sempre più simili in quanto coincidono in parte anche gli specifici e si determina la correlazione specifica: diventan allora uguali in quanto hanno lo stesso G e lo stesso S.

v w x y   1 2 3 4 5

Vi è un altro procedimento, più corretto, per valutare il fattore G di un individuo, servendosi ~~di tutti~~ dei risultati di tutti i tests della batteria sottoposta ad analisi fattoriale, od almeno di tutti i tests che presentano una sostanziale saturazione nel fattore G. Il procedimento non è altro che un'applicazione della teoria statistica della regressione[2] ~~e sarà trattato nel cap~~ —. Riportiamo tuttavia qui ~~il~~ un metodo di calcolo particolarmente semplice messo a punto dallo stesso Spearman per la valutazione del fattore G.[1]

~~I coefficienti~~

L'equazione per ottenere la valutazione del fattore di un soggetto di G (equazione di regressione multipla) è

$$G\ \cancel{z_y} = \beta_1 z_{x_1} + \beta_2 z_{x_2} + \beta_3 z_{x_3} + \dots + \beta_m z_{x_m}$$

in cui

$z_{x_1}, z_{x_2}, \dots, z_{x_m}$ sono i risultati di un soggetto nei tests $x_1, x_2, \dots, x_m$ espressi in unita' standard;

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ sono dei coefficienti (coefficienti di regressione multipla) calcolati in modo da dare ai risultati dei diversi tests un peso proporzionale al contributo di previsione dei singoli tests;

I risultati del soggetto nei tests della batteria sono i dati di cui si dispone in partenza; per effettuare la stima bisogna dunque calcolare i coefficienti ponderali $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ ~~(1)~~ che

---

si calcolano mediante la formula:

$$\beta_i = \frac{1}{1+S} \times \frac{r_{iG}}{1 - r^2_{iG}}$$

in cui

$$S = \Sigma \frac{r^2_{iG}}{1 - r^2_{iG}} .$$

E' conveniente eseguire i calcoli raccogliendo i risultati in una tabella come nell'esempio di Tabella ~~14~~ X.

Test	r_{iG}	r^2_{iG}	$1 - r^2_{iG}$	$\frac{r^2_{iG}}{1 - r^2_{iG}}$	$\frac{r_{iG}}{1 - r^2_{iG}}$	Coefficienti di regressione $\frac{1}{1+S} \times \frac{r_{iG}}{1 - r^2_{iG}}$
1	9	.81	.19	4.263	4.737	.583
2	.77	.59	.41	1.439	1.878	.231
3	.6	.36	.64	.562	.937	.115
4	.53	.28	.72	.389	.736	.091
5	.46	.21	.79	.266	.582	.072
6	.3	.09	.91	.099	.330	.041
7	.25	.06	.94	.064	.266	.033

$$S = \Sigma \frac{r^2_{iG}}{1 - r^2_{iG}} = 7.082$$

Tabella ~~14~~ X

$$\frac{1}{1+S} = .123$$

(2) L'argomento della stima statistica delle misure fattoriali dei singoli individui è trattato sistematicamente nel Cap. ...

(1) v. Thompson op. cit. pp 224

6.0.7.

7. Valutazione del fattore g

~~È stato detto nel 1° capitolo (1) che il calcolo delle misure fattoriali dei singoli soggetti non è possibile perchè~~

Con il calcolo delle saturazioni fattoriali (a_t e u_t) si ~~viene a~~ conosce la misura ~~di alcuni dei simboli~~ dei coefficienti contenuti nell'equazione di specificazione fattoriale *

$$z_{tp} = a_t G_p + u_t S_{tp}$$

Restano da determinare le misure dei fattori G_p ed S_{tp} che sono diverse da individuo a individuo. Come è stato detto precedentemente (1) il calcolo di queste misure non è possibile, perchè ~~qualunque sia il numero~~ il numero delle incognite è superiore al numero delle equazioni, e quindi il valore delle incognite rimane indeterminato. Infatti, se la batteria sottoposta ad analisi fattoriale comprendeva n tests, si possono scrivere n equazioni di specificazione fattoriale. ma siccome il numero dei fattori è n+1 (n fattori specifici, più il fattore G) ~~abbiamo~~ il numero delle incognite è di 1 superiore al numero dei fattori.

Di fronte a questo ostacolo insuperabile non ~~si~~ resta che ripiegare su valutazioni probabilistiche. Una di queste * è costituita dall'uso del test fattoriale, che non è altro che un test molto saturo del fattore che si vuol misurare, cioè, in questo caso, ~~più~~ del fattore g (2). Si assume cioè il risultato ottenuto da un soggetto in un test fattoriale del fattore g come una misura del ~~rispettivo~~ fattore g del soggetto stesso. È chiaro che si tratta di una valutazione probabilistica, poichè il risultato ~~può~~ dipende anche, sia pure in misura ridotta, dal fattore specifico, e un soggetto che sia eccezionalmente dotato nei riguardi del fattore specifico del test può ottenere un risultato elevato pur essendo scarsamente dotato del fattore g.

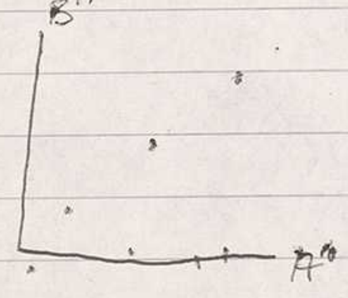
(1) Cap. I § 3 p. 8, nota.

(2) Un esempio di un test molto saturo del fattore g è costituito dalle Matrici progressive di J. Raven.

In che cosa differiscono i vettori di riferimento dai fattori ortogonali

Rotazioni ortogonali e rotazioni oblique

Rotazione obliqua col metodo radiale ✓

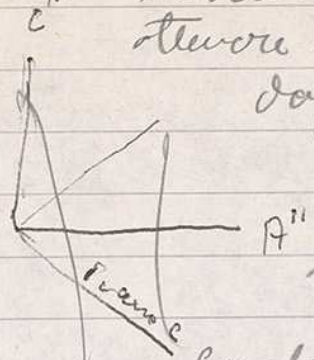


$R_{AB} = .5$

seguire la rotazione esaminando

il vettore ruotato e il piano

3. Indicare il procedimento ~~di rotazione~~ di calcolo per ottenere la matrice fattoriale ruotata dopo una rotazione obliqua



che risultato si ottiene premoltiplicando ~~Costruire la matrice~~ S e la matrice di rotazione per la sua trasposta

~~Che cosa~~ Quali vantaggi dà il metodo dei vettori esterni

4. ~~Ottenuta la matrice S, come si deve procedere per ottenere la matrice Λ~~

Che cosa ci si propone di ottenere ruotando i vettori di riferimento

5. In che cosa differiscono i vettori di riferimento e i fattori primari   Struttura semplice e composizione semplice

6. Che cos'è ~~l'analisi~~ inversa Q?

Che cos'è l'analisi inversa

Bologna Marzi 44680

A che cosa servono le correlazioni fra test e fattori
saturazioni fra test e fattori

Quali difficoltà incontra il metodo centroide se applicato a una matrice di rango superiore a 1 e come si superano

Scrivere l'equazione fattoriale della varianza in una struttura ortogonale con 2 fattori comuni, A e B.

Infatti, tanto le correlazioni fra i tests ~~scelti che in analisi precedenti~~ si ricavati da una matrice gerarchica, ~~e tali da non con~~ ~~certamente~~ privi del fattore di gruppo che si intende misurare (submatrice D), quanto le correlazioni fra ~~tests~~ questi ultimi tests e i tests comprendenti il fattore di gruppo (submatrice B o C) dipendono soltanto dalla presenza di G in tutti i tests.

Si utilizzeranno quindi tanto la matrice D quanto la matrice B (o C) per calcolare le saturazioni in G dei tests non verbali. Per es., per calcolare a_{i_1}:

$$r_{i_1 i_2} r_{i_1 i_3} = a^2_{i_1} r_{i_2 i_3}$$

ecc. (v. p. 108

$$r_{k_1 i_1} r_{k_2 i_1} = a^2_{i_1} r_{k_1 k_2}$$
$$r_{k_1 i_1} r_{k_3 i_1} = a^2_{i_1} r_{k_1 k_3}$$
$$r_{k_1 i_1} r_{k_4 i_1} = a^2_{i_1} r_{k_1 k_4}$$
$$r_{k_1 i_1} r_{k_5 i_1} = a^2_{i_1} r_{k_1 k_5}$$
$$r_{k_2 i_1} r_{k_3 i_1} = a^2_{i_1} r_{k_2 k_3}$$
$$r_{k_2 i_1} r_{k_4 i_1} = a^2_{i_1} r_{k_2 k_4}$$
$$r_{k_2 i_1} r_{k_5 i_1} = a^2_{i_1} r_{k_2 k_5}$$
$$r_{k_3 i_1} r_{k_4 i_1} = a^2_{i_1} r_{k_3 k_4}$$
$$r_{k_3 i_1} r_{k_5 i_1} = a^2_{i_1} r_{k_3 k_5}$$
$$r_{k_4 i_1} r_{k_5 i_1} = a^2_{i_1} r_{k_4 k_5}$$

mettere a posto

Ma anche $r_{k_1 i_1} r_{i_1 i_2}$

e $r_{i_1 i_2} r_{i_1 i_3}$ ..

confrontare col paragr. sul metodo bifattoriale

da cui

$$a_{i_1} = \sqrt{\frac{r_{i_1 i_2} r_{i_1 i_3} + r_{i_1 i_2} r_{i_1 i_4} + \cdots}{r_{i_2 i_3} + r_{i_2 i_4} \cdots}}$$

mettere a posto

$$\frac{+ r_{k_1 i_1} r_{k_2 i_1} + r_{k_1 i_1} r_{k_3 i_1} + \cdots}{+ r_{k_1 k_2} + r_{k_1 k_3} + r_{k_1 k_4} \cdots}$$

Il metodo invigato, arricchito in modo da poter essere

7

Sulla base del procedimento presentato in questo paragrafo è stato sviluppato dal Holzinger, un collaboratore di Spearman un metodo più complesso e flessibile, ~~tale da poter essere utilizzato anche~~ e a casi più generali ~~ad altri casi~~, da lui chiamato metodo bifattoriale.

6. Il metodo bifattoriale

Il metodo bifattoriale è un metodo che permette ~~di analizzare una matrice di correlazioni di un tests, in 1 fattore generale~~, di estrarre, oltre al fattore generale, più fattori di gruppo, con la limitazione che ogni test ~~[illegible], oltre alla saturazione~~ sia saturato, oltre che dal fattore generale ~~e alla saturazione~~ dal proprio fattore specifico, da non più di un fattore di gruppo. In altre parole, in una batteria di tests saturata, ~~da tre~~ oltre che dal fattore generale, da tre fattori di gruppo A, B, Γ, ~~la matrice fattoriale avrà corrispondenza a tale~~ .. si potranno avere p. es. 5 tests saturi, ~~oltre che~~ di G, e del fattore di gruppo A (oltre che del proprio fattore specifico

(X)

Comunque, a parte la mancanza di un fondamento teorico, l'estensione della teoria dei due fattori alle matrici non gerarchiche appariva ingiustificata in seguito alla constatazione che

Utilizzando tali dati, la matrice delle correlazioni si ricostruisce sommando le predette due matrici, ognuna delle quali era stata ottenuta moltiplicando una matrice per la sua trasposta.

In questo caso infatti l'equazione fattoriale della correlazione è $r_{xy} = a_x a_y + b_x b_y$, in cui a_x e a_y sono le saturazioni dei tests ~~x~~ e y nel fattore generale e b_x e b_y le saturazioni degli stessi due tests nel fattore di gruppo. Con le suddette operazioni si ottengono prima i valori $a_x a_y$ (cioè la matrice che comprende le quote di correlazione dovute al fattore generale) poi i valori di $b_x b_y$ (cioè la matrice che comprende le quote di correlazione dovute al fattore di gruppo); sommando le due matrici si ottiene infine una matrice i cui elementi sono $a_x a_y + b_x b_y$ cioè r_{xy}.

		7	9	.	6	9
	7	7		1		
4	7	4				
5	4	5		1		

1. Analisi di una matrice gerarchica col metodo delle sommatorie.

Per la prima fase dell'analisi sono stati proposti diversi metodi.(1) Ma il metodo che ha trovato la massima applicazione finchè i calcolatori elettronici non erano facilmente accessibili a tutte le istituzioni scientifiche è il metodo centroide di Thurstone. I vantaggi di questo metodo sono, oltre alla relativa rapidità con cui permette di fare i calcoli con l'uso di una semplice macchina calcolatrice, il fatto che esso permette di seguire direttamente tutte le fasi dei calcoli rendendosi conto del loro significato. Perciò si consiglia a chiunque intenda usare l'analisi fattoriale di compiere almeno una analisi centroide, seguita dalle necessarie rotazioni compiute col metodo grafico e relativi calcoli, prima di servirsi dei metodi non altrettanto trasparenti, anche se superiori dal punto di vista teorico che si usano servendosi dei calcolatori elettronici.

Per rendersi conto più facilmente del significato delle operazioni di calcolo richieste dal metodo centroide è opportuno considerare anzitutto il caso particolarmente semplice della matrice gerarchica.

Il metodo centroide richiede una matrice delle correlazioni completa. ~~Sorge~~ Si pone quindi prima di tutto il problema del completamento degli elementi della diagonale della matrice delle correlazioni.

Come si è detto, gli elementi mancanti sono

<pp 34 – 40>

(1) v. il cap. 11.

Con ciò si è dimostrato che esiste, per ogni ~~matrice~~ configurazione di tests, la possibilità di ottenere una soluzione fattoriale tale che, essendo nulle le somme delle saturazioni di tutti i fattori successivi al primo, si rende possibile il calcolo delle saturazioni nel primo fattore come nella matrice gerarchica.

Come si dovrà allora procedere per ottenere questa soluzione fattoriale, o in altre parole per fare sì che il primo vettore fattoriale passi per il centroide?

La risposta è molto semplice: basta considerare nulle le somme algebriche delle saturazioni dei tests nei fattori successivi al primo, e cioè procedere ~~alle~~ al calcolo delle saturazioni come nella matrice gerarchica.

Siccome tra le infinite posizioni che ~~fattori~~ può assumere il I vettore fattoriale, la sola che rende nulle le somme delle saturazioni dei tests negli altri fattori ~~è quella che coincide con il cen~~ e rende possibile il calcolo delle saturazioni sommando le colonne e dividendo le somme per la radice quadrata della somma dei termini della matrice è quella che coincide con il centroide, le saturazioni ottenute sono le proiezioni dei ~~fa~~ vettori tests nel vettore fattoriale che passa per il centroide.

dopo l'estrazione della quota di corr. dovuta al 1° fattore
I residui dei coefficienti di correlazione corrispondono a correlazioni fra tests che hanno saturazioni nulla nel primo fattore

The residuals of the coefficients of correlation after the extraction of the shares of correlation due to the 1st factor ~~are~~ correspond to correlations among tests having null loadings in the first factor

MODULARIO R. R. - *Trasporti* - 11

Mod. 13 *A*

CONCESSIONE SPECIALE *C*

DIPENDENTI DELLO STATO

MINISTERO della Pubblica Istruzione

(1) UNIVERSITA' di PADOVA

RICHIESTA N. 92

Rilasciata al Sig. (2) Prof. Metelli Fabio - Ordinario

VIAGGIO { *dalla stazione di* Trento / *alla stazione di* Padova } *via* ....

di numero (3) una — persona

(4) Prof. Metelli Fabio

(5) ....

(6) ....

Dichiaro che il titolare della presente, si trova...... nelle condizioni volute per fruire della concessione suddetta.

Bollo dell'Ufficio

(7) PADOVA, *li* 26 NOV. 1969 *19*....

Il (8) IL RETTORE

A N N O T A Z I O N I

Rilasciato il biglietto N. ....

Bollo composto della stazione

AVVERTENZE IMPORTANTI

1. – La presentazione di questa richiesta implica la piena conoscenza e l'accettazione da parte dei titolari di tutte le condizioni stabilite per fruire della riduzione.
2. – I viaggiatori debbono sempre essere muniti di documento di identità personale prescritto dalla concessione.

(1) Titolo e sede dell'Ufficio che rilascia la richiesta. – (2) Cognome, nome e qualifica del dipendente. – (3) In tutte lettere. – (4) Cognome e nome delle persone che viaggiano, compreso il dipendente, se esso pure deve viaggiare con la presente richiesta. – (5) Relazione di parentela o di servizio col dipendente; età dei figli e dei fratelli. – (6) Classi di viaggio. – (7) Luogo e data del rilascio. (8) Qualifica e firma di chi rilascia la richiesta.

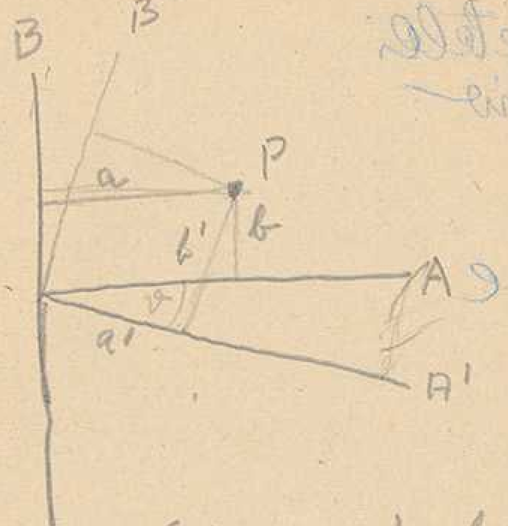
Da trattenere dalla stazione di partenza

(2221233) Roma, 1963 - Istituto Poligrafico dello Stato P.V.

$a'_t = a \cos\vartheta - b \operatorname{sen}\vartheta$ orario.
$b'_t = a \operatorname{sen}\vartheta + b \cos\vartheta$

antior.

$a'_t = a \cos\vartheta + b \operatorname{sen}\vartheta$
$b'_t = -a \operatorname{sen}\vartheta + b \cos\vartheta$

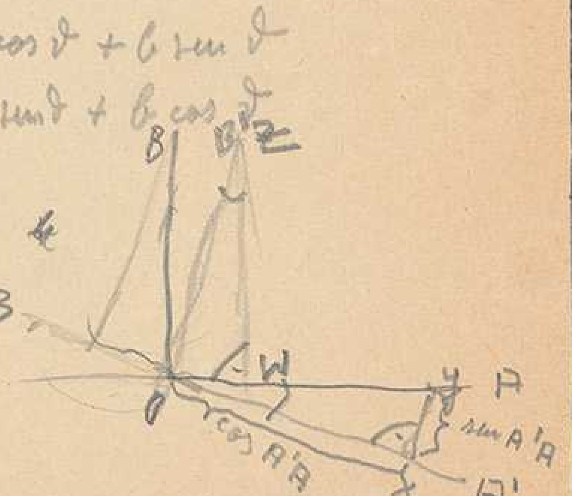


rot. oraria $\begin{cases} a' = a\cos\vartheta - b \operatorname{sen}\vartheta \\ b' = a \operatorname{sen}\vartheta + b\cos\vartheta \end{cases}$

rot. antioraria $\begin{cases} a' = a\cos\vartheta + b \operatorname{sen}\vartheta \\ b' = -a \operatorname{sen}\vartheta + b\cos\vartheta \end{cases}$

$\cos\vartheta = n_{A'A}$

$-\operatorname{sen}\vartheta = n_{A'B}$



X. p 238

La formulazione di Thurstone relativa alla struttura semplice offre comunque il fianco alla critica in quanto non ~~rappresenta~~ dà una definizione univoca di struttura semplice, tale da poter essere espressa matematicamente. Tale difetto ha come conseguenza che un ricercatore non ha modo di stabilire obbiettivamente se la struttura semplice è stata raggiunta.

A questo difetto si è ovviato: a) ~~esprimendo~~ definendo in modo più preciso la finalità da raggiungere mediante la rotazione in modo da poterla esprimere matematicamente, ciò che ha permesso realizzare la tecnica delle rotazioni automatiche per mezzo del calcolatore elettronico(1) e b) ~~calcolando un test~~ giungendo a formulare un test statistico di significatività della struttura semplice. Tale test è dovuto a Bargmann; esso stabilisce quante proiezioni nulle sono necessarie affinché un iperpiano risulti determinato in modo significativo.

Il ragionamento su cui si fonda il metodo è il seguente. Anche scegliendo a caso le variabili (i tests), sottoponendo ad analisi fattoriale i dati e ruotando ~~per~~ alla ricerca di una struttura semplice si ottengono delle proiezioni nulle, ~~cioè per~~ sui i [illegible] di ~~fatto~~ vettori fattoriali, cioè dei gruppi di vettori tests risultano orientati in modo da definire degli iperpiani. Ma que-

(1) V. Cap.

sto evidentemente è un risultato casuale. La semplicità di questa struttura non sta affatto ad indicare che in questo modo si siano individuate le reali dimensioni di un fenomeno: anzi, dato che il risultato di un'analisi di dati ottenuti con variabili scelte a caso non è interpretabile in nessun modo, la posizione dei vettori fattoriali nel senso di una struttura semplice non ha un significato diverso da una qualsiasi altra posizione.

Sorge allora allora il problema della significatività della struttura semplice: quando cioè si può dire che una struttura semplice differisce sostanzialmente da quella struttura relativamente semplice che può essere determinata esclusivamente dall'azione del caso.

A tale scopo è necessario anzitutto precisare quando si deve considerare che un vettore test fa parte di un iperpiano perpendicolare a un determinato vettore fattoriale. È chiaro che non si può esigere ~~una~~ che una coincidenza relativa. Sembra adeguata la precisazione di Bargmann secondo cui si considera appartenente all'iperpiano una variabile (test) che abbia una proiezione minore di ±.10 sul vettore fattoriale perpendicolare all'iperpiano.

(~~Ciò posto~~, È chiaro inoltre che il numero dei tests che per per ragioni puramente casuali possono trovarsi a far parte di un iperpiano cresce col numero dei tests e col numero dei fattori. Infatti le tavole di Bargmann indicano, per ~~ogni numero di tests e di fattori~~ i diversi numeri di tests e di fattori quale è il numero di tests che deve trovarsi nell'iperpiano (cioè ~~avere~~ avere una proiezione inferiore a ±.10) affinchè vi sia non più del 5% (o dell'1%) di probabilità che la semplicità della struttura realizzata da un determinato fattore sia dovuta al caso. Solo se quel numero è raggiunto è giustificato dare un'interpretazione al fattore (V. tab. ...)

ISTITUTO SUPERIORE DI SCIENZE SOCIALI
DI TRENTO
VIA G. VERDI 26 - TEL. 32.483 - 31.526

TRENTO, ...

a) calcolo del seno e del coseno dell'angolo di rotazione b) calcolo delle saturazioni dei tests nei nuovi fattori

a) Consideriamo un diagramma comune comprendente due vettori fattoriali, le proiezioni delle estremità dei vettori tests e i due vettori fattoriali ruotati (Fig $\cancel{X}$). Chiamiamo ϑ l'angolo di rotazione, cioè l'angolo formato dal vettore A e il vettore A' (o fra il vettore B e il vettore B'). ~~Prendendo in cons~~ Segnando su A' un punto P ~~che sta dall'o~~ la cui distanza dall'origine è l'unità di misura, le misure delle proiezioni di questo punto sui vettori A e B sono rispettivamente $\cos\vartheta$ e $\operatorname{sen}\vartheta$.(1) quindi si possono ottenere direttamente, per costruzione, $\operatorname{sen}\vartheta$ e $\cos\vartheta$.

Siccome le misurazioni ~~non~~ sono ~~esatte~~ inesatte si preferisce ricorrere ad un altro ~~metodo~~ procedimento. Si ~~prolunga~~ sceglie ~~il punto~~ la lunghezza del segmento OP sul vettore A' in modo che una delle sue proiezioni sia uguale a 1 (Fig Y) e quindi basta ~~misurare~~ misurare una sola delle due proiezioni (cioè supporne la misura sulla carta millimetrata). Le due misure così ottenute (di cui una è uguale a 1) sono proporzionali al seno e al coseno di ϑ, ~~ma invece~~ ma per ottenere il seno e il coseno di ϑ si devono dividere per OP le due misure suddette.

Per ottenere la misura di OP senza ricorrere ad una misurazione, si calcola tale misura applicando al triangolo rettangolo OPR il teorema di Pitagora: $\overline{OP}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{RP}^2$ quindi $\overline{OP} = \sqrt{\overline{OR}^2 + \overline{RP}^2}$. Quindi $\operatorname{sen}\vartheta = \dfrac{RP}{\sqrt{\overline{OR}^2+\overline{RP}^2}}$ e $\cos\vartheta = \dfrac{OR}{\sqrt{\overline{OR}^2+\overline{RP}^2}}$ e nel caso qui considerato, essendo $\overline{OR}=1$ $\cos\vartheta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\overline{RP}^2}}$

(1) Infatti in un triangolo rettangolo il seno di uno degli angoli è il rapporto fra il cateto opposto all'angolo e l'ipotenusa; il ~~suo~~ coseno è il rapporto fra il cateto adiacente e l'ipotenusa. Ma se l'ipotenusa è l'unità di misura, il seno è il cateto opposto e il coseno il cateto adiacente. Infatti in fig. $\cancel{Z}$ $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{BC}{AB}$ e $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$ e, se $AB = 1$, $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{BC}{1} = BC$ e $\cos\alpha = \dfrac{AC}{1} = AC$

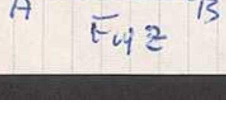


Fig Z

Lo stesso ragionamento vale per il triangolo ORP in Fig. Z: $\dfrac{OR}{1} = OR = \cos\vartheta$, e $\dfrac{PR}{1} = PR = OQ = \operatorname{sen}\vartheta$

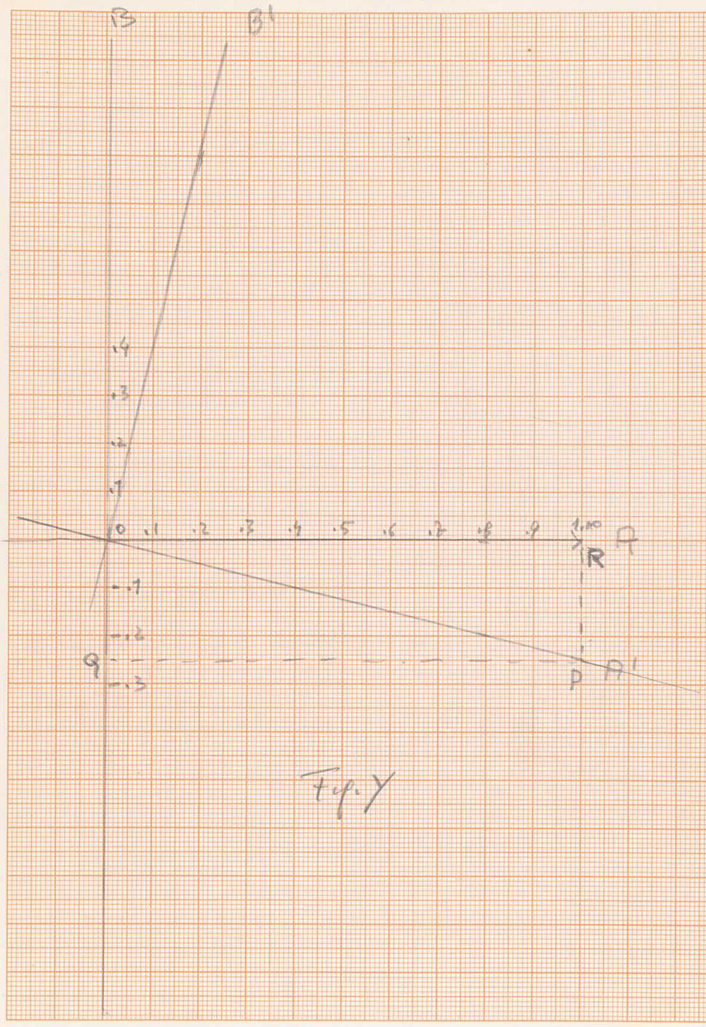

B
B'
.4
.3
.2
.1
0
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1.00
A
R
-.1
-.2
Q
-.3
P
A'

Fig. Y

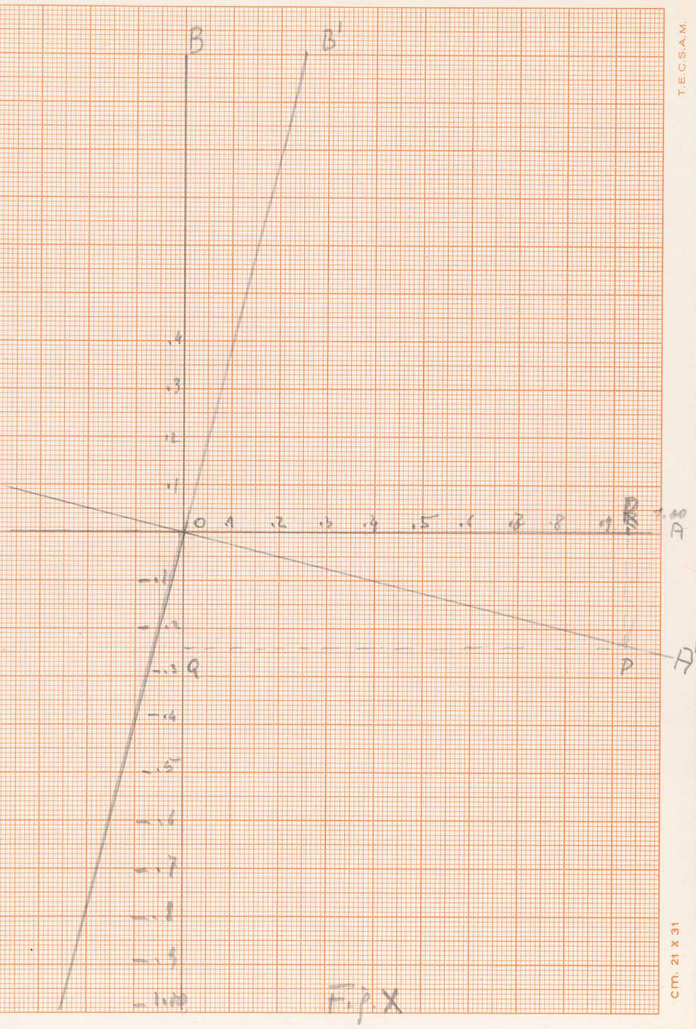

B
B'
.4
.3
.2
.1
0
.1
.2
.3
.4
.5
.6
.7
.8
.9
1.00
R
A
-.1
-.2
-.3
Q
P
A'
-.4
-.5
-.6
-.7
-.8
-.9
-1.00

Fig. X

*gli elementi della matrice Λ possono essere pertanto interpretati come saturazioni dei tests fattoriali ~~t_A t_B e~~ $t_{A'}$, $t_{B'}$, $t_{C'}$ nei tre fattori A B C e cioè

~~t_A t_B t_C~~

~~Λ~~

$$\Lambda = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_{A'} & t_{B'} & t_{C'} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{t_A} & a_{t_B} & a_{t_C} \\ b_{t_A} & b_{t_B} & b_{t_C} \\ c_{t_A} & c_{t_B} & c_{t_C} \end{bmatrix} \end{array}$$

Premoltiplicando la matrice Λ per la sua trasposta si ottiene quindi il seguente risultato

$$\begin{array}{c} \\ t_{A'} \\ t_{B'} \\ t_{C'} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{t_{A'}} & b_{t_{A'}} & c_{t_{A'}} \\ a_{t_{B'}} & b_{t_{B'}} & c_{t_{B'}} \\ a_{t_{C'}} & b_{t_{C'}} & c_{t_{C'}} \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_{A'} & t_{B'} & t_{C'} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{t_{A'}} & a_{t_{B'}} & a_{t_{C'}} \\ b_{t_{A'}} & b_{t_{B'}} & b_{t_{C'}} \\ c_{t_{A'}} & c_{t_{B'}} & c_{t_{C'}} \end{bmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c} \\ t_{A'} \\ t_{B'} \\ t_{C'} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_{A'} & t_{B'} & t_{C'} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a^2_{t_{A'}} + b^2_{t_{A'}} + c^2_{t_{A'}} = 1 & a_{t_{A'}} a_{t_{B'}} + b_{t_{A'}} b_{t_{B'}} + c_{t_{A'}} c_{t_{B'}} = r_{t_{A'} t_{B'}} & a_{t_{A'}} a_{t_{C'}} + b_{t_{A'}} b_{t_{C'}} + c_{t_{A'}} c_{t_{C'}} = r_{t_A t_C} \\ a_{t_{A'}} a_{t_{B'}} + b_{t_{A'}} b_{t_{B'}} + c_{t_{A'}} c_{t_{B'}} = r_{t_A t_B} & a^2_{t_{B'}} + b^2_{t_{B'}} + c^2_{t_{B'}} = 1 & a_{t_{B'}} a_{t_{C'}} + b_{t_{B'}} b_{t_{C'}} + c_{t_{B'}} c_{t_{C'}} = r_{t_{B'} t_{C'}} \\ a_{t_{A'}} a_{t_{C'}} + b_{t_{A'}} b_{t_{C'}} + c_{t_{A'}} c_{t_{C'}} = r_{t_{A'} t_{C'}} & a_{t_{B'}} a_{t_{C'}} + b_{t_{B'}} b_{t_{C'}} + c_{t_{B'}} c_{t_{C'}} = r_{t_{B'} t_{C'}} & a^2_{t_C} + b^2_{t_C} + c^2_{t_{C'}} = 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Lambda' \quad \cdot \quad \Lambda \quad = \quad C$$

$$= \cancel{\begin{bmatrix} 1 \\ r_{t_A t_B} \\ r_{t_A t_C} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & r_{A'B'} & r_{A'C'} \\ r_{A'B'} & 1 & r_{B'C'} \\ r_{A'C'} & r_{B'C'} & 1 \end{bmatrix}$$

In altre parole, per l'equazione fattoriale della correlazione $r_{xy} = a_x a_y + b_x b_y + c_x c_y + \dots$ e per l'equazione fattoriale della varianza $a_t^2 + b_t^2 + c_t^2 + \dots + u_t^2 = 1$ (tenendo presente che in tests fattoriali perfetti $u_t = 0$) la matrice C che è il ~~prodotto~~ risultato della premoltiplicazione della matrice Λ ~~premoltiplicata~~ per la sua trasposta ha come elementi diagonali le varianze e come elementi non-diagonali le correlazioni fra i (tests che misurano i) vettori di riferimento (4)

H

Occorre anzitutto conoscere gli angoli formati dai vettori di riferimento. Nel caso qui considerato, trattandosi della prima rotazione obliqua, ~~è chiaro che l'ango~~ gli angoli fra i vettori di riferimento sono noti. La rotazione è stata effettuata nel piano AB, e quindi l'angolo AB' si può leggere direttamente dal diagramma, mentre ~~gli altri angoli~~ il vettore B', obliquo rispetto ad A resta ortogonale rispetto al ~~terzo (e~~ vettore C ~~(e agli eventuali~~ (e resterebbe perpendicolare agli altri vettori, se ~~la struttura fosse~~ le dimensioni della struttura fossero più di tre). Ma quando tutti i vettori ~~sono~~ formano fra loro angoli diversi da 90°, lo spostamento di un vettore modifica gli angoli che esso forma con tutti gli altri vettori. ~~Si deve allora~~ per Per ~~calcolare~~ gli conoscere gli angoli tra i vettori si deve allora ricorrere alla matrice C, poiché gli elementi della matrice C sono i coseni dei suddetti angoli, servendosi di una tabella delle funzioni goniometriche si può scrivere la matrice Γ degli angoli fra i vettori di riferimento (v. Tav. 92)

Tab. 92

Si costruiscono quindi i diagrammi dei piani formati dai vettori di riferimento. Servendoci dell'esempio di Fig 92 e tab. 90 e 92 procediamo alla costruzione del diagramma AB' ad assi obliqui.(1)

(1) In questo caso il diagramma è uguale ~~al~~ a quello di Fig. 92, ed è soltanto ~~tranne per il fatto che~~ capovolto, per attenersi alla regola della posizione degli assi ~~[illegible]~~ A e B'.

$$F_0 \Lambda_{01} = O_1$$

$$O_1 \Lambda_{12} = O_2$$

$$O_2 \Lambda_{23} = O_3$$

$$F_0 \Lambda_{01} \Lambda_{12} \Lambda_{23} = O_3$$

$$\Lambda_{01} \Lambda_{12} \Lambda_{23} = \Lambda_{03}$$

$$\Lambda_{01} \; S_{12} = \Lambda_{02} \rightarrow \Lambda_{02}$$

$$\Lambda_{02} \; S_{23} = \Lambda_{03} \rightarrow \Lambda_{03}$$

e normalizzando S_{23}

Vettore di riferimento

97

Metelli Claudia

~~12 [illegible] 6~~

4 VII 5 B 12 I 3 D 10 V

7 A 8 II 14 C 6 IV 1 E

2 VI 11 G 9 III 15 F 13 VIII

4

2 p. in mat.

bianco spinge

21'

123

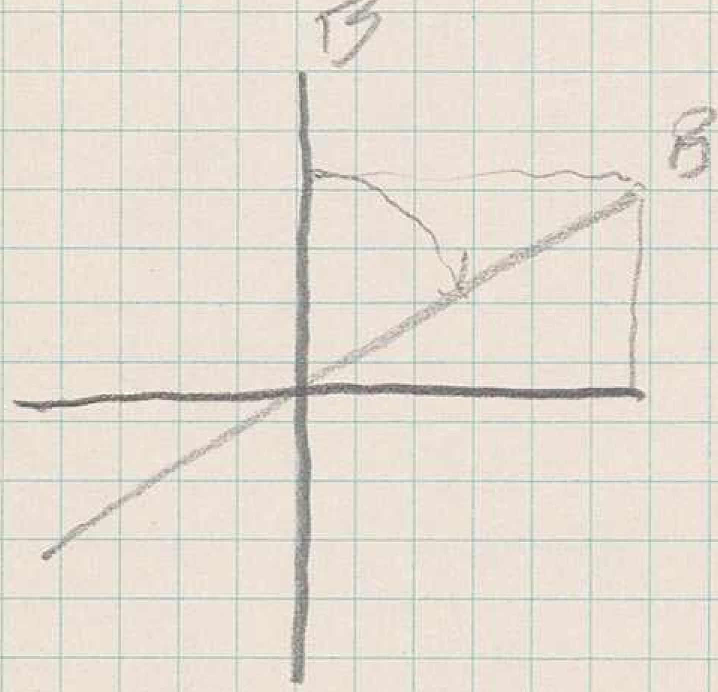
C

Colaborff. nimo entrata
stabile

3

arancio si avvicin
e tira

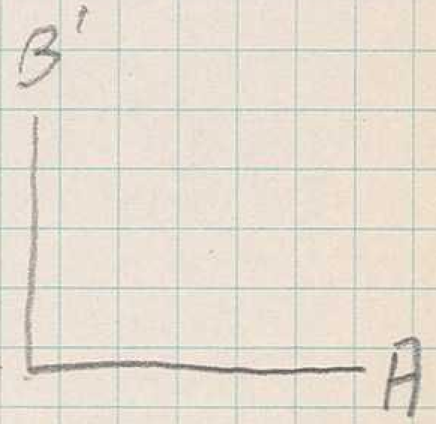
[trat. o spinta]



A B'

A

B



Scopi 1° poter calcolare le correlazioni

2° evitare di capitalizzare gli errori d'arrotonda-menti mov. indip.

[déclenchement]

1

è un mov., si avvicina
mov. indipendente
o forse spinta, no, <u>indip.</u>

[trattino]

che cosa succede se

l'moltiplica V_2 per

S_{23} norm.

$$\overset{s}{P} = \overset{s}{V} D_{PV}^{-1}$$

$$D_{PV} = T' \Lambda_{OV}$$ postmolt. da ambo i lati per Λ_{OV}^{-1}

$$D_{PV} \Lambda_{OV}^{-1} = T'$$

sappiamo

T' normalizzata per righe

$$t_{11}^2 + t_{12}^2 + t_{13}^2 = 1$$

Premolt. una matr. diag. per un'~~altra~~ matrice a ~~...~~ ottiene una matrice che ha i termini della I riga molt. per il 1° termine della matr. diag., i termini della seconda riga p. il sec. term.

quindi

$$\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}\Lambda_{11} & d_{11}\Lambda_{12} & d_{11}\Lambda_{13} \\ d_{22}\Lambda_{21} & d_{22}\Lambda_{22} & d_{22}\Lambda_{23} \\ d_{33}\Lambda_{31} & d_{33}\Lambda_{32} & d_{33}\Lambda_{33} \end{bmatrix}$$

$$D_{PV} \qquad \Lambda_{OV}^{-1} \qquad T'$$

ma T' è norm per righe

dunque

$$(d_{11}\Lambda_{11})^2 + (d_{11}\Lambda_{12})^2 + (d_{11}\Lambda_{13})^2 = 1$$

$$d_{11}^2 (\Lambda_{11}^2 + \Lambda_{12}^2 + \Lambda_{13}^2) = 1$$

$$d_{11}^{\#} = \sqrt{\frac{1}{\Lambda_{11}^2 + \Lambda_{12}^2 + \Lambda_{13}^2}}$$

$$D = T'\Lambda$$

$$(T')^{-1} D = \Lambda$$

$$(T')^{-1} =$$

11. La composizione semplice raggiunta a partire dalla struttura semplice ottenuta con il metodo radiale.

p. 328

quando si procede col metodo radiale (in base alla ~~formula~~ equazione $\overset{c}{P} = \overset{s}{V} D^{-1}_{PV}$)

~~In questo caso~~ la matrice D necessaria per calcolare la matrice $\overset{c}{P}$ delle saturazioni dei tests nei fattori primari ~~della composizione fattoriale dei fattori primari~~ dalla matrice $\overset{s}{V}$ delle correlazioni dei tests ~~sub~~ con i vettori di riferimento, si ottiene per un'altra via.

La matrice D_{PV} si era ottenuta moltiplicando la matrice T', considerata come una contradizione della matrice costruita per la matrice ~~L equazione~~ di rotazione Λ_{OV}, cioè in base all'equazione matriciale

$$T' \overset{s}{\Lambda}_{OV} = D_{PV}$$ ~~utilizzata per calcolare la matrice D_{PV}~~

Ma la suddetta equazione contiene ~~in questo caso~~ due incognite, poiché procedendo col metodo radiale non si ottiene la matrice T delle correlazioni fra fattori ortogonali e fattori primari. Tuttavia Risolvendo l'equazione per T'

$$T' = D \Lambda^{-1}_{OV}$$

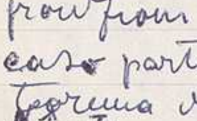
si ha modo di calcolare la matrice D_{PV} fondandosi sulle seguenti considerazioni.

~~Mentre~~ La matrice T_{OP} è ~~una~~, come la matrice Λ_{OV} una matrice di coseni degli angoli formati dai vettori fattoriali tra loro ortogonali con altrettanti vettori fattoriali tra loro obliqui. Perciò è "normalizzata per colonne", cioè la somma dei quadrati degli elementi di ogni singola colonna è uguale ad 1.(1) Quindi T', la trasposta di T è normalizzata per righe.

La matrice D deve dunque essere tale che, premoltiplicata con l'inverso della matrice Λ, dà luogo ad una matrice-prodotto che ha la ~~caratterist~~ proprietà di essere normalizzata per righe.

Sappiamo inoltre che postmoltiplicare ~~ndo~~ una matrice diagonale ~~con~~ ad ~~un'altra mat~~ una matrice equivale a moltiplicare ~~il primo termine della matrice diagonale per tutti~~ gli elementi della prima riga della

(1) questo perché, ~~come è stato detto precedentemente (p 243, nota)~~ si tratta delle proiezioni di un vettore fattoriale unitario su vettori fra loro ortogonali. Nel caso particolare di 2 fattori si tratta semplicemente di un'applicazione del teorema di Pitagora.



$$T_A^2 = 1 = 0A_1^2 + 0A_2^2$$

matrice per il primo elemento della matrice diagonale, i termini della seconda riga della matrice per il secondo elemento della matrice diagonale, e così via.(1)

Si possono quindi calcolare gli elementi della matrice diagonale dagli elementi(2) ~~dell'inverso~~(2) della matrice Λ^{-1} in quanto

$$\cancel{(\Lambda_{11} D_1)^2 + (\Lambda_{12} D_1)^2 + \dots + \Lambda_{1k}^2 D_k^2 = 1}$$
$$\cancel{\Lambda_{11}^2 D_1^2 + \Lambda_{12}^2 D_2^2 + \dots + \Lambda_{1k}^2 D_k^2 = 1}$$

$$(d_1 \Lambda_{11})^2 + (d_1 \Lambda_{12})^2 + \dots + (d_1 \Lambda_{1k})^2 = 1$$

$$d_1^2 \Lambda_{11}^2 + d_1^2 \Lambda_{12}^2 + \dots + d_1^2 \Lambda_{1k}^2 = 1$$

$$d_1^2 (\Lambda_{11}^2 + \Lambda_{12}^2 + \dots + \Lambda_{1k}^2) = 1$$

$$d_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{\Lambda_{11}^2 + \Lambda_{12}^2 + \dots + \Lambda_{1k}^2}}$$

e così per $D_2, D_3, \dots D_k$

Si devono comunque calcolare l'inverso della matrice Λ_{0v} e quindi calcolare gli elementi della matrice D_{0v} nel modo suesposto.

Ottenuta in tal modo la matrice D_{p01}, se ne calcola l'inversa D^{-1}, che non è altro che una matrice diagonale i cui termini sono $\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}$ ecc., e quindi < > (p. 330)

(2) Gli elementi dell'inverso di una matrice si usano indicare con la lettera maiuscola; quindi Λ_{pq} è un elemento della matrice Λ^{-1} mentre λ_{pq} è un elemento della matrice Λ!

(1)
$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & d_1 a_{13} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & d_2 a_{23} \\ d_3 a_{31} & d_3 a_{32} & d_3 a_{33} \end{bmatrix}$$

le D devono essere minuscole

	Proiezioni ortogonali	Proiezioni parallele
Vettori di riferimento (ortogonali ai piani contenenti i vettori-tests)	*a) Struttura semplice* Correlazioni fra tests e vettori di riferimento (cioe' proiezioni ortogonali di vettori-tests sui vettori perpendicolari ai piani contenenti i vettori-tests).	*c)* Composizione non semplice. Saturazioni dei tests nei vettori di riferimento (cioe' proiezioni parallele dei vettori-tests sui vettori perpendicolari ai piani contenenti i vettori-tests).
Fattori primari (intersezioni dei piani contenenti i vettori-tests)	*b)* Struttura non semplice. Correlazioni fra tests e fattori primari (cioe' proiezioni ortogonali dei vettori-tests sui vettori collineari alle intersezioni fra i piani che contengono i vettori-tests).	*d) Composizione semplice* Saturazioni dei tests nei fattori primari (cioe' proiezioni parallele dei vettori-tests sui vettori collineari alle intersezioni fra i piani che contengono i vettori-tests).

Tabella 126.

in fig. 123) si deve compiere un ultimo passaggio, assumendo come vettori fattoriali le intersezioni fra i piani, che egli chiama *fattori primari*, e realizzando in tal modo la composizione semplice.

Come vedremo in seguito, vi e' la possibilita' di passare mediante un calcolo, dalla struttura semplice alla composizione semplice, cioe' dalla matrice delle proiezioni ortogonali dei tests sui vettori di riferimento (i quali, essendo raggiunta la struttura semplice, sono orientati ortogonalmente ai piani contenenti i tests) alla matrice delle proiezioni *oblique* dei tests sui fattori primari, cioe' sui vettori che coincidono con le intersezioni dei piani contenenti i tests. Ma non e' questa la sola trasformazione delle coordinate di cui si offre la possibilita'. Vi e' anche la possibilita' di passare dalla matrice delle proiezioni ortogonali dei tests sui vettori di riferimento (orientati in modo da ottenere la struttura semplice) alla matrice delle proiezioni *ortogonali* dei tests sui fattori primari (che, come si e' detto, non costituiscono una struttura semplice). Vi e' infatti la possibilita' di ottenere (e quindi di calcolare) le proiezioni ortogonali o le proiezioni oblique, sia sui vettori di riferimento sia sui fattori primari, ma solo le proiezioni ortogonali sui vettori di riferimento (orientati come e' stato detto) rappresentano una struttura semplice, e soltanto le proiezioni oblique sui fattori primari rappresentano una composizione semplice (tab. 126).

10 La rotazione nel modello geometrico dei vettori estesi

9. Il passaggio dalla struttura semplice alla composizione semplice

Per chiarire il significato dei ~~Prima di considerare i~~ procedimenti di calcolo che consentono di passare dalla struttura semplice dei vettori di riferimento alla ~~struttura dei fattori primari o alla~~ composizione semplice, riprendiamo in esame la trasformazione ottenuta estendendo i vettori-tests fino ad ottenere proiezione 1.000 sul primo vettore centroide A, trasformazione che ci permette di eseguire *direttamente* in modo intuitivamente evidente una rotazione degli assi tale da portarli a coincidere con le intersezioni tra i piani contenenti i tests. *

a) Utilizziamo ancora una volta il diagramma di fig. 117, riprodotto in fig. 124, cioe' il piano perpendicolare all'asse centroide A, a distanza 1.000 dall'origine, su cui appaiono le estremita' dei vettori-tests estesi, e le tracce dei piani α, β e γ su cui giacciono i vettori-tests.

le proiezioni dei vettori fattoriali B e C

Congiungendo i tre vertici del triangolo con la proiezione dell'origine otteniamo le proiezioni, sul predetto piano perpendicolare al vettore A, delle intersezioni dei tre piani, cioe' dei vettori fattoriali primari.

Per ottenere la matrice prodotte delle proiezioni dei vettori-tests sui vettori primari (cioe' sulle intersezioni dei piani contenenti i tests) occorre la matrice di trasformazione, comprendente i coseni degli angoli fra i vettori fattoriali primari e i vettori centroidi. Si tratta quindi di ottenere, al solito, le proiezioni degli assi ruotati, cioe' degli assi dei fattori primari (prolungati in modo che una delle proiezioni sia 1.000), sugli assi centroidi.

Consideriamo a tale scopo uno dei vertici P_A, P_B, P_C del triangolo rappresentato in fig. 124, per es. il punto P_B. Tale punto puo' essere considerato l'estremita' di un vettore fattoriale ruotato ~~prolungato~~ (1): infatti esso si trova nel piano E, e, come tutti i punti del piano E ha proiezione 1.000 sul vettore centroide A (fig. 125).

Dunque la proiezione del punto P_B (e quindi del vettore primario prolungato F_B) sul vettore centroide A e' 1.000. Le proiezioni su B e C si possono leggere direttamente sul diagramma di fig. 124, su cui sono stati proiettati i suddetti vettori fattoriali B e C, ortogonali ad A. Essi sono, rispettivamente -1.67 e .06; ma in questo caso particolare, poiche' P_B coincide con 1, possiamo ricavare da tab. 121 le proiezioni del vettore-test esteso 1, che conosciamo con molta maggior esattezza, e cioe' -1.6745 e .0611.

Nella matrice che denominiamo P_{0F}, per distinguerla dalla S_{01} e dalla L_{01}, si registrano le proiezioni dei vettori primari prolungati

(1) In questo caso particolare il punto P_B coincide con l'estremita' del vettore-test 1. Va tenuto presente pero' che non e' affatto necessario che i vertici del triangolo corrispondano a dei punti-tests, cioe' a dei punti d'incontro di vettori-tests prolungati col piano perpendicolare all'estremita' del vettore fattoriale centroide. Quando cio' avviene, significa che un vettore-test coincide, per la sua direzione, con un fattore primario.

* È utile far presente fin d'ora che la composizione dei fattori primari (cioè la matrice delle saturazioni dei tests nei fattori primari) si ottiene in due tempi:

a) passaggio dalla matrice delle proiezioni ortogonali dei tests sui ~~fattoriale sui~~ vettori di riferimento alla matrice delle proiezioni ortogonali dei tests sui fattori primari (struttura dei fattori primari)

b) passaggio dalla matrice delle proiezioni ortogonali dei tests sui fattori primari alla matrice delle proiezioni oblique sui fattori primari (cioè dalla struttura alla composizione dei fattori primari).

No: si ottiene prima la matrice di trasformazione ~~rotaz.~~ ~~fra vettori di riferimento e vettori~~ dalle proiezioni ortogonali dei tests sui vettori di centroidi ~~riferimento~~ alle proiezioni ortogonali dei tests sui vettori di riferimento ~~centroidi~~ e da questa la matrice di rotazione dalle ~~vett.~~ pr. ortog. dei tests sui vettori centroidi alle proiezioni oblique dei tests sui vettori primari

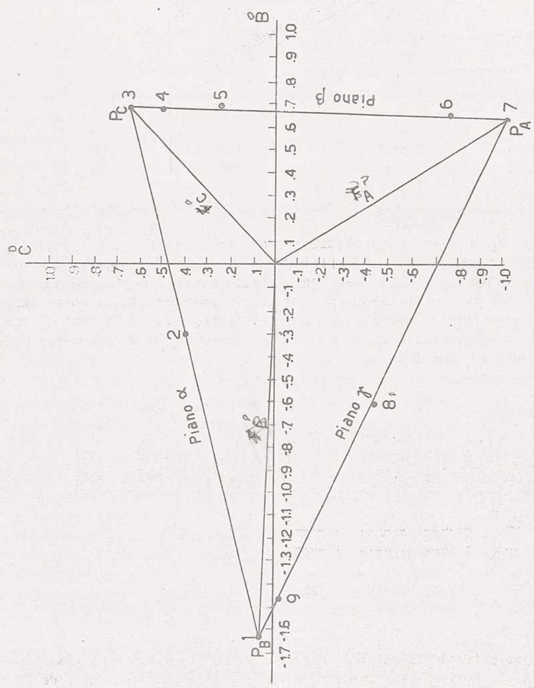


Fig. 124.

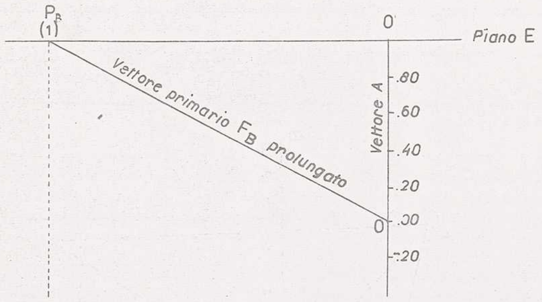


Fig. 125.

F_A, F_B, F_C, e cioe' la proiezione 1.000 (per tutti e tre i vettori) sul vettore centroide A e le proiezioni dei punti P_A, P_B, P_C sui vettori centroidi B e C (v. tab. 127). Dalla matrice delle proiezioni dei vettori ~~prolungati~~ si passa, col solito procedimento di normalizzazione, alla matrice dei coseni degli angoli tra vettori fattoriali originari e vettori fattoriali ruotati, matrice che, per distinguerla dalla Λ_{O1} denominiamo K_{0F}. T_{OP} cioè tra vettori fattoriali ortogonali e vettori fattoriali primari

P_{0F}

	F_A	F_B	F_C
A	1.0000	1.0000	1.0000
B	.6400	-1.6745	.6814
C	-1.0366	.0611	.6547
Σp^2	2.4841	3.8077	1.8929
$\sqrt{\Sigma p^2}$	1.5761	1.9513	1.3758
$\frac{1}{\sqrt{\Sigma p^2}}$	.634	.512	.727

T_{OP} K_{0F}

	F_A	F_B	F_C
A	.634	.512	.727
B	.406	-.857	.495
C	-.657	.031	.476

Tabella 127.

Moltiplicando la matrice centroide F_0 per la matrice di trasformazione K_{0F} (T_{OP}) otteniamo la matrice F_1 (S) delle proiezioni (*ortogonali*) dei vettori-tests sui vettori fattoriali primari (tab. 128). In tab. 129 otteniamo, al solito, premoltiplicando la matrice di trasformazione per

cioè della struttura dei fattori primari

la sua trasposta, i coseni degli angoli che i fattori primari formano tra loro. cioè la matrice Φ delle correlazioni tra fattori primari,

F_0 ($\overset{o}{A}$)

	$\overset{o}{A}$	$\overset{o}{B}$	$\overset{o}{C}$
1	.507	-.850	.031
2	.771	-.246	.310
3	.638	.434	.417
4	.504	.344	.261
5	.809	.548	.192
6	.329	.217	-.252
7	.595	.381	-.617
8	.746	-.462	-.329
9	.249	-.369	-.008
Σ	5.148	-.003	.005

$\cdot$ K_{0F} (T_{OP})

	F_A^p	F_B^p	F_C^p
$\overset{o}{A}$	.634	.512	.757
$\overset{o}{B}$	.406	-.857	.495
$\overset{o}{C}$	-.657	.031	.476

$=$ F_1 ($\overset{p}{S}$)

	F_A^p	F_B^p	F_C^p
1	-.044	.989	-.038
2	.185	.615	.586
3	.307	-.032	.877
4	.288	-.029	.661
5	.609	-.050	.951
6	.462	-.026	.227
7	.937	-.041	.327
8	.501	.768	.157
9	.013	.444	-.005
Σ	3.258	2.638	3.743
Contr.	3.260	2.639	3.743

Tabella 128.

K'_{0F} (T'_{OP})

	$\overset{o}{A}$	$\overset{o}{B}$	$\overset{o}{C}$
F_A^p	.634	.406	-.657
F_B^p	.512	-.857	.031
F_C^p	.727	.495	.476

$\cdot$ K_{0F} (T_{OP})

	F_A^p	F_B^p	F_C^p
$\overset{o}{A}$	.634	.512	.727
$\overset{o}{B}$	.406	-.857	.495
$\overset{o}{C}$	-.657	.031	.476

$=$ ($\overset{p}{\Phi}$)

	F_A^p	F_B^p	F_C^p
F_A^p	.998	-.043	.349
F_B^p	-.043	.998	-.037
F_C^p	.349	-.037	1.000

Tabella 129.

Confrontando la matrice F_0 ($\overset{v}{S}$) (tab. 123) con la matrice F_1 ($\overset{p}{S}$), si constata che quest'ultima, a differenza della prima, *non* e' caratterizzata da semplicita' di struttura. Si tratta infatti del caso *B* di tab. 126: abbiamo calcolato le proiezioni *ortogonali* dei vettori-tests sui fattori primari, cioe' la struttura dei fattori primari, che non e' semplice.

b) Consideriamo ora T_{OP} ~~Allo scopo di rendere piu' familiare la nozione di fattore primario e di metterne in luce le caratteristiche prendiamo in esame~~ la matrice T_{0P} e la sua trasposta T'_{0P}. Gli elementi di queste due matrici sono i coseni degli angoli che i vettori primari formano con i vettori centroidi, cioe' le correlazioni dei vettori primari con i vettori centroidi; ed anche - poiche' i vettori centroidi sono ortogonali - *le saturazioni dei vettori primari nei vettori fattoriali centroidi.*

Per renderci conto di che cosa cio' significhi ricordiamo che nel nostro esempio tre tests (1, 3, 7) coincidevano per direzione con i tre vettori primari. Come abbiamo gia' fatto in un'altra occasione possiamo anche qui ricorrere all'artificio di considerare i vettori fattoria-

li come tests perfetti, privi di fattore specifico. Cio' posto, possiamo considerare la matrice ~~K_{0F}, o meglio la sua trasposta~~ T'_{0P}, come una matrice fattoriale centroide, o meglio come una continuazione della matrice fattoriale centroide $\overset{o}{A}$, che comprenderebbe in questo caso oltre ai tests 1-9 anche i tre tests $F_A^p F_B^p F_C^p$ (1).

Viene fatto allora di chiedersi quale risultato si ottenga se, considerando K'_{0F} parte della matrice F_0, si moltiplica anche K_{0F} per Λ_{O1} (v. tab. 130).

F_0 ($\overset{o}{A}$)

	$\overset{o}{A}$	$\overset{o}{B}$	$\overset{o}{C}$
1	.507	-.850	.031
2	.771	-.246	.310
3	.638	.434	.417
4	.504	.344	.261
5	.809	.548	.192
6	.329	.217	-.252
7	.595	.381	-.617
8	.746	-.462	-.329
9	.249	-.369	-.008

Λ_{O1}

	$\overset{v}{A}$	$\overset{v}{B}$	$\overset{v}{C}$
$\overset{o}{A}$	.422	.557	.550
$\overset{o}{B}$	.220	-.831	.353
$\overset{o}{C}$	-.880	.017	.758

F_1 ($\overset{v}{S}$)

	$\overset{v}{A}$	$\overset{v}{B}$	$\overset{v}{C}$
1	.000	.989	.002
2	-.002	.639	.572
3	-.002	.001	.820
4	.058	-.001	.596
5	.293	-.001	.784
6	.408	-.002	.067
7	.878	.004	-.006
8	.502	.793	-.002
9	.031	.445	.001

K'_{0F} (T'_{OP})

	$\overset{o}{A}$	$\overset{o}{B}$	$\overset{o}{C}$
10 F_A^p	.634	.406	-.657
11 F_B^p	.512	-.857	.031
12 F_C^p	.727	.495	.476
Σ	7.021	.041	-.145

D

	$\overset{v}{A}$	$\overset{v}{B}$	$\overset{v}{C}$
F_A^p	.935	.004	-.006
F_B^p	.000	.998	.002
F_C^p	-.003	.002	.935
Σ	3.098	3.871	3.765
Contr.	3.099	3.873	3.766

Tabella 130.

Eseguendo la moltiplicazione si sono calcolate le proiezioni di F_A^p, F_B^p, F_C^p sui vettori di riferimento disposti ortogonalmente ai piani su cui giacciono i vettori-tests, in modo da realizzare la struttura semplice.

Il risultato della moltiplicazione e' ~~una~~ la matrice diagonale D_ω cioe' una matrice che ha non-nulli soltanto gli elementi che costituiscono la diagonale principale.

(1) La ragione per cui la trasposta di K_{0F} ha questo carattere e' che, date le regole della moltiplicazione di matrici (riga per colonna), le matrici moltiplicatrici si devono disporre per colonne anziche' per righe, cioe' si devono scrivere trasposte.

O—O p 323

~~Sotto~~ Moltiplicando quindi ~~ancora~~ anche la matrice T'_{op} per la matrice Λ che
moltiplicata per la matrice fattoriale $\mathring{A}$ aveva operato la rotazione
(cioè la correlazione fra testi e vettori di riferimento orientati in modo da
~~Ia~~ realizzando la struttura semplice dei vettori di riferimento,
si ottiene la matrice diagonale D delle correlazioni fra vettori pri-
mari e vettori di riferimento. Si tratta di una matrice diagonale
come risulta da Fig. 123 e 124
in quanto ogni vettore primario, costituendo l'intersezione di due dei
tre piani perpendicolari ai vettori di riferimento, giace sui suddetti due piani
ed è quindi perpendicolare a due dei tre vettori di riferimento ed è quindi
privo di correlazione con due vettori di riferimento e correlato soltanto
con il vettore di riferimento omologo. realizzare la struttura semplice)

Come si è visto nel paragrafo precedente la matrice D è la matri-
ce di rotazione che consente di raggiungere il fine dell'analisi fattoriale, cioè
la composizione semplice. Col metodo dei vettori estesi si ~~ottiene~~ ottiene
la matrice D ~~per una via diversa~~ ~~[illegible]~~ utilizzando ~~direttamente~~ l'equazione
$T'_w \Lambda_w = D_w$ poiché in questo caso si dispone della matrice T_w. Perché la D_w fa passare dalla str. alla comp. [illegible]

La ragione per cui in q. caso (vettori estesi)
si è ottenuto la matrice $\bar{F}$ ~~è che~~ non esiste. Si
trattava soltanto di ottenere la matrice di rotazio-
ne.

Analisi funzionale

Parte I

c. II ~~§ 1, 2, 3, 4,~~ 5 (~~fino a p. 28~~, escluse le ultime 3 ~~righe di~~ p. 28, e p. 29–33)

~~§ 6~~ tutto, escluse

c. III

c. IV § 1 (5)

Parte II

c I, I

c II

c III 1, 2, 3, 4, 5, 8

c IV 1, 2, 3, 4, 5, 6, (8), 9 (escluse pp. 187–190)

c V 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

c VI 1, 7, 8

VII 1, 3,

per le sue caratteristiche questo libro va letto al completo, dall'inizio. Inoltre, pur ~~essendo una trattazione completa~~ trattando tutti i punti importanti, è fondamentalmente una trattazione a scopo didattico e~~ssa~~ è quindi destinata soprattutto a rendere meno faticosa la strada a chi per la prima volta si appressa a quest'argomento.

Pag. 159 commutare nota

Fig. ~~157~~ 56

$\times 1{,}40$

p. 156

perlomeno $a_1 \underset{=}{\pm} a_2 \dots \underset{=}{\pm} a_n$

p. 155

?
× la colonna è . . . .

ultimo capoverso

ricordare che la posizione dei vettori fattoriali è arbitraria

154

× nei capoversi 5, 6, 7

133

capoverso 3 ogni

132 capoverso 2 "è chiaro"

capoverso 3 conseguenze

4 fine [?]

Fig. 65

segnare qualche

proiezione sui fattori ruotati

64

eliminare le proiezioni di

h_1

p. 195 2° capoverso

indicare in che fattori

avrebbero ponderazione zero

p. 199

Tab. 60

non sempre 6 test per

ogni fattore

punti b) e c) almeno

penultimo capoverso:

chiarire anziché intuire

nota 1, c) espressa male

p. 160 capoverso 5

ma che cosa significa ottenere un risultato superiore

UNIVERSITÀ DI PADOVA
ISTITUTO DI PSICOLOGIA SPERIMENTALE
Piazza Capitaniato

IL DIRETTORE

Si comincia

Va notato tuttavia che vi è la possibilità di ottenere le communanze ~~con un procedimento non fattoriale~~. senza passare per l'analisi fattoriale, almeno con una matrice di correlazioni non affetti da errori (il che è sufficiente agli effetti della ~~considerazioni~~ presente linea di ragionamenti).

Si tratta cioè di ~~determinare~~ trovare ~~i numeri da scelti come elementi della diagonale~~ ~~il rango minimo~~ determinano il rango minimo della matrice delle correlazioni. ~~Ess~~ Si comincia con ogni gruppo di minori di ordine m - 1 (se m è l'ordine della matrice) ~~considerando, per ognuno di essi come~~ ponendo come incognite le communanze e stabilendo se esistono dei valori per i quali il determinante si annulla. Si procede così con i minori d'ordine m-2, m-3 ecc. finchè si trova l'ordine per cui non tutti i determinanti possono annullarsi; I valori ~~per i quali~~ nell'ultima serie di minori ~~per i quali tutti~~ i determinanti si annullano, sono le communanze,

28762

Analisi fattoriale

p. 3 rigo 9 giapponesi psicologi

p. 4 2° cpv. riferimento storico in scala

p. 5 riga 2 [entro i limiti dell'errore casuale] Se nell'universo $r = 1$ anche nel campione $r = 1$ quindi o parlare dell'attenuazione o eliminare

p. 5 ultim capov. [strano a dirsi]

p. 8 primo rigo 0,44 e non 0,42

p. 11 prim cpv. specifico;

p. 13 punti esclamativi; m n e non n n

p. 32 tab. 13 spiegare che dev'essere vuota o con residui non significativi; e che qui non ha interesse, ma poi sì per ~~continuare~~ altre l'analisi

p. 34 autocorrelazioni - cambiare espressione, perché in statistica = serie storica; dati al tempo t con dati sfasati al tempo $t-1$

p. 40 dire che è sconsigliabile ma importante per l'uso che se ne fa in seguito. Eliminare Procedimento

3° capov. si può assumere [ma]

p. 58 cpv. 5 nuvola "che ha inclinazione positiva e quindi giace nel 1° e nel 3° quadrante

p. 71 l'altro ~~1~~ del test (3° cpv.)

p. 74 obiez. di Nardeo. Allora se $\cos\alpha = 1$ t_1 e t_2 si chiudono su g e non hanno specifici?

No. sono assurdi nel modello se la loro somiglianza porta all'aumento di g e alla diminuzione degli specifici. Esiste il caso di t_1 e t_2 simili (indubbiamente) per correlaz. specifica

80 distribuz. normale. In caso di distribuz. non normale ellissi ma non è detto che l'andamento sia monotono

90 rifare la figura 36

p. 106 nota 1 $r_{k_1}/_{k_2}$ corr. r_{k_1,k_2}

$r_{i_3}/_{k_2}$ " $r_{i_3 k_2}$

p. 112 r_e = correlaz. fra residui

p. 123 nota 1 far vedere anche i minori non appartenenti a righe contigue

p. 142 nota NB il maggiore minore che si può fare mancando le commandse è di ordine $\frac{n}{2}$ se è pari e $\frac{n-1}{2}$ se è dispari

p. 201 considerare la possibilità che i test non stiano entro 90°

237 dire che se un test è bifattoriale, sta in mezzo al cubo

275 ~~nel~~ penultima riga saturazioni proiezioni

284 "proiezioni" "vettori di riferimento"

299 ~~a~~ penultimo capoverso — per tre fattori si allinea lungo i lati di un triangolo. In genere ci sono anche test bidimensionali e allora se stanno fuori o dentro

300 figura 114 segnare il triangolo e dire che i punti che stanno fuori o dentro fanno eccezione alla struttura semplice

301 3° cpv. ~~proiezioni estremi~~ Tests coi < massimi cioè coi > vettori di rif.

302 Tab. 120 togliere le colonne B_E e C_E

305 cpv. 3 Ci comportiamo come [No] se la proiez. fosse zero. è più semplice per dimostrazione struttura semplice

cpv. 4 Triangolo (Nota) l'esattezza dell'allineamento dipende dal fatto che si tratti di soli fattori

310 tab. 123 confrontando a p. 294 (V_6) c'è un'inversione di A e C'

313 citare fig. 120 (mai citata) alla fine del 2° cpv.

323 tab. 130 D l'obliquità è scarsa

325 1° cpv. citata 2 volte la nota 1 — perché non si fa l'inverso degli zeri

326 nota dei corrispondenti elementi < degli elementi della diagonale principale

324 nota 4 dare nel caso precedente questa matrice e far vedere come viene fuori

347 cpv. 4 stati d'animo (moods) 1 348 ultimo cpv. specie)

Cap VII

La stima delle misure fattoriali

Cap. VIII

Alcune questioni teoriche

1. Modelli di analisi ed equazioni fondamentali

2. Componenti e fattori

3. Analisi delle misure grezze

4. ~~Analisi di~~ Fattori di 2° ordine

Cap. IX

Altri procedimenti

metodo di Spearman – Holzinger

1 Metodo della radice quadrata

2 Metodo dei ~~fatt~~ Hotelling

3 Metodo dei gruppi multipli

[illegible]

A

prima mov. obbuti
poi cerchi fermi
s'alternano

6

due in movimento
spinta

[bianco spinto]

Analisi di 2° ordine

Altri metodi d'analisi

Componenti principali

Clustering, Diagonale

Analisi ~~dei~~ a partire dalla matrice dei dati

Cenni su ulteriori metodi

~~Altri metodi di rotazione~~

L'analisi automatica a mezzo del calcolatore elettronico

Metodi di approssimazione delle communaltà

Spearman

Communaltà

Teoria generale

completare il cap. sulla misura dei fattori e eventualmente spostarlo

Analisi fattoriale

1. Componenti principali
2. Clusters
3. Clustering methods
4. Varimax
5. Analisi di 2° ordine
6. Interpretazione dei fattori
Nunnally
Guttmann

Francobolli proteri[?]
cartoline acqua col.
stampe
grafiche? manile?
libri Verne
tel. Meyerson
cat orario ministero Ristorante

9. Il passaggio dalla struttura semplice alla composizione semplice

Non si tratta di un risultato fortuito. Basta pensare che i fattori primari costituiscono ognuno l'intersezione di due dei tre piani α, β, γ, e che ciascuno di tali piani e' ortogonale a uno dei tre vettori di riferimento V_A, V_B, V_C, per rendersi conto che ogni vettore primario, giacendo su due di tali piani, ha proiezione nulla su due vettori di riferimento, e proiezione non nulla su uno soltanto, cioe' sul terzo. La moltiplicazione di matrici $K'_{OF}\,\Lambda_{OI} = D$ puo' servire dunque di controllo dei calcoli.]

Y(matrice F)

La struttura dei fattori primari, cioe' l'insieme delle *proiezioni ortogonali* dei vettori-tests sui vettori primari (la matrice $\overset{s}{P}$) serve, come si e' detto, per ~~calcolare~~ stimare le misure ~~probabile~~ dei fattori primari di un soggetto, Y in quanto, per calcolare i coefficienti dell'equazione di regressione multipla,# occorrono appunto tali proiezioni ortogonali, che sono i coefficienti di correlazione dei tests con i fattori primari. Le *proiezioni oblique* dei vettori-tests sui vettori fattoriali primari costituiscono invece la composizione ~~fattoriale~~ dei fattori primari, cioe' l'insieme delle saturazioni dei tests nei fattori, che sono i coefficienti delle equazioni di specificazione fattoriale e servono per interpretare fattorialmente i tests. La composizione fattoriale dei vettori primari si ottiene facilmente dalla struttura dei vettori di riferimento + in quanto le colonne della matrice $\overset{c}{P}$ (saturazioni dei tests nei fattori primari, cioe' composizione fattoriale) sono proporzionali a quelle della matrice $\overset{s}{V}$ (correlazioni dei tests con i vettori di riferimento, cioe' struttura fattoriale) (1); la formula per il calcolo, la cui deduzione richiede un po' di algebra matriciale (2) e

+(matr. V)

\# per mezzo della quale si compiono le stime ridotte

(1) Cio' equivale a dire che una delle due matrici e' uguale all'altra, moltiplicata per una matrice diagonale. Infatti moltiplicare una matrice per una matrice diagonale significa moltiplicare tutti i termini della 1a colonna per il I termine della diagonale, tutti i termini della 2a colonna per il II termine della diagonale, ecc.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}X_{11} & a_{12}X_{22} & a_{13}X_{33} \\ a_{21}X_{11} & a_{22}X_{22} & a_{23}X_{33} \\ a_{31}X_{11} & a_{32}X_{22} & a_{33}X_{33} \end{bmatrix}$$

(2) Per dedurre l'equazione che permette il calcolo della matrice W_C i cui elementi sono le saturazioni (cioe' le proiezioni oblique) dei tests nei fattori primari, dobbiamo anzitutto definire alcuni simboli:

z = matrice dei risultati dei soggetti nei tests (le righe corrispondono ai tests e le colonne ai soggetti), in unita' normalizzate, cioe' unita' standard divise per $\sqrt{n}$ [percio' i termini saranno simboleggiati da $z^{(n)}$].

F_p = matrice delle misure dei soggetti nei fattori (le righe corrispondono ai fattori e le colonne ai soggetti), pure in unita' normalizzate [$f^{(n)}$].

Il vantaggio delle unita' normalizzate e' la semplificazione della formula della correlazione che si riduce a una somma di prodotti [$r_{xy} = \Sigma z_x^{(n)}\, z_y^{(n)}$] e una matrice di correlazioni puo' quindi venir espressa mediante una moltiplicazione di matrici; per es. $zz' = R$, cioe' la matrice dei risultati dei soggetti, moltiplicata per la sua trasposta, e' uguale alla matrice delle correlazioni. Cio' premesso $z = W_C F_p$: infatti ogni elemento di z, $z_{tp} = W_{At} f_{Ap} + W_{Bt} f_{Bp}$. $zF'_p = W_C F_p F'_p$, ma $F_p F'_p$ e' la matrice delle correlazioni fra i fattori

2. La derivazione si trova al cap. X, 1, 9

in particolare la nozione di inverso di una matrice (~~vedi nota 1 a pie' di pagina~~) e':

$$\overset{c}{P}_{nw} = \overset{s}{V}_{nw} D_w^{-1}$$

in cui D^{-1} e' l'inverso della matrice D (1) (tab. 130).

primari, in quanto i termini della matrice-prodotto sono le somme dei prodotti delle misure dei soggetti in due fattori.

Quindi $F_p F'_p = \Delta = K'_{OF} K_{OF}$ (v. tab. 129) e percio'

$$zF'_p = W_C K'_{OF} K_{OF}$$

ma $K'_{OF}\Lambda_{OV} = D$ e quindi

$$K'_{OF} = D\Lambda_{OV}^{-1} \quad \text{e} \quad K_{OF} = (\Lambda'_{OV})^{-1} D$$

percio'

$$zF'_p = W_C D \Lambda_{OV}^{-1} (\Lambda'_{OV})^{-1} D$$

perche' K_{OF} e' la trasposta di K'_{OF}; e la trasposta di un prodotto $(D\Lambda_{OV}^{-1})'$ e' il prodotto delle trasposte in ordine inverso, cioe' $(\Lambda'_{OV})^{-1} D'$. Ma e' inutile scrivere D' perche' $D' = D$.

Ma il risultato del prodotto zF'_p e' la matrice delle correlazioni fra i tests e i fattori primari [gli elementi della matrice prodotto sono $\sum_{i=1}^{n} z_{ti}^{(n)} f_{ji}^{(n)} = r_{z_t f_j}$, cioe' la correlazione fra il test t e il fattore j], cioe' la struttura dei fattori primari W. D'altra parte $W = FOK_{OF}$ (v. tab. 128), e $K_{OF} = (\Lambda'_{OV})^{-1} D$, quindi

$$zF'_p = W = F_O (\Lambda'_{OV})^{-1} D;$$

e quindi

$$F_O (\Lambda'_{OV})^{-1} D = W_C D \Lambda_{OV}^{-1} (\Lambda'_{OV})^{-1} D.$$

Semplificando,

$$F_O = W_C D \Lambda_{OV}^{-1}$$

moltiplicando da ambo le parti per Λ_{OV}

$$F_O \Lambda_{OV} = W_C D$$

moltiplicando da ambo le parti per D^{-1}

$$W_C = F_O \Lambda_{OV} D^{-1}$$

equazione che permette di calcolare W_C; disponendo gia' di V, siccome $V = F_O \Lambda_{OV}$ (v. tab. 123) si giunge infine alla semplice relazione

$$W_C = V D^{-1}$$

(vedi G. THOMSON, *op. cit.*, Mathematical Appendix, 19).

(1) L'inverso, o valore reciproco di una matrice A e' quella matrice (A^{-1}) che premoltiplicata per A da' la cosiddetta matrice identica I, cioe' una matrice diagonale che ha gli elementi della diagonale uguali a 1 e gli altri elementi uguali a zero. Per es. una matrice identica di ordine 3 e'

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

postmoltiplicando una matrice per una matrice diagonale si ottiene una matrice proporzionale per colonne

premoltiplicando — per righe

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}D_1 & a_{12}D_2 & a_{13}D_3 \\ a_{21}D_1 & a_{22}D_2 & a_{23}D_3 \\ a_{31}D_1 & a_{32}D_2 & a_{33}D_3 \end{bmatrix}$$

struttura

corr. tests e vett. di rif.

$\overset{s}{V}$

Vettori di rifer.

Struttura semplice

$\overset{s}{P}$

correlaz. tests e fattori primari

Fattori primari

Struttura non semplice

Due diverse matrici relative ad una pondera dei fattori!

composizione

$\overset{c}{V}$

Vettori di riferim.

composizione non semplice

Saturazioni tests nei fattori primari

$\overset{c}{P}$

Fattori primari

composizione semplice

rotazione

752
483

269

$$\overset{c}{P}_{nr} = \overset{s}{V}_{nr} D_r^{-1}$$

ottenuta in tal modo la matrice D_w; per

~~Per~~ ottenere la composizione di fattori primari basta ~~dunque calcolare l'inverso della matrice D (tab. 130) cioe' la matrice D^{-1} (tab. 131) e~~ postmoltiplicare $\cancel{V_1}$ $\check{S}$ per D^{-1} (tab. 132).

$$D = \begin{array}{c} \\ F_A \\ F_B \\ F_C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A' & B & C' \end{array} \\ \begin{bmatrix} .935 & .004 & -.006 \\ .000 & .998 & .002 \\ -.003 & .002 & .935 \end{bmatrix} \end{array} \qquad D^{-1} = \begin{array}{c} \\ A' \\ B' \\ C' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} F_A & F_B & F_C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.070 & .000 & .000 \\ .000 & 1.002 & .000 \\ .000 & .000 & 1.070 \end{bmatrix} \end{array}$$

Tabella 131.

$\cancel{V_1}$ $\check{S}_{mw}$

	$\check{A}'$	$\check{B}'$	$\check{C}'$
1	.000	.989	.002
2	-.002	.639	.572
3	-.002	.001	.820
4	.058	-.001	.596
5	.293	-.001	.784
6	.408	-.002	.067
7	.878	.004	-.006
8	.502	.793	-.002
9	.031	.445	.001
Σ	2.166	2.867	2.834

$\cdot$ $D^{-1}_{w_p}$

	$\cancel{F_A}$ $\hat{A}$	$\cancel{F_B}$ B	$\cancel{F_C}$ C
$\check{A}'$	1.070	.000	.000
$\check{B}'$	.000	1.002	.000
$\check{C}'$	.000	.000	1.070

= $\mathring{P}_w$ $\cancel{W_C}$

	F_A	F_B	F_C
1	.000	.991	.002
2	-.002	.640	.612
3	-.002	.001	.877
4	.062	-.001	.634
5	.314	-.001	.839
6	.437	-.002	.072
7	.939	.004	-.006
8	.537	.795	-.002
9	.033	.446	.001
Σ	2.318	2.873	3.029
Contr.	2.318	2.873	3.032

Tabella 132.

Dunque, una volta ottenuta la struttura semplice rispetto al sistema dei vettori di riferimento, si passa mediante un semplice calcolo, alla composizione semplice rispetto al sistema dei fattori primari, e con cio' si raggiunge quella che e' la finalita' dell'analisi fattoriale secondo Thurstone.

La matrice identica, pre- o post-moltiplicata per un'altra matrice la lascia invariata.

L'inverso di una matrice ha, nel calcolo con matrici, le stesse funzioni che ha nel calcolo numerico il valore reciproco di un numero: la moltiplicazione per l'inverso di una matrice corrisponde all'operazione del dividere per la matrice suddetta.

Soltanto le matrici quadrate non singolari, cioe' quelle matrici quadrate il cui determinante e' diverso da zero, hanno un inverso.

Il calcolo dell'inverso di una matrice e' lungo e complesso, tranne per le matrici diagonali: l'inverso di una matrice diagonale e' una matrice i cui elementi sono il valore reciproco dei corrispondenti elementi della matrice originaria. Siccome D e' una matrice diagonale, e' molto semplice calcolarne l'inverso cioe' D^{-1} Per il procedimento di calcolo dell'inverso di una matrice v. l'Appendice.

x l'esempio di una struttura tridimensionale. Raggiungere

La ragione per cui il sistema dei fattori primari gode della proprieta' di fornire una descrizione semplice ed adeguata (1) delle variabili, in termini di equazioni di specificazione, risulta chiara considerando x che ottenere la struttura semplice ruotando i vettori di riferimento, significa ottenere che la maggior parte delle variabili coincidano con i piani. x Ma le variabili che stanno in un piano ~~sono punti del piano, e come tali~~ vengono descritte adeguatamente mediante le loro proiezioni su un sistema di due assi appartenenti al piano; cioe' sono definite ~~ciascuno~~ mediante un'equazione (l'equazione di specificazione) i cui coefficienti sono ~~soltanto~~ le proiezioni sui due fattori primari che appartengono al piano (in quanto costituiscono i due spigoli che limitano il piano) (2).

x perpendicolari ai vettori

Vediamo ora di generalizzare ... e' stato ottenuto con str. a tre dimens.

~~Resta ora da generalizzare quanto e' stato detto, dato che, per poter fare riferimento ad una rappresentazione spaziale, abbiamo considerato finora soltanto il caso particolare rappresentato da una struttura tridimensionale.~~

In uno spazio ad r dimensioni, quando cioe' i fattori comuni sono r, ~~ed $r > 3$~~, quelli che in uno spazio a 3 dimensioni erano i 3 piani contenenti i vettori-tests, sono gli r iperpiani (spazi ad r-1 dimensioni); e la struttura semplice e' caratterizzata dal fatto che i vettori di riferimento sono normali agli iperpiani, uno ad ogni iperpiano.

Alle intersezioni dei piani, che nello spazio fattoriale tridimensionale definiscono i vettori primari, corrispondono nello spazio fattoriale r-dimensionale le intersezioni degli iperpiani, che definiscono pure - sebbene in modo non intuibile - i vettori primari.

Tutti i vettori-tests che giacciono in un iperpiano hanno proiezione ortogonale nulla sul vettore di riferimento normale all'iperpiano e proiezione obliqua nulla sul vettore primario che costituisce la intersezione di tutti gli altri iperpiani, escluso quello in cui giacciono i suddetti tests.

~~Il calcolo delle saturazioni nei fattori primari (matrice $\cancel{W_C}$ $\mathring{P}$) e' semplice quando lo spazio fattoriale e' a tre dimensioni, perche' allora applicando il metodo dei vettori estesi si ottiene agevolmente, sia la matrice W (cioe' la struttura rispetto ai vettori di riferimento) sia la matrice K_{OF} (dei coseni degli angoli tra vettori centroidi e vettori primari) dalla quale si ricava la matrice D necessaria per il calcolo della matrice W_C. Ma quando le dimensioni dello spazio fattoriale sono piu' di tre, l'applicazione del metodo dei vettori estesi diventa complessa e puo' quindi risultare preferibile raggiungere la strut-~~

---

(1) Cioe' tale da offrire un'interpretazione soddisfacente in termini psicologici, o, in generale, nei termini di quella scienza alla quale si riferiscono i dati dell'analisi.

(2) Cioe' il fattore primario che non appartiene al piano considerato, non serve a definirne i punti, i quali hanno infatti proiezione obliqua nulla sull'asse di tale fattore.

x con coordinate i piani in cui giacciono le variabili.

La matrice D_w si ricava da Λ^{-1}_w, che è l'inverso della matrice di trasformazione Λ_w dalla matrice fattoriale ortogonale alla matrice della struttura semplice dei vettori di riferimento (Tab. 118, matrice A_{0G} o tab. 123, matrice Λ_{01}).

Calcolato Λ^{-1}_w si calcolano direttamente gli elementi di D_w

$$\underset{\Lambda^{-1}}{\begin{bmatrix} J_{\mathring{A}\check{A}} & J_{\mathring{A}\check{B}} & J_{\mathring{A}\check{C}} \\ J_{\mathring{B}\check{A}} & J_{\mathring{B}\check{B}} & J_{\mathring{B}\check{C}} \\ J_{\mathring{C}\check{A}} & J_{\mathring{C}\check{B}} & J_{\mathring{C}\check{C}} \end{bmatrix}} \qquad \underset{D}{\begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix}}$$

nel modo seguente[1]

$$D_1 = \sqrt{\frac{1}{J^2_{\mathring{A}\check{A}} + J^2_{\mathring{A}\check{B}} + J^2_{\mathring{A}\check{C}}}}$$

$$D_2 = \sqrt{\frac{1}{J^2_{\mathring{B}\check{A}} + J^2_{\mathring{B}\check{B}} + J^2_{\mathring{B}\check{C}}}}$$

ecc.

Da D si ottiene D^{-1} sostituendo a D_1, D_2, D_3 $\frac{1}{D_1}$, $\frac{1}{D_2}$, $\frac{1}{D_3}$

Esempio!

(1) V. l'appendice al cap. X, 1, 9 ~~...~~ in cui si trova la giustificazione del procedimento

1 occasione
- R corr 2 tests in un camp. di persone
- Q corr 2 persone in un camp. di tests

1 persona
- P corr. 2 tests in un camp. di occasioni (molti, per correlazioni attendibili)
  Fattori di personalità
- O corr. 2 occasioni in un camp. di tests
  Storia di 1 persona a diverse età

1 test
- S 2 persone in un campione di ~~persone~~ occasioni
  (Ps. soc – somiglianze del comportamento di persone (amici e coppie, leader e seguaci, gemelli
- T corr. 2 occasioni in un camp. di persone
  (F_{tt} in diverse occasioni; somiglianza fra occasioni; atmosfere che influiscono sui risultati dei soggetti)

Q – 1 Compiti, disegni come campione di tests p. valutare gli impiegati

2. Q sort – campione di tests p. valutare dei soggetti
   questionari
   scala di tratti

4. Scale del diff. semantico

In questo caso la matrice D_ψ, necessaria per calcolare, in base all'equazione $P = V D^{-1}$ $(W_c = V D^{-1})$ la matrice P (W_c) delle saturazioni dei tests nei fattori primari, si ottiene per un'altra via. 1

Il punto di partenza è l'equazione

$$T' \Lambda_{\cancel{01}} = D_{\cancel{01}} \qquad (K'_{OF} \Lambda_{OV} = D_\psi)$$

di cui in questo caso conosciamo soltanto la matrice Λ_{OV} che ci ha permesso di trasformare la matrice ~~ortoa~~ fattoriale ortogonale di partenza nella matrice V della struttura semplice dei vettori di riferimento (pp. 299 e 310)[1] Possiamo comunque scrivere l'equazione, in base alle considerazioni fatte in precedenza (la matrice T' $[\circ K'_{OF}]$ essendo la matrice dei coseni degli angoli formati fra i vettori primari e i vettori fattoriali ortogonali di partenza può essere considerata una matrice delle saturazioni dei vettori primari, considerati come tests, nei vettori ortogonali, e quindi moltiplicandola per la matrice dei coseni degli angoli fra fattori ortogonali e vettori di riferimento (struttura semplice) si ottiene una matrice diagonale delle ~~proiezioni dei~~ proiezioni dei vettori primari nei vettori di riferimento)

Consideriamo ora la matrice T' (K'_{OF}), ~~le~~ le colonne corrispondono ai fattori ortogonali e le righe ai fattori primari, perchè è stata considerata come una matrice fattoriale, ~~che contenta~~ ortogonale.

vive

~~Consideriamo ora la matrice K_{OF} (T),~~

A B C

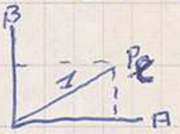
P_A

P_B

P_C

(1) Va notat che le matrici Λ_{06} di tab. 118 e Λ_{01} di tab. 23 sono uguali, ~~salvo per~~ a parte ~~co~~ le approssimazioni al 3° decimale, se tenuto conto che il fattore A''' corrisponde al fattore C'

I coseni degli angoli che un vettore fattoriale fa con i vettori fattoriali ortogonali hanno la proprietà che la somma dei loro quadrati è 1. Infatti se i vettori ortogonali sono due, si ha che



le proiezioni del vettore, che è unitario, ~~fa~~ sui vettori fattoriali ortogonali, che sono i coseni dei rispettivi angoli sono tali che, per il teorema di Pitagora, la somma dei loro quadrati = 1. Cioè $\cos^2_{AP_\ell} + \cos^2_{BP_\ell} = 1$ e la relazione è valida anche per spazi a più di tre dimensioni.

Questa proprietà, unitamente alle proprietà delle matrici diagonali, ci permette di calcolare D_ψ.

Dall'equazione

$$T'\Lambda = D \qquad (K'_{OF}\Lambda_{OV} = D_\psi)$$

postmoltiplicando da ambe le parti per Λ^{-1} si ottiene

$$T' = D\Lambda^{-1} \qquad (K'_{OF} = D_\psi \Lambda^{-1}_{OV})$$

La matrice D deve essere dunque tale che premoltiplicata alla matrice Λ^{-1}_{OV} (1) dà una matrice "normalizzata per righe" (cioè tale che la somma dei quadrati dei termini di ogni riga = 1).

Ma premoltiplicare una una matrice per una matrice diagonale significa moltiplicare gli elementi della 1ª riga della matrice per il 1° elemento della matrice diagonale, gli elementi della 2ª riga per il 2° elemento della matrice diagonale, ecc.

(1) Va tenuto presente che ~~conoscendo la~~ disponendo della matrice Λ possiamo calcolarne l'inverso (se l'inverso esiste) e quindi Λ^{-1} è il dato ~~del~~ di cui disponiamo.

cioè

$$\cancel{\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{T_A A} & b_{T_A B} & b_{T_A C} \\ b_{T_B A} & b_{T_B B} & b_{T_B C} \\ b_{T_C A} & b_{T_C B} & b_{T_C C} \end{bmatrix} = \Big[}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} \Lambda_{AV_A} & \Lambda_{AV_B} & \Lambda_{AV_C} \\ \Lambda_{BV_A} & \Lambda_{BV_B} & \Lambda_{BV_C} \\ \Lambda_{CV_A} & \Lambda_{CV_B} & \Lambda_{CV_C} \end{bmatrix}}_{\Lambda_{0V}^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_1\Lambda_{AV_A} & d_1\Lambda_{AV_B} & d_1\Lambda_{AV_C} \\ d_2\Lambda_{BV_A} & d_2\Lambda_{BV_B} & d_2\Lambda_{BV_C} \\ d_3\Lambda_{CV_A} & d_3\Lambda_{CV_B} & d_3\Lambda_{CV_C} \end{bmatrix}}_{T' \quad (K'_{0F})}$$

Ma sappiamo che

$$(d_1\Lambda_{AV_A})^2 + (d_1\Lambda_{AV_B})^2 + (d_1\Lambda_{AV_C})^2 = 1$$

$$(d_2\Lambda_{BV_A})^2 + (d_2 \qquad)^2 + (d_3 \qquad)^2 = 1$$

ecc.

da cui

$$d_1^2\left(\Lambda^2_{AV_A} + \Lambda^2_{AV_B} + \Lambda^2_{AV_C}\right) = 1$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2_{AV_A} + \Lambda^2_{AV_B} + \Lambda^2_{AV_C}}}$$

ed in tal modo si calcola~~no~~, elemento per elemento la matrice D, il cui inverso ci consente di calcolare la matrice della composizione semplice dei fattori primari a partire dalla matrice della struttura semplice dei vettori di riferimento in base all'equazione $W_c = V D^{-1}$

Disponiamo della equazione ter

$$K'_{OF} \Lambda_{01} = D_4$$

perchè K'_{OF} (saturaz. dei tests fattoriali per i fatt. F_A F_B F_C

nei tre fattori ortogonali A, B, C.

Sappiamo cioè che eseguendo la moltiplicazione si ottiene la matrice delle proiez. dei vettori primari nei vettori di riferimento, cioè una matrice diagonale D per le ragioni esposte a p. 323.

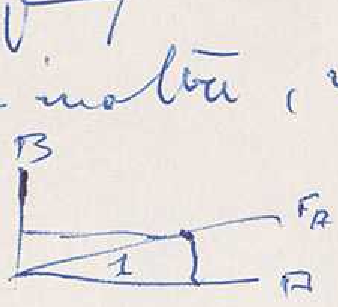
Consideriamo la matrice K_{OF} i cui elementi sono i coseni degli angoli che formano i vettori primari (obliqui) con i vettori fattoriali ortogonali (o correlazioni fra gli uni e gli altri o saturazioni o proiez. dei tests fattoriali obliqui nei vettori fattoriali ortogonali). Perciò K_{OF} è "normalizzata per colonne"

$$K_{OF}$$

$$\begin{array}{cccc} & F_A & F_B & F_C \\ A & & & \\ B & & & \\ C & & & \end{array}$$

Infatti, è ottenuta dividendo k_{AA}, k_{BA}, k_{CA} per $\sqrt{k_{AA}^2 +}$ per cui $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{\quad}}\right)^2 + \left(\frac{C}{\sqrt{\quad}}\right)^2 = 1$.

e inoltre, nel caso di 2 soli fattori



e K'_{OF} è normalizzata per righe

Risolvendo per K'_{OF} l'equazione

$$K'_{OF}\,\Lambda_{OV} = D_\psi$$

si ha

$$K'_{OF} = D_\psi\,\Lambda^{-1}_{OV}$$

La matrice D_ψ deve essere tale che premoltiplicata alla Λ^{-1}_{OV} dà una matrice normalizzata per righe.

Ma premoltiplicare una matrice per una matrice diagonale significa moltiplicare gli elementi della 1a riga ~~per~~ della matrice per il 1o elemento della matrice diagonale ecc.

Ne risultano le seguenti equazioni dalle quali si possono calcolare i diversi elementi della matrice D_ψ

Se indichiamo con la minuscola gli elementi dell'inverso (e cioè λ_{pq}) e con d_p gli elementi della matrice diagonale, avremo